



دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد  
ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

نگاهی به اصل تغییراتی اکلند و کاربردهای آن در بررسی  
معادلات بیضوی فاقد فشردگی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر عبدالعلی نعمتی

نگارش:

مریم کوزه‌گر کالجی

شهریور ۱۳۸۷



University of Mazandaran  
Faculty Of Basic Sciences

M. Sc. Thesis in

Pure Mathematics (Analysis)

Subject:

**Study of Ekeland's variational principle and its  
applications on elliptic equations with lack of  
compactness**

Supervisor:

**Dr. M. Alimohammadi**

Advisor:

**Dr. A. Neamati**

Author:

**M. koozegar kaleji**

**Aug. 2008**

تقديم به پيشگاه مقدس

السبب المتصل بين الارض والسماء

آقا امام زمان (عج)

## قدردانی

سپاس بیکران خداوندی را سزاست که آفریننده جهان هستی با همه شگفتی‌های آن است. لطف و کرم او را سپاس که با آزمونی دیگر فرصتی تازه فراهم ساخت که بزرگی و عظمت او در مقیاسی بس وصف‌ناپذیر، نگارنده را به بندگی و عبودیت بیشتر هدایت کند.

اکنون که به یاری حق تعالی این پایان‌نامه به سرانجام رسیده‌است، بر خود فرض می‌دانم تا از تمامی بزرگواری که در این راه یاری‌ام کردند قدردانی به عمل آورم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر محسن علی‌محمدی، استاد راهنمای ارجمندم که درس امید، تلاش و نشاط به من آموختند، به پاس اندوخته‌هایی که در محضرشان کسب کردم و راهنمایی‌های بی‌دریغ و ارزنده‌شان سپاسگزارم و از درگاه ایزد منان برای ایشان بهروزی و پیروزی روزافزون خواستارم.

از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر عبدالعلی نعمتی که از کلاس‌های درسشان بهره برده‌ام، برای مشاوره ارزشمندشان متشکرم. از اساتید گرانقدر مدعو جناب پروفیسور قاسم علیزاده‌افروزی و جناب آقای دکتر ماش‌الله متین‌فر قدردانی می‌کنم که زحمت مطالعه و تصحیح دقیق این پایان‌نامه را به عهده داشتند.

از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر یحیی طالبی به خاطر زحماتشان قدردانی می‌کنم و همچنین از تمامی اساتید بزرگواریم در دانشگاه مازندران که افتخار شاگردیشان را داشتم سپاسگزارم.

و بر خود واجب می‌دانم که از مادر فداکار و پدر بزرگواریم که بی‌ریاترین عشق دنیا را نثارم کردند قدردانی کنم و از تمامی کسانی که در آسمان زندگیم درخشیدند؛ برادرانم

که همواره مشوقم بودند و دوستان بسیار خوبم که سال‌های تحصیل مرا با خاطره دوستی‌ها درآمیختند.

## چکیده

قضیه تغییراتی اکلند، بعد از اثباتش توسط شخص اکلند که به صورت کاملاً مجرد بیان شده بود و تا سال‌ها بعد از آن در باب معادل‌ها و کاربردش در آنالیز مجرد مورد مطالعه بود، اخیراً کاربردهای دیگری در شاخه‌های کاربردی نیز پیدا نموده‌است. در این تز مایلیم یکی از کاربردهای آن یعنی حل برخی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را مورد مطالعه قرار دهیم. در ابتدا اصل تغییراتی اکلند و بعضی از معادل‌های آن را به صورت گذرا و صرفاً به شکل مرور تاریخی آن بیان می‌کنیم و سپس به معرفی چند معادله و چگونگی استفاده از این اصل در حل‌شان می‌پردازیم.

# فهرست مندرجات

۱	تعاريف، مفاهيم و قضايای مقدماتی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ مفاهيم مقدماتی	۱
۱	۱.۲.۱ تعريف (توپولوژی)	۱
۲	۲.۲.۱ تعريف (دامنه)	۲
۲	۳.۲.۱ تعريف (نقطه حدی، بستار، مرز)	۲
۳	۴.۲.۱ تعريف	۳
۳	۵.۲.۱ تعريف	۳
۳	۶.۲.۱ تعريف (مجموعه محدب)	۳
۴	۷.۲.۱ تعريف (تابع محدب)	۴
۴	۸.۲.۱ تعريف (تابع آزمون)	۴
۴	۹.۲.۱ نمادگذاری	۴
۵	۱۰.۲.۱ قضيه مقدار میانگین [۳۶]	۵

