بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-جبر

عنوان:

گروه‌های هموار

استاد راهنما: دکتر سید محمد انوریه

استاد مشاور: دکتر سعید علیخانی

پژوهش و نگارش:

لیلا مسعودی

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

و

دوستان دلسوز و مهربانم

سپاس‌گزاری

اینک که به لطف و یاری خداوند بزرگ و مهربان، این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، برخود لازم می‌بینم تا از کلیه‌ی کسانی که مرا در این مدت یاری نمودند تقدیر و تشکر کنم.

ابتدا، خداوند متعال را بسیار سپاس‌گزارم که این توان و همت را در من به‌وجود آورد تا بتوانم کلیه‌ی مشکلات را پشت سر بگذرانم و کاری را به سرانجام برسانم.

بعد از حمد و ستایش پروردگار از زحمات استاد راهنمای ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر انوریه که راهنمایی این اثر را بزرگوارانه پذیرفتند و با صبر و تحمل این حقیر را راهنمایی نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از زحمات و راهنمایی استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر علیخانی که دلسوزانه مشاور این تحقیق را پذیرفتند و راهگشای بسیاری از مشکلات بنده بودند کمال تقدیر و تشکر را دارم. در آخر از تمام کسانی که در این مدت با بنده همکاری نمودند و به نوعی در به سرانجام رساندن این اثر ناقابل سهیم بودند تشکر می‌کنم.

همتم بدرقه‌ی راه کن ای طایر قدس   که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

چکیده

در این پایان‌نامه، با استفاده از مفاهیم تساوی فازی و تابع فازی، مفهوم عمل‌گر هموار تعریف می‌شود. سپس یک ساختار جبری به نام گروه هموار تعریف شده و ویژگی‌های اساسی این ساختار بررسی می‌شود. همچنین مفاهیمی مثل زیرگروه و همریختی هموار تعریف شده و ویژگی‌های اساسی آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در پایان زیرگروه تولید شده توسط یک زیرمجموعه‌ی معمولی از یک گروه هموار مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: عمل‌گر هموار، گروه هموار، زیرگروه هموار، همریختی هموار، هم‌ترازی فازی، قانون شرکت‌پذیری تعمیم‌یافته.

فهرست مطالب

مقدمه و تاریخچه

مجموعه‌ی معمولی گردایه‌ای از اشیاء است که درجه‌ی عضویت عناصر متعلق به آن را یک و درجه‌ی عضویت عناصری که متعلق به آن نیستند را صفر در نظر می‌گیریم. اما در واقعیت با گردایه‌ای از اشیاء مواجه می‌شویم که به طور قطع و یقین نمی‌توان تنها با دو عدد صفر و یک، عضویت یا عدم عضویت آن‌ها را در این گردایه مشخص کرد. زاده [۱] در سال ۱۹۶۵ با معرفی مجموعه‌های فازی و قرار دادن بازه‌ی $[0,1]$ به عنوان درجه‌ی عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی معمولی این مشکل را تا حدی برطرف کرد و روزنه‌ی جدیدی به روی دانشمندان به ویژه ریاضی‌دانان گشود [۲۰].

جایگزینی منطق تقریباً درست به جای منطق درست یا غلط که به واقعیت نزدیک‌تر است، دانشمندان علوم مختلف را تشویق کرد تا مباحث گوناگون را با منطق و دیدگاه فازی دوباره بررسی کنند. دانشمندان علوم پایه به ویژه ریاضی‌دانان به‌خصوص جبریست‌ها نیز از این دسته بودند. روزنفلد[۲] با معرفی گروه‌های فازی شروع کننده‌ی نگاه فازی به ساختارهای جبری بوده است [۱۵]. هر چند هنوز هم شیوه‌ی این دانشمند مورد توجه اکثر ریاضی‌دانان است اما آن‌چه دمیرکی در این‌جا بیان می‌کند، متفاوت از شیوه‌ی او است. در شیوه‌ی روزنفلد زیرمجموعه‌های فازی یک گروه معمولی به گونه‌ای درنظر گرفته می‌شوند که دارای ویژگی‌های یک گروه باشند. در این پایان‌نامه، به گوشه‌ی کوچکی از کارهای یکی از دانشمندان عرصه‌ی فازی به نام دمیرکی [۳] اشاره می‌کنیم. دمیرکی بر خلاف روزنفلد با تعریف عمل‌گر فازی ساختاری جدید به نام گروه هموار ارائه کرد. سوستاک [۴] در سال ۱۹۸۵ شمول

---

[۱] Zadeh

[۲] Rosenfeld

[۳] Demirci

[۴] Sostak

شکل ۱: آقای دمیرکی

و تساوی دو زیرمجموعه‌ی فازی را تعریف کرد [۱۷]. ساساکی [5] نیز در سال ۱۹۹۳ تساوی فازی روی یک مجموعه را تعریف کرد [۱۶]. دمیرکی با بررسی و مقایسه‌ی این تعاریف به تناقضاتی رسید، وی تلاش کرد تا این تعاریف را به گونه‌ای اصلاح کند که تعمیمی از مفاهیم معمولی باشند و در ضمن با یکدیگر نیز متناسب باشند [۶]. تعریف تابع فازی نسبت به تساوی فازی مقدمه‌ی تعریف عمل‌گر فازی هموار و گروه هموار شد [۷] که در فصل اول به آن می‌پردازیم. در فصل دوم با بیان ویژگی‌های اساسی یک گروه هموار به مقایسه‌ی این ساختار با یک گروه معمولی می‌پردازیم. دمیرکی تلاش کرد تا بسیاری از مفاهیم در گروه‌های معمولی را در گروه‌های هموار مطالعه کند. به طور مثال، او زیرگروه‌ها و همریختی‌های هموار را تعریف و به بررسی ویژگی‌های این مفاهیم پرداخت [۸]. نکته‌ی جالب این بود که آقای دمیرکی در این مسیر با مسائل و مشکلاتی روبرو شد که وی را مجبور می‌کرد تا تعاریف ارائه شده‌ی خود را اصلاح کند. به طور مثال، وی با اصلاح تعریف عمل‌گر هموار، عمل‌گر هموار قوی را ارائه کرد. دمیرکی برای این‌که زیرگروه هموار تولید شده توسط یک زیرمجموعه‌ی معمولی از یک گروه هموار را توصیف کند، می‌بایست حاصل‌ضرب تعداد متناهی عنصر از یک گروه هموار را تحت یک عمل‌گر هموار تعریف می‌کرد و به بررسی قانون شرکت‌پذیری تعمیم‌یافته در گروه‌های هموار می‌پرداخت [۹]. او در این مرحله نیز با مشکلات و مسائلی روبرو شد که مجبور شد همه‌ی تعاریف خود را تا این‌جا، با جابه‌جایی هم‌ترازی فازی از [۲۱]، به جای تساوی فازی به طور مجدد ارائه کند تا به هدف خود یعنی، توصیف زیرگروه هموار تولید شده توسط یک زیرمجموعه‌ی معمولی از یک گروه هموار برسد.

---

[5] Sasaki

با همه‌ی این مشکلات دانشمندانی تلاش کردند تا دیگر ساختارهای جبری هموار را مورد مطالعه قرار دهند. برای اولین قدم بعد از دمیرکی، ژنگ-مینگ [۶] و جیان‌لی [۷] زیرگروه‌های هموار نرمال را تعریف کردند [۲۲]. عمل یک گروه هموار روی یک مجموعه، حلقه‌های هموار و مدول‌های هموار نیز توسط چویان‌ین ژو [۸] مطالعه و بررسی گردید [۲، ۳، ۴، ۵].

[۶] Zhen-ming

[۷] Jian-li

[۸] Chuan-yn Xu

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل، تعاریف و مقدمات مورد نیاز برای تعریف یک گروه هموار را ارائه می‌کنیم. با استفاده از دو مقاله‌ی دمیرکی [۶، ۷]، شمول و تساوی دو زیرمجموعه‌ی فازی، مفهوم تساوی فازی در یک مجموعه‌ی معمولی، رابطه و تابع فازی بین دو مجموعه را تعریف کرده و آن‌ها را با مفاهیم معمولی مقایسه می‌کنیم. در پایان، با تعریف عمل‌گر دوتایی هموار، آماده می‌شویم تا در فصل بعد گروه‌های هموار را تعریف کرده و به بررسی ویژگی‌های اساسی آن بپردازیم.

۱.۱ مجموعه‌ی فازی

فرض کنید G یک مجموعه‌ی معمولی است. در این صورت زیرمجموعه‌ی فازی A در G توسط تابع عضویت $\mu_A : G \longrightarrow [۰,۱]$ تعریف می‌شود که در آن $\mu_A(x)$ به ازای هر $x \in G$ درجه‌ی عضویت x در G را نشان می‌دهد. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های فازی مجموعه‌ی G را که با نماد $F(G)$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ی توانی فازی G می‌نامیم. $F(G)$ در واقع برابر است با تمام توابع از G به بازه‌ی $[۰,۱]$،

$$F(G) = \{A|\mu_A : G \to [۰,۱]\}.$$

اگر $\mu_A \subseteq \{۰,۱\}$ باشد، آنگاه A یک زیرمجموعه‌ی معمولی از G است. همچنین مجموعه‌ی توانی فازی G نیز همان $P(G)$ می‌باشد. در این حالت تابع μ_A که ضابطه‌ی آن به صورت زیر است، تابع مشخصه‌ی زیرمجموعه‌ی A در G می‌نامیم و با نماد χ_A نشان می‌دهیم.

$$(\mu_A =)\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

جالب این که زیرمجموعه‌ی تهی، با تابع صفر یا همان زیرمجموعه‌ی فازی صفر هم‌ارز است. با توجه به آن‌چه گفته شد مفاهیم معمولی به صورت زیر به زیرمجموعه‌های فازی قابل تعمیم است.

فرض کنید $A, B \in F(G)$ است. در این صورت اگر به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$ آنگاه می‌گوییم μ_A یک زیرمجموعه از μ_B است و می نویسیم $A \subseteq B$.

اجتماع واشتراک دو مجموعه‌ی فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد: