دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

معادلات انتگرال و استفاده از آن در حل معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما:

دکتر محمد تقی خداداد

استاد مشاور:

دکتر سید ابوالفضل علوی

نگارش:

نیره پاکدل

مهر ماه ۸۹

به پاس حق ناز پروردگی

تقدیم به

عزیز ترین سرمایه‌های زندگی پدر و مادر و همسر مهربانم که همیشه وفادار و یاریگر در کنارم بوده و خواهد بود و برادران عزیزم که راهنمایی‌هایشان همواره روشنگر راه آینده‌ام بوده و هست.

تقدیر و تشکر

خداوندا تو را به نامت می‌خوانم. ای آغاز، ای انجام، ای یگانه، ای بی نیاز، ای پایان ناپذیر، ای تو همه ستایش و آفرین، همه سرفرازی و شکوه، همه بزرگی و بلند پایگی. ای آن که از هر مهربانی، مهربان‌تری، والاترین، برترین و کامل‌ترین سپاس‌ها به آستان سراسر جلال و جبروتت که توفیق بندگی و زندگی را نصیب ما فرمودی و به راه ایمان و دانش رهنمونمان کردی.

اکنون که به فضل خداوند متعال به واسطهٔ نگارش این پایان نامه، فرصتی برای سپاسگزاری اینجانب فراهم شده، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و همکاری صمیمانه استاد راهنمای فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر محمد تقی خداداد و استاد مشاور گرامی‌ام جناب آقای دکتر سید ابوالفضل علوی که با راهنمایی‌هایشان چراغ راهم بودند و با بیان نکات ارزشمندی این پایان نامه را به سامان آوردند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از کلیهٔ اساتید این دوره آقایان دکتر عبداله قلی زاده، دکتر امین رفیعی، دکتر علی اکبر عارفی جمال، دکتر مهدی زعفرانیه کمال تشکر را دارم. در پایان از همه عزیزانی که به نوعی در تکمیل پایان نامه مرا یاری رساندند تشکر می‌کنم.

نیره پاکدل

پاییز ۱۳۸۹

چکیده

نظریهٔ معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات کاربردی است که اصولاً اهمیت آن از لحاظ مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است [۱۱]. معادلات انتگرال در خیلی از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند و تعدادی از مسائل مهندسی و مکانیک را می‌توان به این نوع معادلات تبدیل کرد [۱۵,۱۲]. برای مثال ، معمولاً معادلات انتگرال در محاسبات فیزیک پلاسما مورد استفاده قرار می گیرند.

در این پایان نامه روش‌هایی برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال و دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا و فردهلم ارائه می‌شود. مقایسه نتایج این روش‌ها با روش‌های عددی موجود مزایای استفاده از این روش‌های جدید را بیشتر نشان می‌دهد.

در فصل اول، به ارائه تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در پایان نامه می‌پردازیم. در فصل دوم معادلات انتگرال ولترا و دستگاه معالات انتگرال فردهلم و ولترا را به روش سری تیلور حل می‌کنیم. در فصل سوم، معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه (مرزی) را به معادلات انتگرال ولترا (فردهلم) تبدیل نموده و سپس معادلات انتگرال حاصل را با روش سری تیلور حل می‌کنیم. در فصل چهارم معادلات دیفرانسیل ریکاتی را به معادلات انتگرال ولترا تبدیل نموده و مشابه فصل سوم، معادله ولترا را به کمک روش سری تیلور حل می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه و تاریخچه

اولین بار، اصطلاح معادلهٔ انتگرال در سال ۱۸۸۸ توسط بویس ریماند[۱] پیشنهاد شد. البته قبل از وی، لاپلاس[۲] در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی برای تابع f به صورت $F(s) = \int_0^\infty e^{st} f(t)dt$ ارائه داد. به این ترتیب لاپلاس آغاز کننده نظریهٔ معادلات انتگرال بوده است. در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه[۳] در سال ۱۸۱۱ روی نظریهٔ حرارت کار کرد و مقالاتی از خود برجای گذاشت. آبل[۴] نیز در سال ۱۸۲۳در مسئله خود که به مسئله مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال ۱۸۲۶پواسون[۵] در نظریهٔ مغناطیس خود، نوعی معادله

---

[۱] $Du\ Bois\ Reymond$

[۲] $Laplace$

[۳] $Fourier$

[۴] $Abel$

[۵] $Poisson$

انتگرال به صورت $u(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^{x} k(x,y)u(y)dy$ مطرح نمود که با بسط $u(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ موفق به حل این معادله شد. در سال ۱۸۲۳ لیوویل [۶] بدون آگاهی از کار آبل معادله انتگرالی به نام خودش معرفی کرد. یک قدم مهم در راه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد وآن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود اولین بار توسط هیلبرت [۷] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم‌های زیر مطرح بود و هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند :

$$f(x) = \int_{\circ}^{x} k(x,y)u(y)dy, \qquad u(x) = f(x) + \int_{\circ}^{x} k(x,y)u(y)dy$$

