بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

احاطه‌کنندگی k ـ تایی و احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر عادل کاظمی پیله‌درق

توسط

بهناز پهلوسای

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

...که وجودم برایشان، همه رنج بود و وجودشان، برایم همه مهر

و تقدیم به

همه کسانی که در یکایک لحظه‌های زندگی‌ام همراه و همدلم بوده‌اند...

تقدیر و سپاسگزاری:

حمد و سپاس خداوندی را که قلم را آفرید و بدان سوگند خورد.

امروز که توانستم این مرحله از علم را با عنایت خداوند منان به پایان برسانم بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانم که در یاری رساندنم هیچ کمکی را دریغ نکردند سپاسگزاری کنم.

در آغاز از خانواده عزیزم که همواره دعاهای خیرشان تحمل سختی‌ها را برایم آسان ساخت کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند مهربان می‌خواهم که چنانم کند که همیشه لایق دعای خیرشان باشم.

از استاد گرامی‌ام جناب آقای دکتر عادل کاظمی که نمی‌دانم با چه واژه‌ای از ایشان قدردانی کنم چرا که ایشان واقعاً چیزهایی را چه در زمینه علم و ادب و چه در زندگی به من آموختند که واژه‌ای را لایق سپاس ایشان نمی‌دانم. و خداوند را سپاس می‌گویم که توفیق شاگردی ایشان را نصیبم کرد.

از استاد فرزانه و ارجمند جناب آقای دکتر سید عباداله محمودیان که از دانشگاه صنعتی شریف داوری این پایان نامه را متقبل شدند و این افتخار را نصیب بنده کردند کمال سپاسگزاری را دارم.

و در پایان به رسم ادب زانو بر زمین نهاده، سر تعظیم را فرود آورده و بوسه بر دستان یکایکشان می‌زنم.

بهناز پهلوسای

تیر ۱۳۹۰

نام خانوادگی: پهلوسای **نام:** بهناز

عنوان پایان نامه : احاطه‌کنندگی k ـ تایی و احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی در گراف‌ها

استاد راهنما: دکتر عادل کاظمی پیله‌درق

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۴/۲۹ **تعداد صفحه:** ۱۵۵

کلید واژه‌ها : گراف‌های چندبخشی، گراف‌های چندبخشی کامل، مکعب‌ها، گراف‌های همبند P_4 ـ آزاد، گراف‌های قویاً قطری، گراف‌های شکافته شدنی، گراف‌های تصادفی، گراف‌های هراری، گراف‌های ابر توسعه یافته‌ی پترسن، ابرگراف‌ها، عدد احاطه‌کنندگی k ـ تایی، عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی، عدد k ـ احاطه‌کنندگی و عدد M ـ احاطه‌کنندگی.