۵	تعریف (نماد $o(\cdot)$ ) [۲۷]	۱۱.۲.۱
۵	فضاهای باناخ و هیلبرت (حقیقی)	۳.۱
۵	تعریف (فضای خطی نرم‌دار، فضای باناخ)	۱.۳.۱
۶	تعریف (نگاشت خطی، تابعی خطی)	۲.۳.۱
۶	تعریف (دوگان) [۳۵]	۳.۳.۱
۶	تعریف (فضای باناخ انعکاسی) [۳۵]	۴.۳.۱
۷	تعریف	۵.۳.۱
۷	تعریف (نرم‌های معادل)	۶.۳.۱
۷	تعریف (همگرایی ضعیف)	۷.۳.۱
۷	تعریف (نیم پیوسته پایینی) [۲۰]	۸.۳.۱
۸	تعریف (همگرایی قوی)	۹.۳.۱
۸	قضیه (در مورد همگرایی ضعیف) [۳۵، ۳۱]	۱۰.۳.۱
۸	قضیه [۲۹]	۱۱.۳.۱
۹	تعریف (فضای به‌طوریکنواخت محدب) [۲۷]	۱۲.۳.۱
۹	قضیه [۲۷]	۱۳.۳.۱
۹	قضیه [۳۴]	۱۴.۳.۱
۱۰	تعریف (فضای ضرب داخلی، فضای هیلبرت)	۱۵.۳.۱
۱۱	تعریف (تعامد) [۲۸]	۱۶.۳.۱
۱۱	قضیه [۳۲]	۱۷.۳.۱
۱۱	قضیه (تصویر) [۲۸]	۱۸.۳.۱
۱۲	فضاهای $L^p(\Omega)$	۴.۱



۱۲	تعریف (فضای $L^p(\Omega)$ )	۱.۴.۱
۱۲	تعریف (سوپریمم اساسی)	۲.۴.۱
۱۳	تعریف (فضای $L^\infty(\Omega)$ )	۳.۴.۱
۱۳	تعریف (فضای $L^p_{loc}(\Omega)$ )	۴.۴.۱
۱۳	قضیه (نامساوی هولدر)	۵.۴.۱
۱۴	قضیه (نامساوی مینکوفسکی)	۶.۴.۱
۱۴	قضیه (کامل بودن $L^p$ ) [۲۸]	۷.۴.۱
۱۴	قضیه همگرایی تسلطی لبگ [۲۸]	۸.۴.۱
۱۵	لم فاتو [۲۸]	۹.۴.۱
۱۵	اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس	۵.۱
۱۵	تعریف (بردار گرادیان)	۱.۵.۱
۱۵	تعریف (دیورژانس)	۲.۵.۱
۱۶	تعریف (لاپلاسیان)	۳.۵.۱
۱۶	تعریف (مشتق در جهت بردار واحد)	۴.۵.۱
۱۶	قضیه (دیورژانس)	۵.۵.۱
۱۷	اتحادهای گرین [۳۳]	۶.۵.۱
۱۸	فضاهای سوبولف	۶.۱
۱۸	تعریف (اندیس چندگانه) [۳۳]	۱.۶.۱
۱۸	تعریف (مشتق ضعیف)	۲.۶.۱
۱۹	تعریف (مشتق یک نگاشت)	۳.۶.۱
۱۹	قضیه (مشتق معمولی)	۴.۶.۱

۲۰	تعریف (فضاهای سوبولف $W^{k,p}(\Omega)$ ) [۳۳]	۵.۶.۱
۲۰	نکته	۶.۶.۱
۲۰	تعریف نرم در فضای $W^{k,p}(\Omega)$	۷.۶.۱
۲۱	تعریف	۸.۶.۱
۲۱	تعریف (فضاهای $(H_0^{1,2}(\Omega))$ ) [۲۷]	۹.۶.۱
۲۱	قضیه [۳۰]	۱۰.۶.۱
۲۱	لم (لم اساسی حساب تغییرات)	۱۱.۶.۱
۲۲	روشهای حساب تغییرات	۷.۱
۲۲	تعریف (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی)	۱.۷.۱
۲۲	تعریف	۲.۷.۱
۲۳	تعریف (جواب ضعیف [۳۴])	۳.۷.۱
۲۳	تعریف (روش تغییراتی)	۴.۷.۱
۲۳	تعریف (نقطه بحرانی یک تابع)	۵.۷.۱
۲۴	عملگرهای خطی	۸.۱
۲۴	تعریف (عملگر خطی فشرده)	۱.۸.۱
۲۴	عملگر بیضوی	۲.۸.۱
۲۵	لم (پیوستگی) [۲۷]	۳.۸.۱
۲۵	تعریف (نشاندن)	۴.۸.۱
۲۶	قضیه (نامساوی سوبولف برای $p < n$ ) [۲۷]	۵.۸.۱
۲۶	قضیه (نشاندن سوبولف برای $p < n$ ) [۲۷]	۶.۸.۱
۲۶	قضیه (نشاندن سوبولف برای $p > n$ ) [۲۷]	۷.۸.۱

۲۷	شرایط پالایس-اسمل	۹.۱
۲۷	دنباله پالایس-اسمل [۷]	۱.۹.۱
۲۷	شرط پالایس-اسمل [۲۷]	۲.۹.۱
۲۷	قضیه مسیر کوهی بدون شرط پالایس-اسمل [۱۸]	۳.۹.۱

## ۲ نگاهی گذرا به اصل تغییراتی اکلند، معادل‌ها و کاربردهایی از

۲۹	آن	
۲۹	مقدمه	۱.۲
۳۰	تعاریف و مقدمات مورد نیاز	۲.۲
۳۰	تعریف	۱.۲.۲
۳۰	تعریف	۲.۲.۲
۳۰	تعریف	۳.۲.۲
۳۱	تعریف	۴.۲.۲
۳۱	تعریف	۵.۲.۲
۳۱	تعریف	۶.۲.۲
۳۱	شرط سرمی [۱۹]	۷.۲.۲
۳۲	اصل تغییراتی اکلند و معادل‌های آن	۳.۲
۳۲	قضیه (اصل تغییراتی اکلند)	۱.۳.۲

۲۳	.....	قضیه [۲۰]	۲.۳.۲
۳۳	.....	قضیه [۲۰]	۳.۳.۲
۳۴	.....	گزاره [۱۷]	۴.۳.۲
۳۴	.....	گزاره [۱۷]	۵.۳.۲
۳۵	.....	تعریف [۱۷]	۶.۳.۲
۳۵	.....	مثال [۱۷]	۷.۳.۲
۳۵	.....	نماد گذاری	۸.۳.۲
۳۵	.....	قضیه	۹.۳.۲
۳۶	.....	قضیه نقطه ثابت کاریستی [۲۲]	۱۰.۳.۲
۳۷	.....	قضیه [۲۲]	۱۱.۳.۲
۳۷	.....	کاربردهایی از اصل تغییراتی اکند	۴.۲
۳۸	.....	تعریف [۱۷]	۱.۴.۲
۳۸	.....	تذکر	۲.۴.۲
۳۸	.....	قضیه [۱۷]	۳.۴.۲
۳۹	.....	لم [۱۷]	۴.۴.۲
۳۹	.....	لم [۱۷]	۵.۴.۲
۳۹	.....	مثال [۱۷]	۶.۴.۲

### ۳ مسائل بیضوی منفرد فاقد فشردگی

۴۱	.....	مقدمه	۱.۳
----	-------	-------	-----

۴۲	..... تعاریف و قراردادها	۲.۳
۴۲	..... فقدان فشردگی	۱.۲.۳
۴۳	..... تعریف [۴]	۲.۲.۳
۴۳	..... نامساوی کافارلی-کوهن-نیرنبرگ [۴]	۳.۲.۳
۴۳	..... قرارداد	۴.۲.۳
۴۴	..... تعریف (فضای $(H_a^1(R^N))$ )	۵.۲.۳
۴۴	..... تذکر	۶.۲.۳
۴۴	..... تعریف (فضای $(L_b^p(\Omega))$ )	۷.۲.۳
۴۵	..... تعریف (فضای $(L_{b,loc}^p(\Omega))$ )	۸.۲.۳
۴۵	..... تعریف	۹.۲.۳
۴۵	..... ملاحظه [۴]	۱۰.۲.۳
۴۶	..... تعریف	۱۱.۲.۳
۴۶	..... نمادگذاری	۱۲.۲.۳
۴۶	..... نتایج کمکی	۳.۳
۴۶	..... قضیه	۱.۳.۳
۴۷	..... تذکر	۲.۳.۳
۴۷	..... گزاره	۳.۳.۳
۴۸	..... لم	۴.۳.۳
۴۹	..... لم	۵.۳.۳
۵۰	..... ملاحظه	۶.۳.۳
۵۰	..... لم	۷.۳.۳
۵۲	..... لم	۸.۳.۳

۵۵	بررسی وجود جواب برای معادله (۲.۱.۳)	۴.۳
۵۶	نمادگذاری	۱.۴.۳
۵۶	گزاره	۲.۴.۳
۵۹	گزاره	۳.۴.۳
۶۳	نمادگذاری	۴.۴.۳
۶۳	گزاره	۵.۴.۳

#### ۴ بررسی وجود جواب‌های مثبت چندگانه برای معادلات شامل

۶۸	نمای بحرانی سوپولف در $R^N$	
۶۸	مقدمه	۱.۴
۶۹	تعاریف و قراردادهای	۲.۴
۶۹	تعریف فضای $D^{1,m}(R^N)$ [۱۳]	۱.۲.۴
۷۰	تعریف	۲.۲.۴
۷۰	نمادگذاری	۳.۲.۴
۷۰	ملاحظه [۱۲]	۴.۲.۴
۷۱	نتایج اولیه	۳.۴
۷۱	قضیه	۱.۳.۴
۷۱	لم	۲.۳.۴

۷۵	..... لم	۳.۳.۴
۷۸	..... لم	۴.۳.۴
۸۱	..... بررسی وجود جواب مسئله (۱.۱.۴)	۴.۴
۸۱	..... قضیه	۱.۴.۴
۸۳	..... قضیه	۲.۴.۴

۸۷

A واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

## فصل ۱

# تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

### ۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان نموده و در ادامه مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت،  $LP$ ، سوپولف و قضایای مرتبط به آن‌ها خواهیم داشت. شایان ذکر است که تمامی مطالب این فصل از کتب و مقالات معتبر گردآوری شده است. (منابع ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۲ و ۳۵ را ملاحظه کنید).

### ۲.۱ مفاهیم مقدماتی

#### ۱.۲.۱ تعریف (توپولوژی)

یک توپولوژی در مجموعه  $X$  گردایه‌ای مانند  $\tau$  از زیرمجموعه‌های  $X$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱)  $X$  و  $\emptyset$  به  $\tau$  تعلق دارند.

(۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه  $\tau$  متعلق به  $\tau$  است.



(۳) اشتراک اعضای هر زیرگرایه متناهی  $\mathcal{T}$  به  $\mathcal{T}$  تعلق دارد.

مجموعه  $X$  به همراه توپولوژی  $\mathcal{T}$  موجود در  $X$  یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود که با نماد  $(X, \mathcal{T})$  نمایش داده می‌شود.

### ۲.۲.۱ تعریف (دامنه)

فرض کنیم  $R^n$  یک فضای اقلیدسی  $n$ -بعدی با نقاط  $(x_1, \dots, x_n)$  که  $x_i \in R$  و  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  باشد.  $\Omega \subset R^n$  را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

### ۳.۲.۱ تعریف (نقطه حدی، بستار، مرز)

نقطه  $x \in R^n$  را یک نقطه حدی  $\Omega$  گوییم، هرگاه برای هر  $r > 0$  داشته باشیم:

$$B_r^\circ(x) \cap \Omega \neq \emptyset$$

که در آن  $B_r^\circ(x)$  یک همسایگی محذوف به شعاع  $r$  و مرکز  $x$  می‌باشد.

مجموعه نقاط حدی  $\Omega$  را با  $\Omega'$  نشان می‌دهیم. بستار  $\Omega$  را که با  $\bar{\Omega}$  نشان می‌دهیم عبارت است از اجتماع نقاط  $\Omega$  و نقاط حدی آن، یعنی

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$$

همچنین مرز  $\Omega$  را که با  $\partial\Omega$  نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega^\circ$$

اگر  $\Omega = R^n$ ، آنگاه  $\partial\Omega = \emptyset$ .

### ۴.۲.۱ تعریف

مجموعه همه توابع پیوسته روی  $\Omega$  را با  $C(\Omega)$  نشان می‌دهیم. برای  $k \in \mathbb{N}$ ،  $C^k(\Omega)$  نشان دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه  $k$ —ام آن‌ها روی  $\Omega$  پیوسته است.  $C^\infty(\Omega)$  کلاس همه توابعی است که برای هر عدد طبیعی  $k$ ، متعلق به  $C^k(\Omega)$  باشد.  $C^k(\bar{\Omega})$  مجموعه توابعی در  $C^k(\Omega)$  است که تمام مشتقات نایبتر از  $k$  ی آن‌ها به‌طور پیوسته به  $\bar{\Omega}$  توسعه می‌یابند.

