بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین • الرحمن الرحیم • مالک یوم الدین • ایاک نعبد و ایاک نستعین • اهدنا الصراط المستقیم • صراط الذین انعمت علیهم • غیر المغضوب علیهم • و لا الضالین

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

حل عددی معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با روش Tau به وسیلهٔ تبدیل Ortiz و Samara

استاد راهنما:

آقای دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور:

آقای دکتر داوود رستمی

تدوین:

اعظم طاعتی لشمر زمخی

بهمن ماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان‌نامه خانم اعظم طاعتی لشمرزمخی دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در مورخ ۸۷/۱۱/۸ تحت عنوان « حل عددی معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با روش Tau به وسیله تبدیل Ortiz و Samara» در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت.

هیأت داوران:

۱ـ استاد راهنما: آقای دکتر سعید عباس‌بندی امضاء

۲ـ استاد مشاور: آقای دکتر داوود رستمی امضاء

۳ـعضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی: آقای دکتر شهنام جوادی امضاء

۴ـ عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی: آقای دکتر عبدالرحمن رازانی امضاء

۵ـ نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر محمداخویزادگان امضاء

تحصیلات تکمیلی
حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

تقدیم به

پدر

و

مادر

عزیزم

که هنوز فرصت جبران زحمات بی دریغشان را نیافته‌ام.

تقدیر و تشکر

شرح این گر من بگویم بر دوام
صد قیامت بگذرد و آن ناتمام
زانکه تاریخ قیامت را حد است
حد کی آنجا که عشق بی حد است . . .

از پروردگار مهربان متشکرم، به خاطر فرصتی که به من عطا کرده تا عمیق‌تر بیندیشم. به خاطر آشنایی با همه کسانی که راه را بر من روشن نموده‌اند.

واژه‌هایی که بتوانند احساس قلبی مرا بیان کنند، گم شده‌اند. می‌ترسم کلماتی برگزینم که نتوانند آنچه دلم می‌گوید، بیان کنند. این صفحه را نه از سر وظیفه، بلکه از سر عشق می‌نویسم.

من بسیار سعادتمند و خوش شانس بودم که علاوه برگذراندن دروس دانشگاهی با اساتید بزرگوار، جناب آقای **دکترسعیدعباس‌بندی** و آقای **دکتر داوود رستمی** ، در تنظیم این پایان‌نامه نیز به اندازه‌ی وسع خویش از دریای دانش، محبت و انسانیت ایشان بهره بردم. صمیمانه به خاطر همه‌ی محبت‌ها، دغدغه‌ها و روشنگری‌ها، از این عزیز سپاس‌گذاری می‌کنم. همچنین از اساتید محترم، آقایان **دکتر شهنام جوادی** و **دکتر رازانی** که داوری این پایان‌نامه را برعهده داشتند و با رهنمودهای خود، مرا در ارائه کاری بهتر یاری نموده‌اند، متشکرم. برایم بسیار دشوار است که تنها از استادان عزیز به ذکر نامی بسنده کنم. آن هم عزیزانی که چون جان دوستشان دارم. از زحمات بی‌دریغ آقایان **دکتر آسیابانان** و **دکتر شیرخورشیدی** و **دکتر عبادی** فروتنانه، قدردانی می‌کنم.

پدر، مادر و دو خواهرم، همواره مشوق من بودند. برایشان آرزوی توفیق و سربلندی می‌کنم.

در پایان برخود می‌دانم از سرکار خانم مهناز صمدیان ذکریا که زحمت حروف‌چینی و صفحه‌آرایی این پایان‌نامه را برعهده گرفتند، صمیمانه تشکر کنم.

در نیاید عشق در گفت و شنید   عشق دریایی، کرانه ناپدید . . .

چکیده

در این پایان‌نامه، ما از شیوه محاسباتی روش تاو برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با ضرایب تابع تحلیلی و شرایط مرزی یا اولیه استفاده می‌کنیم. و این کار را بدون خطی سازی جملات غیرخطی انجام می‌دهیم و یک برآورد خطا برای این روش معرفی می‌کنیم. بعلاوه تعدادی مثال برای توضیح کارایی و دقت مناسب روش ارائه می‌دهیم.

در این پایان‌نامه، ما از شیوه‌ی محاسباتی روش تاو برای حل دستگاه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با قسمت دیفرانیل غیر خطی استفاده می‌کنیم. یک برآورد کننده خطا برای این روش ارائه‌می کنیم . تعدادی مثال برای توضیح کارایی و دقت مناسب روش معرفی می کنیم .

واژه‌های کلیدی: شیوه محاسباتی روش تاو، معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیر خطی ولترا ، دستگاه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا.

پیش‌گفتار

در سال ۱۹۸۱ اورتیز[1] و سمرا[2] روش تاو را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی همراه با شرایط تکمیلی ارائه دادند. در سالهای اخیر کارهای قابل ملاحظه‌ای در توسعه این تکنیک به صورت تحلیل های نظری و کاربردهای آن به صورت عددی از جمله برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی استفاده شده است. در این پایان‌نامه از روش تاو برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا و دستگاه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با قسمت دیفرانسیل غیرخطی با شرایط تکمیلی بدون خطی سازی استفاده می‌کنیم. یکی از فواید روش تاو تبدیل قسمت انتگرال غیرخطی به فرم ماتریسی بدون خطی سازی است. بعد از تبدیل معادله انتگرال ـ دیفرانسیل و دستگاه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل به فرم ماتریسی به یک دستگاه غیرخطی می‌رسیم که باید حل شود. به این منظور، ابتدا در فصل اول مقدماتی برای درک مفاهیم فصل‌های بعدی بیان می‌شود. سپس در فصل دوم، به حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل می‌پردازیم و برخی از روشهای حل این گونه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم، حل عددی معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا به وسیله روش Tau تشریح می‌شود و در نهایت در فصل چهارم حل عددی دستگاه معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی ولترا با قسمت دیفرانسیل غیرخطی به وسیله روش Tau بیان می‌شود.

این پایان‌نامه در واقع تشریح مقاله‌ای است تحت عنوان زیر[7]:

G. Ebadi, M. Y. Rahimi-Ardabili and S. Shahmorad, Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-differential equations by the Tau method, Appl. Math. Comput. 188(2007) 1580-1586.

1) Ortiz 2) Samara

فهرست مطالب

فهرست جداول و نمودارها

فصل اول

مقدماتی بر مفاهیم معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل، مروری بر مفاهیم پایه‌ای معادلات انتگرال می‌شود. در بخش ۲.۱ تعریف معادله انتگرال بیان می‌شود. در بخش ۳.۱ معادلات انتگرال تقسیم بندی و انواع آن توضیح داده می‌شود. در بخش ۴.۱ تعریفی از معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ارائه می‌شود. در بخش ۵.۱ منشأ ظهور معادلات انتگرال و انتگرال ـ دیفرانسیل ارائه می‌شود. در بخش ۶.۱ جواب معادله انتگرال توضیح داده می‌شود. در بخش ۷.۱ روش تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی بیان می‌شود و در پایان در بخش ۸.۱ روش تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا بیان می‌شود.

۲.۱ معادله انتگرال

۱.۲.۱ تعریف. یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $y(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)y(t)dt \qquad c \le x \le d \tag{۱-۱}$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

توجه: این فصل براساس مطالب فصل اول مرجع [20] نوشته شده است.

۳.۱ تقسیم‌بندی معادلات انتگرال

۱.۳.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرالگیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a \le x \le b \tag{۲-۱}$$

که در آن هسته معادله انتگرال $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد. معادله (۱-۲)را خطی می‌گویند زیرا تابع مجهول $y(x)$ زیرعلامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است یعنی توان $y(x)$ یک است. بر حسب این که $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال خطی فرد هلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱) زمانی که $\phi(x) = 0$، معادله (۱-۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = 0 \qquad a \le x \le b \tag{۱-۳}$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲) زمانی که $\phi(x) = 1$، معادله (۱-۲) به شکل زیر درخواهد آمد.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a \le x \le b \tag{۱-۴}$$

به این معادله، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

توجه: در حقیقت معادله (۱-۴)را می‌توان از معادله (۱-۲) با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ به شرط $\phi(x) \neq 0$ به دست آورد.

۱.۳.۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری به جای این که یک عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، به فرم زیر است:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad a \le x \le b \tag{۱-۵}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $y(x)$ زیرعلامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.

باید توجه کرد که (۱-۵) را می‌توان به عنوان حالت خاصی از معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت، به این صورت که اگر هسته $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود آنگاه (۱-۲) به (۱-۵) تبدیل می‌شود.

معادلات انتگرال ولترا را نیز می‌توان با توجه به مقادیر $\phi(x)$ به دو دسته تقسیم کرد.

۱) در حالتی که $\phi(x) = 0$ معادله (۱-۵) به معادله

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt = 0 \qquad a \leq x \leq b \qquad (۱-۶)$$

تبدیل خواهد شد که آن را معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

۲) اگر $\phi(x) = 1$ آنگاه (۱-۵) به شکل

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad a \leq x \leq b \qquad (۱-۷)$$

درخواهد آمد. این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌نامند.

با توجه به معادلات (۱-۲) تا (۱-۷) می‌توانیم نکات زیر را داشته باشیم.

۱. ساختمان معادلات فردهلم و ولترا

در معادلات انتگرال خطی فرد هلم و ولترای نوع اول، تابع مجهول فقط در زیرعلامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود. اما در معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترای نوع دوم، تابع مجهول هم در زیرعلامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

۲. حدود انتگرالگیری

در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرالگیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود. اما در معادلات انتگرال ولترا، حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولاً همان حد بالای انتگرالگیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

۳. خاصیت خطی

همان طور که قبلاً هم گفته شد در معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترا تابع مجهول $y(x)$ در زیرعلامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شود. اگر به جای $y(x)$ عبارتی نظیر $F(y(x))$ که تابعی غیرخطی برحسب $y(x)$ است، ظاهر شود، معادلات انتگرال موردنظر، معادلات انتگرال غیرخطی فرد

هلم یا ولترا نامیده می‌شود. معادلات زیر مثالهایی از معادلات انتگرال غیرخطی هستند:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^{x} k(x,t) y^{۲}(t) dt$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^{x} k(x,t) e^{y(t)} dt$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^{۱} k(x,t) \sin(y(t)) dt$$

در این مثالها در مقایسه با معادلات (۱-۴) و (۱-۷)به جای $y(t)$ به ترتیب $y^{۲}(t)$، $e^{y(t)}$ و $\sin(y(t))$ ظاهر شده است.

۴. خاصیت همگن

اگر در معادلات انتگرال نوع دوم (۱-۴) و (۱-۷)، شرط $f(x) = \circ$ برقرار باشد، آنگاه معادلهٔ حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامند. در غیر این صورت معادله موردنظر را یک معادله غیرهمگن می‌گویند.

۳.۳.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) y(t) dt \tag{۱-۸}$$

یا نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) y(t) dt \tag{۱-۹}$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو این حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال (۱-۸) یا (۱-۹)در یک نقطه یا نقاط بیشتری از دامنهٔ انتگرال‌گیری نامتناهی باشد باز هم این گونه معادلات را، معادلات انتگرال منفرد می‌نامند. در زیر چند مثال

از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد بودن آنها نامتناهی بودن حدود انتگرال‌گیری می‌باشد.

$$y(x) = ۲x + ۶\int_{۰}^{\infty} \sin(x-t)y(t)dt$$
$$y(x) = x + \frac{۱}{۳}\int_{-\infty}^{۰} \cos(x+t)y(t)dt$$
$$y(x) = ۱ + x^{۲} + \frac{۱}{۶}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+t)y(t)dt$$