چکیده:
در این پایان نامه مسئله احاطه‌کنندگی را روی برخی از گراف‌ها چون گراف‌های چندبخشی، گراف‌های چندبخشی کامل، مکعب‌های دوبخشی، گراف‌های همبند P_4 ـ آزاد، گراف‌های قویاً قطری، گراف‌های شکافته شدنی، گراف‌های تصادفی، گراف‌های هراری و گراف‌های ابر توسعه یافته‌ی پترسن را بررسی می‌کنیم. خواص مجموعه‌های احاطه‌کننده‌ی کلی k ـ تایی مینیمال را بررسی می‌کنیم و خواهیم داد که مسئله‌ی تشخیص مجموعه‌های احاطه‌کننده‌ی کلی k ـ تایی در گراف‌ها را می‌توانیم به مسئله‌ی تشخیص k ـ تقاطع در ابرگراف‌ها تبدیل کنیم و این عدد را برای گراف‌های چندبخشی، گراف‌های چندبخشی کامل، مکعب‌های دوبخشی می‌یابیم. در ادامه، یک کران بالا برای عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی در حالت کلی ارائه می‌دهیم و به ازای هر $\frac{\delta+3}{2} \leq k \leq \delta - 1$ کران $\gamma_k(G) \leq \frac{(2k-\delta-1)n}{(2k-\delta)}$ را اصلاح می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که به ازای هر $k \geq \delta$ با چه شرطی روی گراف G تساوی $\gamma_{k+1}(G) = \frac{n+\gamma_k(G)}{2}$ داریم. عدد احاطه‌کنندگی k ـ تایی را در گراف‌های قویاً قطری که زیرگرافی از گراف‌های قطری‌اند را بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که مسئله‌ی احاطه‌کنندگی k ـ تایی برای گراف‌های شکافته شدنی که زیرکلاسی از گراف‌های قطری اند و گراف‌های دوبخشی یک مسئله $\mathcal{NP}$ ـ کامل است. عدد احاطه‌کنندگی ۲ ـ تایی برای گراف تصادفی $G(n,p)$ که همگرایی تقریباً حتمی با یک دو ـ نقطه تمرکز را دارد، می‌یابیم.
فصل هفتم و هشتم این پایان نامه که توسط جناب دکتر کاظمی و بنده نوشته شده‌اند، کران‌هایی را برای عدد احاطه‌کنندگی کلی ۲ ـ تایی گراف‌های هراری $H_{m,n}$ و عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی گراف‌های ابر توسعه یافته‌ی پترسن $P(m,n;\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{m-1})$ ارائه می‌دهیم و بررسی می‌کنیم که با چه شرطی روی m و n این کران‌ها به تساوی تبدیل می‌شود.

فهرست مندرجات

مقدمه

در قرن هجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ [۱] واقع در پروس شرقی به‌وسیله رودخانه پرگل [۲] به چهار بخش تقسیم شده بود. هفت پل این بخش‌ها را به هم وصل می‌کرد. اهالی این شهر به هنگام گردش در روزهای یکشنبه، می‌کوشیدند راهی برای گردش کردن در دور شهر چنان بیابند که از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنند و سپس به نقطه شروع برگردند. در سال ۱۷۳۶ ریاضی‌دان بزرگ سوئیسی لئونهارت اویلر جهت حل این مسأله، چهار بخش این شهر را با چهار نقطه روی صفحه نشان داد و به ازای هر پل بین دو منطقه پاره‌خط یا کمانی بین دو نقطه متناظر با آنها رسم کرد. همان طوری که در شکل می‌بینید. به دلیل کاربرد قابل

ملاحظه نظریه گراف در زمینه‌های گوناگونی چون اقتصاد، مدیریت، بازاریاب، توزیع خدمات، انتقال اطلاعات، حمل و نقل و به طور کلی بررسی و تجزیه و تحلیل وابستگی اشیا به یکدیگر، امروزه نظریه گراف یکی از پربارترین شاخه‌های ریاضیات و علوم کامپیوتر شده است.

[۱] Konigsberg

[۲] Pregel

در این پایان نامه مسئله احاطه‌کنندگی را روی برخی از گراف‌ها چون گراف‌های چندبخشی، گراف‌های چندبخشی کامل، مکعب‌های دوبخشی، گراف‌های همبند $P_۴$ ـ آزاد، گراف‌های قویاً قطری، گراف‌های شکافته شدنی، گراف‌های تصادفی، گراف‌های هراری و گراف‌های ابر توسعه یافته‌ی پترسن را بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال مسئله‌ی ملکه‌ها[۱] یک مسئله احاطه‌کنندگی به صورت زیر می‌باشد.

یک صفحه‌ی شطرنج را که ۸×۸ خانه دارد را در نظر بگیرید. تنها مهره‌ای که در این صفحه می‌تواند به هر ۸ جهت حرکت کند، مهره‌ی ملکه[۲] می‌باشد. با چند ملکه می‌توانیم کل این صفحه را تصرف کنیم. شکل زیر گواه این است که با ٦ ملکه می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

این مسئله باعث پیدایش مسئله‌ی احاطه‌کنندگی شد.

