بسم الله الرحمن الرحيم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب عفت محمد علی پور دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش هندسه دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۲۳۱۰۶ که در تاریخ شهریور ۱۳۹۲ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان " مطالعه و بررسی میدان‌های برداری کیلینگ واحد و ژئودزیک‌های همگن برخی گروه‌های لی "، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: عفت محمد علی پور

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:
مطالعه و بررسی میدان‌های برداری کیلینگ واحد و ژئودزیک‌های همگن برخی گروه‌های لی

استاد راهنما:
دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور:
دکتر کاظم حق نژاد آذر

پژوهشگر:
عفت محمدعلی پور

شهریور ۱۳۹۲

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:
مطالعه و بررسی میدان‌های برداری کیلینگ واحد و ژئودزیک‌های همگن برخی گروه‌های لی

پژوهشگر:
عفت محمد علی پور

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی

نام ونام خانوادگی	مرتبه علمی	سمت	امضاء
دکتر داریوش لطیفی	استادیار	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	
دکتر کاظم حق نژاد	استادیار	استاد مشاور	
دکتر نعمت ابادری	استادیار	داور	

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

خواهرزاده ی

عزیزتر از جانم

آتوسا

و همهٔ کسانی که دوستشان دارم

همتم بدرقه‌ی راه کن ای طایر قدس

که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری. تو می‌دانی و همه می‌دانندکه شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مُردن را خود خواهم آموخت.

اینک پایان دوره‌ای فرا رسیده که زمانی آغازش را به شادی تماشا کرده بودم، راهی که با بودن و یاری رساندن بسیاری به پایان رسید با تمام خوبی‌ها و سختی‌هایش. گرچه حمد و سپاس سزاوار پروردگار است اما بر خود واجب می‌دانم تا زحمات آنان را که بر این بنده حقی است سپاس گویم. با تقدیر و درود فراوان خدمت **پدر و مادر** بسیار عزیز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است. با تشکر و سپاس از استاد دانشمند و پر مایه‌ام جناب آقای دکتر **داریوش لطیفی** که راهنمای علمی من در این پایان نامه بودند و از محضر پر فیض تدریسشان، بهره‌ها برده‌ام. با امتنان بیکران از مساعدت‌های بی‌شائبه‌ی جناب آقای دکتر **کاظم حق نژاد آذر** که مشاوره‌ی این پایان نامه را بر عهده داشتند. با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر **نعمت اباذری** که زحمت داوری پایان نامه را برعهده گرفتند. با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

عفت محمدعلی پور

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی: محمد علی پور نام: عفت

عنوان پایان‌نامه: مطالعه و بررسی میدان‌های برداری کیلینگ واحد و ژئودزیک‌های همگن برخی گروه‌های لی

استاد راهنما: دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور: دکتر کاظم حق نژاد آذر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض

گرایش: هندسه دانشگاه: محقق‌اردبیلی

دانشکده: علوم ریاضی تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۰۶/۱۳ تعداد صفحات: ۹۱

چکیده:

فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک منیفلد همگن ریمانی باشد. در این صورت ژئودزیک γ از $\frac{G}{H}$ گذرنده از مبدأ o را همگن گویند هرگاه $\gamma\left(t\right)=\exp\left(tX\right)\left(o\right)$, $t\in\mathbb{R}$ که در آن $X\in\mathfrak{g}-\{۰\}$. بردار $X\in\mathfrak{g}-\{۰\}$ که برای آن $\gamma\left(t\right)=\exp\left(tX\right)\left(o\right)$ یک ژئودزیک باشد را بردار ژئودزیک گویند. نشان داده شده هر فضای همگن ریمانی دارای حداقل یک ژئودزیک همگن می‌باشد. همچنین توسط لمی به نام لم ژئودزیک، محاسبه بردارهای ژئودزیک امکان پذیر شده است. در این پایان‌نامه میدان‌های برداری کیلینگ واحد همگن و ژئودزیک‌های همگن و بردارهای ژئودزیک را برای گروه‌های لی که جبر لی آنها بفرم $\mathfrak{a}\underset{P}{\oplus}\mathfrak{r}$ می‌باشد را محاسبه خواهیم کرد.

کلیدواژه‌ها: بردار ژئودزیک، ژئودزیک همگن، میدان‌های برداری کیلینگ واحد، نیم ضرب مستقیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیشینه و پیشگفتار

۱.۱ تاریخچه هندسه

عالمی که ما در یکی از کرات آن زندگی می‌کنیم پر از اسرار و رموزی است که نمی‌توان آن‌ها را به حساب درآورد. بلکه هر یک از ذرات و اتم‌های آن دارای حقیقتی است که از دیده‌ها پنهان می‌باشد.
بشر بعنوان یکی از موجودات این عالم، با قوه پنهانی و درونی خرد یا اندیشه خود دارای حس کنجکاوی زیادی است که همواره مایل است بر حقایق و اسرار جهان و رموز پنهان آن آگاهی حاصل نماید، این حس درونی موجب پیدایش علوم از جمله علوم ریاضی گردید. اولین قدم‌ها در راه تحقیقات در یونان و مصر قدیم برداشته شد. در یونان، افلاطون از بزرگترین شاگردان سقراط بود که بعضی از دانشمندان معتقد به نبوت او نیز می‌باشند وی در سال **۳۸۶** پیش از میلاد در باغ شخصی خود موسوم به "آکادمیوس" مدرسه‌ای تأسیس نمود و نزدیک به چهل سال در آنجا تدریس می‌کرد و آن مدرسه را آکادمی نامید. افلاطون برخلاف سقراط تعلیمات خود را به امور اخلاقی اختصاص نداده بلکه تحقیقات خود را به همه موجودات بسط داد. افلاطون معتقد بود که ریاضی را باید در تعلیم علوم مقدم داشت، زیرا معتقد بود برای ورزش فکر نه تنها خیلی مفید بلکه لازم است و معروف است که بر سر آکادمی خود این عبارت را نوشته بود:

"هر کس هندسه نمی‌داند نباید وارد این مدرسه شود"

افلاطون در کتاب جمهوری می‌نویسد: " مطالعه ریاضیات دستگاه ذهن را توسعه داده و فکر را به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است زیرا که درک حقایق جهان هستی فقط از راه تفکر میسر است."
پس از سقوط آتن، در سال **۳۳۱** پیش از میلاد، بندر اسکندریه در مصر مرکز علوم گردید. اقلیدس هندسه‌دان مشهور از شاگردان مکتب افلاطون بود که در این عصر ظهور کرد. اقلیدس آموزش و پرورش را در مصر رونق داد و در بسط علوم کوشید. هندسه او هنوز با گذشت **۲۴** قرن در دنیا مورد توجه عالمان این علم است. کتب او در صدر اسلام به عربی ترجمه و بعدا خواجه نصیرالدین طوسی آن‌ها را تحریر و توضیح نمود. از دانشمندان دیگر در اسکندریه فیثاغورث بود که در قرن اول پیش از میلاد می‌زیسته است. اگرچه

تعلیمات او بیشتر روحیه اخلاقی داشت ولی یافته‌های او در هندسه با پیشرفت فوق‌العاده علوم هنوز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲.۱ لزوم فراگیری هندسه منیفلد در عصر حاضر

فراگیری هندسه برای تقویت خرد و اندیشه همگان خوب است اما نیاز به آموزش هندسه منیفلد در رشته‌های فنی و علوم به مراتب بیشتر احساس می‌شود. در کشورهای پیشرفته برنامه‌های درسی دانشگاه‌ها دائما در حال تحول و بازنگری است. بطوریکه دروس ریاضیات عمومی دانشجویان رشته‌های فنی و علوم مفاهیم خمینه‌ها را شامل می‌شود و سال‌هاست که در این کشورها تدریس می‌گردد، اگرچه استفاده از کاربرد خمینه‌ها در رشته‌های مختلف در مقطع کارشناسی ارشد و دکترا صورت می‌گیرد. از طرف دیگر مراجعه روزافزون دانشجویان فنی و ریاضی کاربردی در این مقاطع به متخصصین هندسه منیفلد دلیل دیگری بر نیاز روزافزون به آموزش هندسه منیفلدها است.

خمینه‌ها در علوم و فنون مختلف کاربردهای متنوعی دارند به عنوان مثال در برخی از شاخه‌های فیزیک مانند نظریه نسبیت عام و یا نظریه کوانتوم، هندسه منیفلدها نقش زیربنایی دارد و کتب بسیار متنوعی در این زمینه تألیف شده است. هنگام استفاده از تئوری معادلات دیفرانسیل، خمینه‌ها از اهمیت خاصی برخوردارند و یا هرگاه بخواهیم مقدار یک انتگرال را روی یک فضای پیچیده یا نامتناهی محاسبه کنیم نیاز به استفاده از مفهوم انتگرال روی خمینه‌ها داریم و یا وقتی بخواهیم در علم مکانیک پایداری یک جسم (مثلا یک ماهواره) بر روی یک مسیر را در فضا مطالعه نماییم نیاز به مفهوم انحنای فضا و محاسبه ژئودزیک‌های آن داریم. اخیرا حتی در علوم طبیعی مانند بیولوژی و زمین‌شناسی نیز از مفهوم خمینه‌هایی که روی آنها متر فینسلر [۱] تعریف شده باشد استفاده می کنند. [۲] کاربرد هندسه منیفلد به همین موارد ختم نمی‌شود بلکه می‌توان از آن بعنوان پل ارتباطی بزرگی بین ریاضیات محض و کاربرد ریاضی در علوم مختلف نام برد.

شاید به همین دلیل باشد که مفهوم هندسه منیفلد در دروس مقدماتی ریاضی عمومی اینگونه کشورها وارد

[۱] Finsler
[۲] -The Theory of Sprays and Finsler spaces with application in physics by Biology: by Antonelli - Ingarden - Matsumoto, Kluwer Academic, 1993.
-Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories and Quantum Cosmology, by Asanov, 1985 ISBN 90-277-1960-80.

شده است، ممکن است دلایل دیگری نیز برای این موضوع موجود باشد. اما به هر حال دقت در این امر جامعه ریاضی ما را بر آن می‌دارد که لزوم فراگیری هندسه منیفلد در مقاطع کارشناسی ریاضی را مورد مطالعه قرار داده برنامه‌ای جهت تدریس آن برای دانشجویان فنی مهندسی را در دستور کار خود قرار دهد.

۳.۱ روند کلی پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل **۵** فصل می‌باشد که در فصل **۱** بنام پیشینه و پیشگفتار، خلاصه‌ای از تاریخ هندسه را بیان کرده و سپس در فصل **۲** تحت عنوان مفاهیم و مقدمات اولیه؛ شامل تعاریف، مثال‌ها و قضایایی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است را آورده‌ایم و در ادامه در فصل **۳** مقدمه‌ای را برای درک کلی از پایان‌نامه موجود آورده‌ایم. پس از آن محاسبات اولیه را انجام داده‌ایم که این محاسبات در فصل‌های **۴** و **۵** مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل **۴** نیز میدان‌های برداری کیلینگ واحد را با استفاده از یک سری محاسبات و یک قضیه که در آن فصل بیان و اثبات شده است را بدست آورده‌ایم. در نهایت مجموعه‌ی بردارهای ژئودزیک همگن را در فصل **۵** بدست آورده‌ایم. و در پایان کار یک نتیجه‌گیری کلی از پایان‌نامه و پیشنهاد برای بررسی بیشتر و گسترده‌تر را بیان کرده‌ایم.

فصل ۲
مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل ما به طورخلاصه برخی از تعاریف، مثال‌ها و قضایایی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

۱.۲ خمینه

یک خمینه [۱] ، کلیتی از منحنی‌ها و سطوح به ابعاد بالاتر است. موضعا اقلیدسی است و در هر نقطه دارای یک همسایگی، بنام کارت، است که همیومورف با زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است. مختصات کارت به انجام محاسبات خمینه به عنوان فضای اقلیدسی اجازه می‌دهد، بطوریکه بسیاری از مفاهیم واقعی را از جمله دیفرانسیل پذیری، مشتقات نقطه‌ای، فضاهای مماس و فرم‌های دیفرانسیلی را به خمینه انتقال دهد.

همانند اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی این نظریه از خمینه توسط یک نفر صورت نگرفته است، بلکه حاصل سال‌ها فعالیت‌های جمعی است. کارل فردریش گاوس [۲] در شاهکار "مطالعات عمومی روی سطوح منحنی" [۳] که در سال ۱۸۲۷ منتشر شد، آزادانه از مختصات موضعی روی سطوح (رویه‌ها) استفاده کرد. به علاوه، وی برای اولین بار سطح را به عنوان یک فضای مجدد، مستقل از فضای اقلیدسی موجود در آن، در نظر گرفت. در مداوم تحلیف برنهارد ریمان در سخنرانی گوتینگن [٤] "فرضیه‌ای تحت هندسه لی" [٥] در سال ۱۸۵۴ بنیان هندسه دیفرانسیل ابعاد بالاتر را گذاشت. در واقع واژه "$Manifold$" ترجمه مستقیم کلمه آلمانی "$Mannigfaltikiet$" است که ریمان برای توصیف اشیایش استفاده کرد. این کار توسط هنری پوانکاره [٦] در اواخر قرن نوزدهم در همولوژی دنبال شد که در آن فضای اقلیدسی موضعی به طور برجسته‌ای، نشان داده شد. اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم دوره توسعه در توپولوژی نقطه-مجموعه‌ای بود. در این قسمت تعاریف پایه‌ای و خصوصیات خمینه‌های هموار و نگاشت بین خمینه‌های هموار نشان داده می‌شود. از آنجایی که تعداد زیادی خمینه وجود دارد (برای مثال خمینه‌های توپولوژیکی، C^k- خمینه‌ها، خمینه‌های تحلیلی و خمینه‌های مختلط) در این پایان‌نامه مفاهیم مرتبط با خمینه‌های هموار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[۱] Manifold
[۲] Carl Friedrich Gauss
[۳] Disquisitions generals circa superficies curvas
[٤] Gottingen
[٥] Uber die Hypothesen welche, der Geometrie zu Grunde liegn
[٦] Henri poincare