معادلات زیر نیز مثالهایی از معادلات انتگرال منفرد هستند. در این مثالها هسته $k(x,t)$ وقتی که $x \longrightarrow t$ نامتناهی می‌شود، لذا، این معادلات انتگرال را منفرد می‌نامند.

$$x^{۲} = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} y(t)dt \qquad (۱۰\text{-}۱)$$
$$x = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-t)^{\alpha}} y(t)dt \quad ۰ < \alpha < ۱ \qquad (۱۱\text{-}۱)$$
$$y(x) = ۱ - ۲\sqrt{x} - \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} y(t)dt \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

به این نکته مهم باید توجه کرد که معادلات انتگرال شبیه (۱-۱۰)و (۱-۱۱)را به ترتیب معادله انتگرال آبل و معادله انتگرال آبل تعمیم‌یافته می‌نامند. این معادلات اولین بار توسط یک ریاضیدان نروژی به نام آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی شدند.

معادلات انتگرال مشابه معادله (۱-۱۲) را، معادله انتگرال ولترای نوع دوم منفرد به طور ضعیف می‌نامند. این گونه معادلات درکاربردهای مهندسی، فیزیک، نظیر انتقال گرما، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند.

۴.۱ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل

ولترا در اوایل ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل مواجه شد.

در این گونه معادلات تابع مجهول $y(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف زیرعلامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی، تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله انتگرال به یک معادله دیفرانسیل هم نمایان می‌گردند.

لازم به ذکر است که دسته‌بندی معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل همانند دسته‌بندی معادلات انتگرال می‌باشد و نیازی به توضیح مجدد نمی‌باشد.

مثالهای زیر نمونه‌هایی از انواع معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل می‌باشند.

$$y''(x) = -x + \int_{۰}^{x} (x-t)y(t)dt \qquad y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱ \tag{۱-۱۳}$$

$$y'(x) = -\sin x - ۱ - \int_{۰}^{x} y(t)dt \qquad y(۰) = ۱ \tag{۱-۱۴}$$

$$y'(x) = ۱ - \frac{۱}{۳}x + \int_{۰}^{۱} xty(t)dt \qquad y(۰) = ۱ \tag{۱-۱۵}$$

معادلات (۱-۱۳)و (۱-۱۴) معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی ولترا و معادله (۱-۱۵) یک معادله انتگرال ـ دیفرانسیل خطی فرد هلم است. این تقسیم‌بندی براساس حدود انتگرال‌گیری انجام شده است. در فصل دوم در مورد روشهای حل این گونه معادلات صحبت خواهیم کرد.

۵.۱ منشاء ظهور معادلات انتگرال و انتگرال ـ دیفرانسیل

معادلات انتگرال و انتگرال ـ دیفرانسیل در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند([1]، [10] و [12]). البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل موردنظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فرد هلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل موردنظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

برحسب این که معادله انتگرال از چه نوع مسأله‌ای ظاهر می‌شود، تکنیکها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب آنها به کار برده می‌شود.

در مثال زیر دربارهٔ نحوه تبدیل یک مساله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال می‌پردازیم.

مثال ۱. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y'(x) = 2xy(x) \qquad x \geq 0 \tag{۱-۱۶}$$

با شرط اولیه

$$y(0) = 1 \tag{۱-۱۷}$$

معادله (۱-۱۶)را می‌توان به سادگی با به کار بردن ایده جدا کردن متغیرها حل کرد. جواب معادله دیفرانسیل (۱-۱۶)با توجه به شرط (۱-۱۷) به صورت زیر خواهد بود.

$$y(x) = e^{x^2} \tag{۱-۱۸}$$

اما اگر از طرفین رابطه (۱-۱۶) نسبت به x از 0 تا x انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x 2ty(t)dt \tag{۱-۱۹}$$