همان طور که در بالا دیدیم می‌توانیم با ٦ ملکه صفحه‌ی شطرنج را تصرف کنیم. ولی آیا این تعداد مینیمم است؟

این مسئله سال‌ها بعد با ۵ ملکه حل شد و همان طور که در شکل زیر می‌بینیم، چیدمان این ملکه‌ها طوری است که هر ملکه بر خانه‌ی ملکه‌های دیگر نیز احاطه دارد. این مسئله‌ی ۵ ـ ملکه باعث شد تا احاطه‌کنندگی کلی توسط کوکائین [۳]، داوس [۴] و هدیتنیمی [۵] معرفی شود.

[۱] Queens Problem
[۲] Queen
[۳] Cockayne
[۴] Dawes
[۵] Hedetniemi

حال با تعاریف زیر رابطه‌ی مسئله‌ی احاطه‌کنندگی را با مسئله‌ی ملکه‌ها مشاهده می‌کنیم.

در گراف G مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌کننده از G می گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G) - S$ با حداقل یکی از رئوس S مجاور باشد. مجموعه احاطه‌کننده را به اختصار با نماد DS نشان می‌دهیم. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده از گراف G را با نماد $\gamma(G)$ نمایش داده و آن را عدد احاطه‌کنندگی گراف می‌نامیم.

$S \subseteq V(G)$ را مجموعه k ـ احاطه‌کننده از G می‌گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G) - S$ با حداقل k راس از S مجاور باشد. چنین مجموعه‌ای را به اختصار با نماد kDS نشان می دهیم. اندازه کوچکترین مجموعه‌ی k ـ احاطه‌کننده از گراف G را با نماد $\gamma_k(G)$ نمایش داده و آن را عدد k ـ احاطه‌کنندگی گراف می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $\gamma_۱(G) = \gamma(G)$.

مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌کننده k ـ تایی از G می‌گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G) - S$ با حداقل k راس از S و هر راس $v \in S$ با حداقل $k - ۱$ راس از S مجاور باشد. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده k ـ تایی از گراف G را با نماد $\gamma_{\times k}(G)$ نمایش داده و آن را عدد احاطه‌کنندگی k ـ تایی گراف می نامیم. توجه می‌کنیم که $\gamma_{\times ۱}(G) = \gamma_۱(G) = \gamma(G)$.

مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌کننده کلی می‌گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G)$ با حداقل یکی از رئوس S مجاور باشد. مجموعه‌ی احاطه‌کننده‌ی کلی را به اختصار با نماد TDS نشان می‌دهیم. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده کلی از گراف G را با نماد

$\gamma_t(G)$ نمایش داده و آن را عدد احاطه‌کنندگی کلی گراف می‌نامیم.

$S \subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌کننده کلی k ـ تایی می گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G)$ با حداقل k راس از S مجاور باشد. مجموعه احاطه‌کننده کلی k ـ تایی را به اختصار با نماد $kTDS$ نشان می‌دهیم. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده کلی k ـ تایی از گراف G را با نماد $\gamma_{\times k,t}(G)$ نمایش داده و آن را عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی گراف می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $\gamma_{\times ۱,t}(G) = \gamma_t(G)$.

اگر به جای هر راس v در گراف $G = (V, E)$ برچسب $M(v) = (t(v), k(v))$ را بزنیم که در آن $t(v) \in \{B, R\}$ و $k(v)$ یک عدد صحیح نامنفی است. در این برچسب زدن، منظور پیدا کردن مجموعه‌ی احاطه‌کننده‌ی D که شامل تمام رئوس v با برچسب $t(v) = R$ (که رئوس لازم نامیده می‌شوند) است، به طوری که هر راس v از G توسط حداقل $k(v)$ راس از D احاطه شده باشد.

این پایان نامه از هشت فصل به صورت زیر تشکیل شده است.