که در آن k و f توابعی معلوم و u تابعی مجهول است. پوانکاره[۸] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال زیر را که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی (حرکت موج) $\nabla u + \lambda u = f(x,y)$ می‌باشد، بدست آورد که در آن $\nabla = \frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}$:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,y)u(y)dy.$$

ولترا[۹] اولین کسی بود که در اواخر قرن نوزدهم نظریهٔ عمومی معادله انتگرال را ارائه داد و با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی انتگرال ردهٔ مهمی از معادلات را ایجاد نمود که به نام خود وی نام گذاری شد [۲۹]. لذا صورت کلی معادله انتگرال ولترا چنین است :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x,t)u(t)dt.$$

در حدود سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم[۱۰] جهت حل مسئله دیریکله[۱۱] از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد [۱۴]. معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر

[۶] *Lioville*

[۷] *Hilbert*

[۸] *H.Poincare*

[۹] *Vito Voltrra*

[۱۰] *Erik Ivan Fredholm*

[۱۱] *Dirichlet*

می‌باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

ارائه یک سمینار توسط اریک هولمگر[۱۲] در سال ۱۹۰۱ برروی کارهای فردهلم، علاقهٔ هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت. یکی از کارهای مهم هیلبرت، فرموله کردن مسئله معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی به صورت معادلهٔ انتگرال است. معادله انتگرال در علومی چون فیزیک، مکانیک، ارتعاش، نیروگاه‌های هسته‌ای، کنترل و ... کاربرد دارد. روش‌های کلاسیک و عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است. از میان فعالیت‌های زیادی که در این زمینه صورت گرفته است می‌توان به کارهای فیلیپس[۱۳] و نیناخوف[۱۴] اشاره کرد.

۱—۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱—۲.۱ : اگر x_1، ...، x_p سطر (ستون) های ماتریس A باشند، آنگاه می گوییم x_1، ...، x_p مستقل خطی‌اند اگر

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_px_p = 0 \implies c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0.$$

اگر x_1، ...، x_p مستقل خطی نباشند، می گوییم وابسته خطی هستند.

تعریف ۱—۲.۲ : منظور از ترانهاده ماتریس A که آن را با A^T نشان می‌دهند، ماتریسی است که برای مشخص کردن آن کافی است جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض کنیم. طبیعی است که اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه A^T یک ماتریس $n \times m$ می‌باشد.

[۱۲] $Erick\ Holmger$

[۱۳] $Philips$

[۱۴] $Ninakhof$

تعریف ۱—۳.۲ : اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $n\times n$ باشد، ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام A را با $\tilde{A}$ نمایش می‌دهیم و $\tilde{A}$ را کهاد ij ام A می‌نامیم و $\triangle_{ij}=(-1)^{i+j}det\tilde{A}$ را همسازه a_{ij} می‌نامیم.

تعریف ۱—۴.۲ : یک دستگاه معادلات خطی به شکل کلی زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

یا با نماد ماتریس به صورت

$Ax=b$

می باشد که در آن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱—۵.۲ : فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد به طوری که $lim_{x\to 0}f(x)=L$ و $g(x)$ تابع دیگری باشد به طوری که به ازای K مثبتی و برای همه مقادیر به قدر کافی کوچک x که $|x|>0$ داشته باشیم:

$$\frac{f(x)-L}{g(x)}\leq K$$

در این صورت می‌نویسیم $f(x)=L+O(g(x))$ و گفته می‌شود که $f(x)-L$ از مرتبه $g(x)$ است. در حالت خاص که $lim_{x\to 0}f(x)=L$ و $g(x)=x^p$ می‌نویسیم $f(x)=O(x^p)$، هر گاه Kی مثبتی باشد به طوری که برای همه مقادیر به قدر کافی کوچک x و $|x|>0$،

$$|f(x)|\leq K|x^p|.$$

تعریف ۱—۲.۶ : فرض کنید f تابعی باشد که در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد. وقتی $x \to 0$، می‌نویسیم

$$f(x) = o(x^n)$$

هرگاه

$$lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

یعنی وقتی $x \to 0$، $|f(x)|$ سریع تر از $|x|^n$ به سمت صفر میل می‌کند.

تعریف ۱—۲.۷ : دلتای کرونکر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۱—۲.۸ : معادلهٔ

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

که رابطه‌ای است بین متغیر مستقل x، تابع $y(x)$ و n مشتق اول آن را، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n می‌نامیم. معمولاً معادله دیفرانسیل معمولی را با علامت اختصاری ODE نشان می‌دهند.