۲.۲ خمینه توپولوژیک

تعریف ۱.۲. فرض کنید M یک فضای توپولوژیک باشد، در این صورت M را موضعا اقلیدسی گوییم (فضاهای اقلیدسی مثل $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^۲$، $\mathbb{R}^۳$ و ...) هرگاه برای هر نقطه p از M یک همسایگی باز U از آن در M و یک همسایگی باز V در $\mathbb{R}^n$ (برای یک $n \in \mathbb{Z}$) یک هومیومرفیسم $\varphi : U \longrightarrow V$ موجود باشد.

مثال ۱.۲. فرض کنید M یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت M موضعا اقلیدسی است.

تعریف ۲.۲. فضای توپولوژیک را یک خمینه توپولوژیک گوییم هرگاه:

۱) موضعا اقلیدسی باشد.

۲) هاسدورف باشد.

یک فضای توپولوژیک را هاسدورف [۱] گوئیم اگر برای هر دو نقطه متمایز آن همسایگی‌هایی از این دو نقطه موجود باشند که یکدیگر را قطع نکنند.

۳) دارای پایه شمارا [۲] باشد.

اگر M را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشانید می‌گوئیم M دارای پایه شمارا است.

مثال ۲.۲. $S^۱$، $S^۲$، خود $\mathbb{R}^n$ها و رویه‌ها همگی خمینه توپولوژیک هستند.

۳.۲ خمینه‌های دیفرانسیل پذیر

تعریف ۳.۲. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک (همبند) باشد با بعد n، در این صورت اگر $p \in M$ یک نقطه دلخواه باشد و U یک همسایگی باز حول p در M و $V \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد، $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ یک هومیومرفیسم باشد در این صورت زوج (U, x) را یک کارت موضعی حول p می‌گوییم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید Mیک خمینه توپولوژیک باشد و (U, φ) و (V, ψ) دو کارت در M حول نقطه‌ای مانند x باشند که $U \cap V \neq \emptyset$، در این صورت این دو کارت را C^∞–مرتبط گوییم هرگاه نگاشت‌های تغییر کارت

$$\psi o \varphi^{-۱} : \varphi (U \cap V) \to \psi (U \cap V)$$

[۱] Hausdorff

[۲] Countable basis

$$\varphi o\psi^{-1} : \psi (U \cap V) \to \varphi (U \cap V)$$

C^{∞} باشند.

۱.۳.۲ اطلس ماکزیمال - خمینه دیفرانسیل پذیر

تعریف ۵.۲. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک n-بعدی باشد و A یک مجموعه از کارت‌های روی M باشد در این صورت A را یک اطلس (هموار) روی M گوییم هرگاه:

۱) دامنه‌ی کارت‌ها M را بپوشاند یعنی $M = \underset{\alpha \in A}{\cup} U_{\alpha}$.

۲) اعضای A دوبدو C^{∞}-مرتبط باشند.

تعریف ٦.۲. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک باشد در این صورت اطلس A روی M را یک اطلس ماکسیمال گویند هرگاه A مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

تعریف ۷.۲. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک n-بعدی باشد و A یک اطلس ماکسیمال روی آن باشد در این صورت این اطلس ماکسیمال را یک ساختار دیفرانسیل پذیر روی M گوییم.
و زوج (M, A) را یک خمینه هموار گوییم. یعنی یک خمینه هموار عبارت است از یک خمینه توپولوژیک به همراه یک ساختار دیفرانسیل پذیر.

٤.۲ بردار مماس و فضای مماس بر یک خمینه

تعریف ۸.۲. فرض کنید $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) = I \to M$ یک خم هموار روی خمینه n-بعدی M باشد و $\alpha(\circ) = p$. حال کارت (U, x) را حول p در M در نظر می‌گیریم. در این صورت نمایش α توسط کارت (U, x) یک خم در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$xo\alpha : (-\delta, \delta) \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

حال تعریف می‌کنیم: $\alpha'(\circ) = \frac{d}{dt}|_{t=\circ} xo\alpha$ و آن را سرعت خم α در $t = \circ$ گوییم.