فصل اول. مقدمات و مفاهیم اولیه

فصل دوم. احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی در گراف‌ها

فصل سوم. درباره k ـ احاطه‌کنندگی و مینیمم درجه در گراف‌ها

فصل چهارم. یک کران روی عدد k ـ احاطه‌کنندگی یک گراف

فصل پنجم. احاطه‌کنندگی k ـ تایی در گراف‌ها

فصل ششم. درباره احاطه‌کنندگی k ـ تایی در گراف‌ها

فصل هفتم. احاطه‌کنندگی ۲ ـ تایی در گراف‌های هراری

فصل هشتم. احاطه‌کنندگی k ـ تایی در گراف‌های ابر توسعه یافته پترسن

در **فصل اول** مقدمات و تعاریف اولیه را که در کل این پایان نامه نیاز داریم، خواهیم آورد.

در **فصل دوم** خواص مجموعه‌های احاطه‌کننده‌ی کلی k ـ تایی مینیمال را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مسئله‌ی تشخیص مجموعه‌های احاطه‌کننده‌ی کلی k ـ تایی در گراف‌ها را می‌توانیم به مسئله‌ی تشخیص k ـ تقاطع در ابرگراف‌ها تبدیل کنیم و این عدد را برای گراف‌های چندبخشی، گراف‌های چندبخشی کامل، مکعب‌های دوبخشی می‌یابیم. در ادامه، یک کران بالا برای عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی در حالت کلی ارائه می‌دهیم.

در **فصل سوم** به ازای هر $\frac{\delta+۳}{۲} \leq k \leq \delta - ۱$ کران $\gamma_k(G) \leq \frac{(۲k-\delta-۱)n}{(۲k-\delta)}$ را اصلاح می‌کنیم و بررسی خواهیم کرد که به ازای هر $k \geq \delta$ با چه شرطی روی گراف G کران $\gamma_{k+۱}(G) \leq \frac{n+\gamma_k(G)}{۲}$ به تساوی تبدیل می‌شود.

در **فصل چهارم** بررسی خواهیم کرد که با چه شرطی روی گراف‌ها کران $\gamma_{k+۱}(G) \leq \frac{n+\gamma_k(G)}{۲}$ به تساوی تبدیل می‌شود.

در **فصل پنجم** عدد احاطه‌کنندگی k ـ تایی را در گراف‌های قویاً قطری که زیرگرافی از گراف‌های قطری‌اند را بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که مسئله‌ی احاطه‌کنندگی k ـ تایی برای گراف‌های شکافته شدنی که زیرکلاسی از گراف‌های قطری اند و گراف‌های دوبخشی یک مسئله $\mathcal{NP}$ ـ کامل است.

در **فصل ششم** نشان خواهیم داد که عدد احاطه‌کنندگی ۲ ـ تایی برای گراف تصادفی $G(n,p)$ که همگرایی تقریباً حتمی با یک دو ـ نقطه تمرکز به صورت زیر می‌باشد

$$\lfloor \log_b n - \log_b \log n + \log_b \frac{p}{p-1} \rfloor + 1 \leq \gamma_2(G(n,p)) \leq \lfloor \log_b n - \log_b \log n + \log_b \frac{p}{p-1} \rfloor + 2$$

که در آن $p \in (۰,۱)$ و $b = \frac{۱}{p-۱}$ می‌باشد.

در **فصل هفتم** کران‌هایی را برای عدد احاطه‌کنندگی کلی ۲ ـ تایی گرافهای هراری $H_{m,n}$ ارائه می‌دهیم و بررسی می‌کنیم که با چه شرطی روی m و n این کران‌ها به تساوی تبدیل می‌شود.

در **فصل هشتم** کران‌هایی را برای عدد احاطه‌کنندگی کلی k ـ تایی گراف ابر توسعه یافته‌ی پترسن $P(m,n;\ell_۰,\ell_۱,\cdots,\ell_{m-۱})$ ارائه می‌دهیم و بررسی می‌کنیم که با چه شرطی روی m و n این کران‌ها به تساوی تبدیل می‌شود.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مثال‌ها

در این بخش برخی از تعاریف و مثال‌هایی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

مثال ۱.۱ فرض کنید که ٦ تیم به نام‌های a، b، c، d، e و f باید دوبه‌دو با یکدیگر مسابقه دهند. پس از چند هفته از شروع این دوره، بازی‌های زیر انجام شده است.

a با c، e و f بازی کرده است.

b با c، e، d و f بازی کرده است.

c با a، b، d و f بازی کرده است.

d با b، c، e و f بازی کرده است.

e با a، b و d بازی کرده است.

f با a، b، c و d بازی کرده است.

موقعیت این دوره از مسابقات را تاکنون می‌توانیم به کمک یک نمودار هندسی نمایش دهیم. بدین طریق که هر تیم را با یک نقطه نمایش دهیم و هر دو نقطه را که تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده‌اند را با خطی راست به هم وصل کنیم. در این صورت نمودار زیر را داریم:

چنین نموداری، نمودار یک گراف است.

مثال ۲.۱ در سال ۱۸۵۹ میلادی سر ویلیام روئن همیلتون [۱] ریاضی‌دان معروف ایرلندی یک اسباب‌بازی اختراع کرد که از یک دوازده وجهی منتظم از جنس چوب، ۲۰ میخ کوچک و یک تکه نخ تشکیل شده بود. همیلتون هر یک از ۲۰ راس این دوازده وجهی یک میخ ته‌پهن مهیا کرده بود و قطعه نخی به یکی از این میخ‌ها بسته بود. بازیکن، نخ را در دست می‌گرفت و از هر راس (شهر) که عبور می‌کرد نخ را به دور میخ مربوطه می‌پیچید. او می‌بایست تمام راس‌ها را فقط یک‌بار طی کرده و به راس (شهر) شروع برگردد. یک راه‌حل این بازی توسط نمودار زیر نشان داده شده است. خطوط پررنگ نشانگر عبور نخ است:

چنین نموداری، نمودار یک گراف است.

گراف. فرض کنید V مجموعه‌ای غیرتهی و E زیرمجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی V باشد. در این صورت به جفت $G=(V,E)$ یک گراف می‌گوییم. هر عضو V را یک راس یا گره و هر عضو E را یک یال می‌نامیم. مجموعه راس‌های G را با نماد $V(G)$ و مجموعه یال‌های G را با نماد $E(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱ مجاور. اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد و $v \in V$ و u و $e=\{u,v\} \in E$، آنگاه می‌گوییم:

الف) e یالی بین u و v است.

ب) e از u و v می‌گذرد.

ج) e رئوس u و v را به هم وصل می‌کند.

---

[۱] Hamilton

د) رئوس u و v مجاورند.

ه) رئوس u و v بر یال e واقعند.

و) رئوس u و v دو سر یال e هستند. و این موضوع را با نماد $u \leftrightarrow v$ و با نمودار زیر نشان می‌دهیم.

دلیل نامگذاری گراف‌ها بدین نام، این است که می‌توان آن‌ها را به صورت گرافیکی نمایش داد و همین نمایش گرافیکی است که ما را در درک بسیاری از خواص گراف‌ها یاری می‌کند. در این گونه نمایش گرافیکی، هر راس با یک نقطه و هر یال با یک خط، که نقاط نمایانگر دو سر خود را به یکدیگر وصل می‌کند، نمایش داده می‌شود.

به هنگام رسم نمودار، باید توجه داشته باشیم که هیچ خطی خودش را قطع نکند و همچنین خط مربوطه به یک یال نباید از روی نقطه‌ای که نمایانگر یک راس است، ولی مربوط به راس‌های دو سر آن یال نیست، عبور کند. مسلماً چنین کاری همیشه امکان‌پذیر است.