تعریف ۱—۲.۹ : منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی در بازه $\alpha < x < \beta$ تابعی مانند $y = \phi(x)$ است به طوری که $\phi'(x)$، $\phi''(x)$، ...، $\phi^{(n)}(x)$ در این بازه موجود و این تابع در معادله (۱.۱) صدق کند، یعنی:

$$F(x, \phi, \phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}) = 0$$

تعریف ۱—۲.۱۰ : درجه یک معادله دیفرانسیل که بتوان آن معادله را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب تابع مجهول و مشتقات آن نوشت، عبارت است از توان بزرگترین مرتبه مشتق موجود در معادله.

تعریف ۱–۱۱.۲ : شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n به صورت زیر است:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (۲.۱)$$

که در آن ضرایب $a_i(x)$، $i=0,1,\ldots,n$ و $g(x)$ توابعی از x هستند و می‌توانند ثابت باشند. هر معادله دیفرانسیل که به صورت بالا نباشد، غیر خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۱–۱۲.۲ : گوییم تابع $f: I\subseteq R\to R$ از ردهٔ C^k است، هرگاه f، f'، ...، $f^{(k)}$ روی I موجود و پیوسته باشند. اگر تابعی دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه‌ای باشد گوییم از ردهٔ c^∞ است.

تعریف ۱–۱۳.۲ : یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. فرم کلی یک معادله انتگرال خطی که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$g(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_\Omega k(x,t)u(t)dt. \qquad (۳.۱)$$

$k(x,t)$ هستهٔ معادله انتگرال نامیده می‌شود. هستهٔ معادله و توابع $g(x)$ و $f(x)$ از قبل معلوم هستند. λ پارامتری است حقیقی یا مختلط که در حالت خاص می‌تواند یک باشد و برای مسائل کاربردی وارد رابطه می‌شود و Ω بازهٔ انتگرال گیری است. در معادلهٔ (۳.۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. اگر تابع مجهول $u(t)$ زیر علامت انتگرال خطی باشد، یعنی توان یک داشته باشد، معادله انتگرال را خطی می‌گویند. اما اگر تابع $u(t)$ غیر خطی باشد، آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی می‌گویند. هدف ما تعیین تابع مجهول $u(x)$ است که در رابطهٔ (۳.۱) صدق کند. برای این کار روش‌های مختلفی وجود دارد که تعدادی از آن‌ها در فصل‌های بعدی معرفی خواهند شد.

۱—۳ تقسیم بندی معادلات انتگرال خطی

متداول ترین معادلات انتگرال خطی را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود. اما در این رساله سه نوع معادلات انتگرال خطی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۱—معادلات انتگرال فردهلم

۲—معادلات انتگرال ولترا

۳—معادلات انتگرال منفرد

اکنون تعاریف و خواص عمده هر نوع را بررسی می کنیم.

۱—۴ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آن‌ها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad a \leq x,t \leq b \tag{۴.۱}$$

که در آن هستهٔ معادله انتگرال $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.

معادلهٔ (۴.۱) را خطی می‌گویند، زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است، یعنی توان $u(x)$ یک است. بر حسب این که $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب می‌کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده زیر تقسیم می‌شوند:

۱—زمانی که $\phi(x) = 0$، معادلهٔ (۴.۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \tag{۵.۱}$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲—زمانی که $\phi(x) = ۱$، معادلهٔ (۴.۱) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = u(x) \qquad (۶.۱)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامند.

۱—۵ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل کلی معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آن‌ها حد بالا و پایین انتگرال گیری به جای این که عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، به فرم زیر می‌باشد.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۷.۱)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.

باید توجه کرد که (۷.۱) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوری که هستهٔ $k(x,t)$ برای $t \geq x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته بندی نمود.

۱—در حالتی که $\phi(x) = ۰$، معادله (۷.۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = ۰ \qquad (۸.۱)$$

این معادله را، معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

۲—زمانی که $\phi(x) = ۱$، آنگاه معادله (۷.۱) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = u(x) \qquad (۹.۱)$$

این را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

۱—۶ معادلات انتگرال منفرد

یک معادله انتگرال را منفرد گویند اگر حداقل یکی از حدود انتگرال گیری نامتناهی باشد یا این که هستهٔ $k(x,t)$ در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از بازهٔ انتگرال گیری نامتناهی باشد. معادلات انتگرال منفرد و روش حل آن ها در فصل (۲) مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۱—۷ جواب یک معادله انتگرال