دو خم $\alpha : I \to M$ و $\beta : I \to M$ روی خمینه M را هم ارز گوییم هرگاه:

$$\alpha(\circ) = \beta(\circ) = p$$

$$\alpha'(\circ) = \beta'(\circ)$$

شرط بالا یک رابطه‌ی هم ارزی بین خم‌های روی M تعریف می‌کند. کلاس هم ارزی متناظر با خم α را با $[\alpha]_p$ نشان می‌دهیم.

$$[\alpha]_p = \left\{\beta : I \to M | \beta(0) = p, \beta'(0) = \alpha'(0)\right\}$$

مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی $[\alpha]_p$ را با نماد T_pM نشان می‌دهند.

$$T_pM = \left\{[\alpha]_p \,|\, \alpha : I \to M, \alpha(0) = p\right\}$$

و آن را فضای مماس بر M در p گویند.

و کلاس‌های $[\alpha]_p$ بردارهای مماس بر M در p خواهند بود.

۱.٤.۲ فضای دوگان مماس

تعریف ۹.۲. فرض کنید M یک خمینه هموار n–بعدی باشد در این صورت برای هر نقطه p از M فضای مماس T_pM یک فضای برداری است که فضای دوگان[1] آن را با T_p^*M نشان داده آن را فضای دوگان مماس می‌نامیم. فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p بوده و $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}_{i=1,\dots,n}$ یک پایه برای T_pM باشد آنگاه پایه‌ای برای T_p^*M تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \text{ پایه دوگان } (\theta^i)_p$$

تذکر ۱.۲. فرض کنید E یک فضای برداری n–بعدی روی میدان $\mathbb{K}$ باشد و E^* نیز پایه‌ی دوگان آن باشد، در حقیقت اگر یک پایه برای E در نظر بگیریم یک پایه برای E^* به آن وابسته می‌باشد که آن را پایه دوگان می‌نامیم. اگر فرض کنیم e_i یک پایه برای E باشد آنگاه نگاشت θ^i یک پایه برای E^* است.

$$\underset{x \mapsto \theta^i(x) = x^i}{\theta^i : E \to \mathbb{K}}$$

۲.٤.۲ کلاف مماس

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید M یک خمینه n–بعدی باشد، در این صورت کلاف مماس M بصورت اجتماع تمام فضاهای مماس تعریف می‌شوند و بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

[1] Dual space

۳.٤.۲ میدان برداری

تعریف ۱۱.۲. فرض کنیم M یک خمینه هموار n–بعدی باشد در این صورت یک میدان برداری [1] روی M عبارت است از نگاشت همواری مانند $X : \underset{p\mapsto X_p}{M \to} TM$ بطوریکه از $p \in M$، آنگاه $X\left(p\right) \in T_pM$.

بطور ساده‌تر یک میدان برداری تابعی است از M به TM که به هر نقطه‌ی خمینه مانند p، بردار مماس $X\left(p\right)$ عضو T_pM، در فضای مماس M در نقطه p، را نسبت می‌دهد. (بوس بای، ۲۰۰۳).

مثال ۳.۲. اگر $M = \mathbb{R}^۳$، آنگاه تابع زیر یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^۳$ می‌باشد.

$$X : \mathbb{R}^۳ \to T\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R}^۳ \times \mathbb{R}^۳$$

$$X\left(p_۱, p_۲, p_۳\right) = \left(p_۱^۲ + ۲\sin\frac{p_۱}{۱ + p_۲^۲}, ۴p_۲p_۳, p_۱ + p_۲\right)$$

مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری روی خمینه M را با $\chi\left(M\right)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲. یک میدان برداری روی M عبارت است از نگاشت:

$$X : \underset{f\mapsto X(f)}{C^\infty\left(M\right) \to} C^\infty\left(M\right)$$

که خواص زیر را دارد:

$$X\left(f + g\right) = X\left(f\right) + X\left(g\right) \qquad (۱)$$

$$X\left(\lambda f\right) = \lambda X\left(f\right) \qquad (۲)$$

$$X\left(f.g\right) = X\left(f\right).g + f.X\left(g\right) \qquad (۳)$$

٤.٤.۲ کروشه لی دو میدان برداری

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید X, Y دو میدان برداری روی M باشند در این صورت کروشه لی X, Y، یک میدان برداری است که با $[X, Y]$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[X, Y] : C^\infty\left(M\right) \to C^\infty\left(M\right)$$

[1] Vector field