### ۵.۲.۱ تعریف

محمل یک تابع پیوسته  $f$  روی  $R^n$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Supp } f = \overline{\{x \in R^n : f(x) \neq 0\}} = K$$

یعنی برای هر  $x \in R^n$ ، اگر  $x \notin K$ ، آنگاه  $f(x) = 0$ . همان‌طور که می‌دانیم (طبق قضیه هاینه برل) مجموعه‌های بسته و کران‌دار در  $R^n$  فشرده می‌باشند، بنابراین اگر محمل  $f$  کران‌دار باشد می‌گوییم  $f$  دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته  $f$  که محمل فشرده دارند را با  $C_0(R^n)$  نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه  $C_0(\Omega)$  نشان دهنده توابع پیوسته روی  $\Omega$  می‌باشد که محمل آن‌ها یک زیرمجموعه فشرده از  $\Omega$  است. همچنین  $C_0^k(\Omega)$  نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

### ۶.۲.۱ تعریف (مجموعه محدب)

مجموعه  $E \subset R^n$  را محدب گویند، هرگاه به ازای هر  $x, y \in E$  و  $0 < t < 1$  داشته باشیم:

$$tx + (1 - t)y \in E.$$

## ۷.۲.۱ تعریف (تابع محدب)

تابع حقیقی تعریف شده در  $(a, b)$  را محدب گویند هرگاه  $x, y \in (a, b)$  و  $0 < t < 1$  آنگاه:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

## ۸.۲.۱ تعریف (تابع آزمون)

تابع  $f$ ، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  را یک تابع آزمون<sup>۱</sup> نامند، هرگاه  $f \in C^\infty(\Omega)$  و یک مجموعه فشرده مانند  $K \subset \Omega$  موجود باشد، به طوری که محمل  $f$  در  $K$  قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با  $C_0^\infty(\Omega)$  نشان می‌دهند.

## ۹.۲.۱ نمادگذاری

مجموعه همه توابعی که روی قلمرو  $\Omega$  تعریف شده و انتگرال لبگ‌شان متناهی باشد را با  $L^1(\Omega)$  نشان می‌دهیم اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال‌پذیر هستند، روبرو می‌شویم یعنی توابعی که روی هر زیرمجموعه فشرده از  $\Omega$  انتگرال‌پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود  $\Omega$  انتگرال‌پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با  $L_{loc}^1(\Omega)$  نشان می‌دهیم.

چون توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده مقدار بیشینه و کمینه خود را می‌گیرند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} C_0(\Omega) \subset L^1(\Omega) \\ C(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \end{cases}$$

<sup>۱</sup> Test function

## ۱۰.۲.۱ قضیه مقدار میانگین [۳۶]

اگر  $g: [a, b] \rightarrow R$  یک تابع انتگرال پذیر و  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای مانند  $c \in (a, b)$  وجود دارد به طوری که:

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

۱۱.۲.۱ تعریف (نماد  $(o(\cdot))$ ) [۲۷]

برای  $t > 0$  و یک عدد حقیقی  $p$  می‌گوییم  $f(t) = o(t^p)$ ، اگر و فقط اگر  $\frac{|f(t)|}{t^p} \rightarrow 0$  وقتی  $t \rightarrow 0$ . همچنین به طور مشابه برای  $t \rightarrow \infty$  می‌توان تعریف نمود.

## ۳.۱ فضاهاى باناخ و هیلبرت (حقیقی)

## ۱.۳.۱ تعریف (فضای خطی نرم‌دار، فضای باناخ)

فضای برداری  $X$  را یک «فضای خطی نرم‌دار» نامیم، هرگاه نرم روی  $X$  که با نگاشت

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\|: X \rightarrow R \\ x \rightarrow \|x\| \end{array} \right. \text{ معرفى مى‌شود دارای شرایط زیر باشد:}$$

(۱)  $\|x\| \geq 0$  برای هر  $x \in X$  و  $\|x\| = 0$  اگر و تنها اگر  $x = 0$ ،

$$(۲) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ برای هر } x \in X \text{ و هر } \alpha \in R,$$

$$(۳) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ برای هر } x, y \in X$$

یک فضای خطی  $X$ ، تحت متر تعریف شده در زیر یک فضای متریک می‌باشد:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad ; \quad \forall x, y \in X$$