نمودار گراف‌های G و H در شکل زیر نشان داده شده است:

برای رسم یک گراف، روش یکتایی وجود ندارد، بدین دلیل که موقعیت نسبی نقاط و خطوط که به ترتیب نمایانگر راس‌ها و یال‌های گراف هستند برای ما اهمیتی ندارد.

تعریف ۲.۱ مرتبه. تعداد رئوس گراف G را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با نماد n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ اندازه. تعداد یال‌های گراف G را اندازه آن گراف می‌گوییم و با نماد m نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ گراف متناهی. گراف G را متناهی می‌گوییم هرگاه مرتبه آن متناهی باشد. در غیر این صورت گراف G نامتناهی می‌باشد. گراف‌های زیر نمونه‌هایی از گراف‌های نامتناهی‌اند.

تعریف ۵.۱ طوقه. یالی که راس را به خودش وصل کند طوقه نام دارد.

تعریف ۶.۱ راس منفرد. راسی که یالی از آن نمی‌گذرد راس منفرد یا تنها می‌نامیم.
گراف زیر هم طوقه دارد و هم راس منفرد.

تعریف ۷.۱ گراف تهی. به گرافی که یال ندارد گراف تهی می‌گوییم.
گراف تهی را با تک راس زیر نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱ گراف بدیهی. به گرافی که فقط یک راس دارد گراف بدیهی می‌گوییم.
گراف زیر نمونه‌ای از یک گراف بدیهی می‌باشد.

تعریف ۹.۱ یال چندگانه. اگر بیش از یک یال دو راس را به هم وصل کنند، به هر کدام از این یال‌ها، یال چندگانه می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱ گراف ساده. به گرافی که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد گراف ساده می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۱ گراف چندگانه. به گرافی که یال چندگانه داشته باشد گراف چندگانه می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۱ گراف زمینه. اگر در یک گراف تمام طوقه‌ها را حذف کنیم و همچنین از بین هر دو راس مجاور، تمام یال‌ها را به غیر از یکی حذف نماییم، به زیرگراف فراگیر ساده‌ای از G می‌رسیم که گراف ساده‌ی زمینه‌ی G نامیده می‌شود.

شکل زیر یک گراف به همراه گراف ساده‌ی زمینه آن را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۳.۱ گراف کامل. گراف ساده‌ی G را کامل نامیم هرگاه بین هر جفت از رئوس متمایز آن یالی وجود داشته باشد. یک گراف کامل با n راس را با نماد K_n نمایش می‌دهیم. شکل زیر گراف‌های کامل را تا چهار راس نشان می‌دهد.

تعریف ۱۴.۱ مکمل گراف. مکمل یک گراف ساده‌ی G، که آن را با $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم، گراف ساده‌ای است با مجموعه رئوس $V(G)$، که در آن دو راس مجاورند اگر و تنها اگر آن دو راس در G مجاور نباشند. واضح است که مکمل گراف K_n به صورت n تا راس منفرد می‌باشد. دو گراف زیر مکمل هم می‌باشند.

تعریف ۱۵.۱ گراف ℓ ـ بخشی. گراف G را ℓ ـ بخشی نامیم هرگاه بتوان مجموعه رئوس G را به ℓ زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد.

تعریف ۱۶.۱ گراف ℓ ـ بخشی کامل. گراف ساده ℓ ـ بخشی G، کامل است، اگر هر راس به تمام راس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند، وصل شده باشد. گراف ℓ ـ بخشی کامل را که به ازای هر $1 \leq i \leq \ell$ تعداد رئوس هر بخش برابر با n_i باشد را با نماد $K_{n_1,n_2,\dots,n_\ell}$ نمایش می‌دهیم.
گراف $k_{3,3}$ در زیر نشان داده شده است.

تعریف ۱۷.۱ ستاره. گراف دوبخشی $K_{1,n}$ را ستاره می‌گوییم.
گراف $k_{1,5}$ در زیر نشان داده شده است.