جواب یک معادله انتگرال روی فاصلهٔ انتگرال گیری یک تابع $u(x)$ است به طوری که آن تابع در معادلهٔ داده شده صدق کند. به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جایگذاری شود و در نتیجه دو طرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند، آنگاه $u(x)$ جواب معادله می‌باشد.
قاعده لیب نیتز: برای مشتق گرفتن از $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt$ نسبت به x، قاعده لیب نیتز به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx} - G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x}dt \qquad (۱۰.۱)$$

فرمول: در انتهای این بخش یک فرمول که انتگرال‌های چندگانه را به یک انتگرال یک گانه تبدیل می کند یادآور می‌شویم:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt. \qquad (۱۱.۱)$$

این یک فرمول اساسی و مفید است و در روشی که برای انجام تکنیک های تبدیلی ارائه می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا دو رابطهٔ زیر را که حالت خاص فرمول بالا هستند و به ترتیب جهت تبدیل انتگرال‌های دو گانه و سه گانه به یک انتگرال یک گانه به کار می‌روند را یادآور می‌شویم.

$$\int_0^x \int_0^x f(t)dtdt = \int_0^x (x-t)f(t)dt \qquad (۱۲.۱)$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x f(t)dtdtdt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt \qquad (۱۳.۱)$$

اکنون به اثبات فرمول (۱۲.۱) می پردازیم که یک انتگرال دو گانه را به یک انتگرال یک گانه تبدیل می‌کند. با توجه به این که طرف راست معادله (۱۲.۱) تابعی از x می‌باشد، آن را با $I(x)$ نشان می‌دهیم یعنی :

$$I(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt \tag{۱۴.۱}$$

با مشتق گرفتن از طرفین معادلهٔ فوق و استفاده از قاعدهٔ لیب نیتز داریم:

$$I'(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{۱۵.۱}$$

با انتگرال گیری از دو طرف رابطهٔ فوق و توجه به این که طبق رابطهٔ (۱۴.۱) می‌توان نتیجه گرفت که $I(0) = 0$، خواهیم داشت:

$$I(x) = \int_0^x \int_0^x f(t)dtdt \tag{۱۶.۱}$$

با برابر قرار دادن طرف های راست معادلات (۱۴.۱) و (۱۶.۱) نتیجهٔ لازم بدست می آید و اثبات تمام می‌شود [۳۱].

فصل ۲

حل دستگاه معادلات انتگرال و معادلات انتگرال ولترا نوع دوم توسط روش سری تیلور

۲–۱ مقدمه

در بخش‌های اول و دوم این فصل، یک روش بسط سری تیلور را برای دستگاه‌های معادلات انتگرال فردهلم و ولترا نوع دوم ارائه می‌دهیم. این روش ابتدا توسط رن[۱] [۲۵] برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه شد و سپس، مالک نژاد [۱۹] آن را برای حل معادلات انتگرال ولترا نوع دوم ارائه داد. این روش دستگاه معادلات انتگرال را به یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل

[۱] Ren

معمولی تبدیل می‌کند که می‌تواند به آسانی به طور تحلیلی یا عددی حل شود.

در بخش بعدی این فصل، روش بسط سری تیلور را برای یک رده از معادلات انتگرال ولترا نوع دوم با هستهٔ هموار یا هستهٔ به طور ضعیف منفرد به کار می‌بریم. این روش، معادله انتگرال را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ام تبدیل می‌کند و یک تقریب ساده نزدیک به جواب را برای معادله انتگرال بدست می‌دهد. سرانجام، کارایی این روش را با حل مثال‌های عددی نشان می‌دهیم.

۲—۲ حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم

دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \phi_1(x) = g_1(x) + \int_0^1 k_{11}(x,t)\phi_1(t)dt + \ldots + \int_0^1 k_{1n}(x,t)\phi_n(t)dt \\ \phi_2(x) = g_2(x) + \int_0^1 k_{21}(x,t)\phi_1(t)dt + \ldots + \int_0^1 k_{2n}(x,t)\phi_n(t)dt \\ \vdots \\ \phi_n(x) = g_n(x) + \int_0^1 k_{n1}(x,t)\phi_1(t)dt + \ldots + \int_0^1 k_{nn}(x,t)\phi_n(t)dt \end{cases}$$

می‌توان این دستگاه را به فرم زیر نیز نوشت:

$$\Phi(x) = G(x) + \int_0^1 K(x,t)\Phi(t)dt \qquad 0 \le x \le 1 \tag{۱.۲}$$

که

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)]^T$$

$$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)]^T$$

$$K(x,t) = [k_{ij}(x,t)] \qquad i,j = 1, 2, \ldots, n.$$

در معادلهٔ (۱.۲) توابع K و G داده شده اند و Φ جواب است که باید تعیین شود [۸,۳]. فرض می‌کنیم که (۱.۲) یک جواب یکتا دارد. معادلهٔ (i) ام (۱.۲) را در نظر بگیرید: