دانشگاه مازندران

دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

نگاهی به اصل تغییراتی اکلند و کاربردهای آن در بررسی معادلات بیضوی فاقد فشردگی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر عبدالعلی نعمتی

نگارش :

مریم کوزه‌گر کالجی

شهریور ۱۳۸۷

University of Mazandaran
Faculty Of Basic Sciences

M. Sc. Thesis in

Pure Mathematics (Analysis)

Subject:

Study of Ekeland's variational principle and its applications on elliptic equations with lack of compactness

Supervisor:
Dr. M. Alimohammadi

Advisor:
Dr. A. Neamati

Author:
M. koozegar kaleji

Aug. 2008

تقدیم به پیشگاه مقدس

السبب المتصل بین الارض والسماء

آقا امام زمان (عج)

قدردانی

سپاس بیکران خداوندی را سزاست که آفریننده جهان هستی با همه شگفتی‌های آن است. لطف و کرم او را سپاس که با آزمونی دیگر فرصتی تازه فراهم ساخت که بزرگی و عظمت او در مقیاسی بس وصف‌ناپذیر، نگارنده را به بندگی و عبودیت بیشتر هدایت کند.

اکنون که به یاری حق تعالی این پایان‌نامه به سرانجام رسیده‌است، بر خود فرض می‌دانم تا از تمامی بزرگوارانی که در این راه یاری‌ام کردند قدردانی به عمل آورم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی، استاد راهنمای ارجمندم که درس امید، تلاش و نشاط به من آموختند، به پاس اندوخته‌هایی که در محضرشان کسب کردم و راهنمایی‌های بی دریغ و ارزنده‌شان سپاسگزارم و از درگاه ایزد منان برای ایشان بهروزی و پیروزی روزافزون خواستارم.

از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر عبدالعلی نعمتی که از کلاس‌های درسشان بهره برده‌ام، برای مشاوره ارزشمندشان متشکرم.

از اساتید گرانقدر مدعو جناب پروفسور قاسم علیزاده‌افروزی و جناب آقای دکتر ماشاألله متین‌فر قدردانی می‌کنم که زحمت مطالعه و تصحیح دقیق این پایان‌نامه را به عهده داشتند.

از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر یحیی طالبی به خاطر زحماتشان قدردانی می‌کنم و همچنین از تمامی اساتید بزرگوارم در دانشگاه مازندران که افتخار شاگردیشان را داشتم سپاسگزارم.

و بر خود واجب می‌دانم که از مادر فداکار و پدر بزرگوارم که بی‌ریاترین عشق دنیا را نثارم کردند قدردانی کنم و از تمامی کسانی که در آسمان زندگیم درخشیدند؛ برادرانم

که همواره مشوقم بودند و دوستان بسیار خوبم که سال‌های تحصیل مرا با خاطره دوستی‌ها درآمیختند.

چکیده

قضیه تغییراتی اکلند، بعد از اثباتش توسط شخص اکلند که به صورت کاملاً مجرد بیان شده بود و تا سال‌ها بعد از آن در باب معادل‌ها و کاربردش در آنالیز مجرد مورد مطالعه بود، اخیراً کاربردهای دیگری در شاخه‌های کاربردی نیز پیدا نموده‌است. در این تز مایلیم یکی از کاربردهای آن یعنی حل برخی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را مورد مطالعه قرار دهیم.

در ابتدا اصل تغییراتی اکلند و بعضی از معادل‌های آن را به‌صورت گذرا و صرفاً به شکل مرور تاریخی آن بیان می کنیم و سپس به معرفی چند معادله و چگونگی استفاده از این اصل در حل‌شان می پردازیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان نموده و در ادامه مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^p، سوبولف و قضایای مرتبط به آن‌ها خواهیم داشت. شایان ذکر است که تمامی مطالب این فصل از کتب و مقالات معتبر گردآوری شده است. (منابع ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۲ و ۳۵ را ملاحظه کنید).

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

۱.۲.۱ تعریف (توپولوژی)

یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) X و ϕ به τ تعلق دارند.

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ متعلق به τ است .

۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی τ به τ تعلق دارد.

مجموعه X به همراه توپولوژی τ موجود در X یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود که با نماد (X, τ) نمایش داده می‌شود.

۲.۲.۱ تعریف (دامنه)

فرض کنیم R^n یک فضای اقلیدسی $n-$بعدی با نقاط $(x_1, ..., x_n)$ که $x_i \in R$ و $\| x \|^2 = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2$ باشد. $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

۳.۲.۱ تعریف (نقطه حدی، بستار، مرز)

نقطه $x \in R^n$ را یک نقطه حدی Ω گوییم، هرگاه برای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B_r^\circ(x) \cap \Omega \neq \emptyset$$

که در آن $B_r^\circ(x)$ یک همسایگی محذوف به شعاع r و مرکز x می‌باشد.

مجموعه نقاط حدی Ω را با Ω' نشان می‌دهیم. بستار Ω را که با $\bar{\Omega}$ نشان می‌دهیم عبارت است از اجتماع نقاط Ω و نقاط حدی آن، یعنی

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$$

همچنین مرز Ω را که با $\partial\Omega$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega^\circ$$

اگر $\Omega = R^n$، آنگاه $\partial\Omega = \emptyset$.

۴.۲.۱ تعریف

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشان دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه k–ام آن‌ها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی است که برای هر عدد طبیعی k، متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. $C^k(\bar{\Omega})$ مجموعه توابعی در $C^k(\Omega)$ است که تمام مشتقات نابیشتر از k ی آن‌ها به‌طور پیوسته به $\bar{\Omega}$ توسیع می‌یابند.

۵.۲.۱ تعریف

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Suppf = \overline{\{x \in R^n : f(x) \neq o\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$، اگر $x \notin K$، آنگاه $f(x) = \circ$. همان‌طور که می‌دانیم (طبق قضیه هاینه برل) مجموعه‌های بسته و کران‌دار در R^n فشرده می‌باشند، بنابراین اگر محمل f کران‌دار باشد می‌گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_\circ(R^n)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه $C_\circ(\Omega)$ نشان دهنده توابع پیوسته روی Ω می‌باشد که محمل آن‌ها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است. همچنین $C^k_\circ(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

۶.۲.۱ تعریف (مجموعه محدب)

مجموعه $E \subset R^n$ را محدب گویند، هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و $\circ < t < ۱$ داشته باشیم:

$$tx + (۱ - t)y \in E.$$

۷.۲.۱ تعریف (تابع محدب)

تابع حقیقی تعریف شده در (a,b) را محدب گویند هرگاه $x,y \in (a,b)$ و $0 < t < 1$ آنگاه:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

۸.۲.۱ تعریف (تابع آزمون)

تابع f، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون [1] نامند، هرگاه $f \in C^{\infty}(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد، به‌طوری‌که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با $C_{\circ}^{\infty}(\Omega)$ نشان می‌دهند.

۹.۲.۱ نمادگذاری

مجموعه همه توابعی که روی قلمرو Ω تعریف شده و انتگرال لبگ‌شان متناهی باشد را با $L^1(\Omega)$ نشان می‌دهیم اغلب اوقات با توابعی که به‌طور موضعی انتگرال‌پذیر هستند، روبرو می‌شویم یعنی توابعی که روی هر زیرمجموعه فشرده از Ω انتگرال‌پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال‌پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L_{loc}^1(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

چون توابع پیوسته روی مجموعه های فشرده مقدار بیشینه و کمینه خود را می‌گیرند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} C_{\circ}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \\ C(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \end{cases}$$

[1] Test function

۱۰.۲.۱ قضیه مقدار میانگین [۳۶]

اگر $g : [a,b] \to R$ یک تابع انتگرال‌پذیر و f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

۱۱.۲.۱ تعریف (نماد $o(.)$) [۲۷]

برای $t > \circ$ و یک عدد حقیقی p می‌گوییم $f(t) = o(t^p)$، اگر و فقط اگر $\frac{|f(t)|}{t^p} \to \circ$ وقتی که $t \to \circ$.
همچنین به‌طور مشابه برای $t \to \infty$ می‌توان تعریف نمود.

۳.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت (حقیقی)

۱.۳.۱ تعریف (فضای خطی نرم‌دار، فضای باناخ)

فضای برداری X را یک « فضای خطی نرم‌دار » نامیم، هرگاه نرم روی X که با نگاشت $\left\{ \begin{array}{l} \| . \| : X \to R \\ x \to \| x \| \end{array} \right.$ معرفی می‌شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\| x \| \geq \circ$ برای هر $x \in X$ و $\| x \| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ برای هر $x, y \in X$

یک فضای خطی X، تحت متر تعریف شده در زیر یک فضای متریک می‌باشد:

$$d(x,y) = \| x - y \| \quad ; \quad \forall x,y \in X$$