بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام‌نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض—گرایش آنالیز
دانشکده علوم
گروه علمی ریاضی

انتقال‌های وزن‌دار ابردوری و فرادوری

استاد راهنما:
دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:
دکتر فریبا ارشاد

نگارش:
الهام مخلد

خرداد ماه ۱۳۸۹

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **انتقال های وزندار ابردوری و فرادوری**

که توسط **الهام مخلد** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید

می باشد. تاریخ دفاع: **۸۹/۳/۳۱** نمره: **۱۸/۵** درجه ارزشیابی : **عالی**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-دکتر بهمن یوسفی	استاد راهنما	استاد	
۲-دکتر فریبا ارشاد	استاد مشاور	استادیار	ارشاد
۳-دکتر احمد خاکساری	استاد داور	استادیار	
۴- دکتر محبوبه حسین یزدی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به:

پدر و مادر دلسوز

و

همسر مهربانم

سپاسگزاری

بدینوسیله مقام شامخ تمام اساتید بزرگوار بخش ریاضی بویژه استاد گرانقدرم دکتر بهمن یوسفی که بدون راهنمایی‌های ایشان نوشتن این پایان‌نامه ممکن نبود را ارج می‌نهم و از همکاری و همراهی تمام دوستان و عزیزانی که در این راه مرا یاری کردند سپاسگزارم.

چکیده

این رساله از سه فصل تشکیل شده است. ابتدا در فصل مقدمه برخی تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در فصل دوم شرایط لازم و کافی برای عملگری کراندار روی فضای باناخ که یک زیرفضای بسته نامتناهی بعد از بردارهای فرادوری دارد را بیان و اثبات می‌کنیم. با استفاده از این نتیجه می‌توانیم انتقال‌های وزن‌دار یکطرفه و دوطرفه که یک زیرفضای بسته نامتناهی بعد دارند، را مشخص کنیم. در فصل سوم انتقال‌های وزن‌دار ابردوری را بر حسب دنباله‌های وزنی‌شان شناسایی کرده و مجموع مستقیم انتقال‌های وزن‌دار ابردوری را که همچنین ابردوری هستند، معین می‌کنیم. بعنوان یک نتیجه ما در رده انتقال‌های وزن‌دار نشان می‌دهیم که انتقال‌های ابردوری چندگانه و مجموع مستقیم انتقال‌های ابردوری هر دو ابردوری هستند.

فهرست

فصل ۱

۱ — مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است می‌پردازیم.

در همه این مباحث فرض می‌کنیم $\mathcal{B}$ یک فضای باناخ باشد. یک عملگر خطی کراندار $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ دوری نامیده می‌شود، اگر بردار $x \in \mathcal{B}$ (که x را بردار دوری می‌نامند) وجود داشته باشد بطوریکه گسترش خطی مدار $orb(T, x) = \{T^n x : n = 0, 1, \cdots\}$ در $\mathcal{B}$ چگال است. عملگر T را ابردوری می‌نامند هرگاه مدار $orb(T, x)$، در $\mathcal{B}$ چگال باشد و در این حالت بردار x ابردوری نامیده می‌شود. عملگر T فرادوری نامیده می‌شود اگر

$$\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

در $\mathcal{B}$ چگال باشد و در این حالت بردار x را یک بردار فرادوری می‌نامند.

اگر $x_1, \cdots, x_n$ وجود داشته باشند بطوریکه $\bigcup_{i=1}^{k} orb(T, x_i)$ در $\mathcal{B}$ چگال باشد آن‌گاه عملگر T را ابردوری چندگانه می‌نامند.

حال قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که به محک فرادوری معروف است.

قضیه ۱.۱: T را یک عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ جدایی‌پذیر $\mathcal{B}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید دنباله اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت $\{n_k\}$ و دنباله $\{\lambda_{n_k}\} \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$ وجود دارد بقسمی که:

۱) یک زیرمجموعه چگال $X \subset \mathcal{B}$ وجود دارد بطوریکه $\|\lambda_{n_k} T^{n_k} x\| \longrightarrow 0$ برای هر $x \in X$.

۲) یک زیرمجموعه چگال $Y \subset \mathcal{B}$ و یک نگاشت $S : Y \longrightarrow Y$ موجود باشند بطوریکه $TS = id_Y$ و $\|\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}\right) S^{n_k} y\| \longrightarrow 0$ برای هر $y \in Y$.

در اینصورت یک بردار x وجود دارد بقسمی که $\{\lambda_{n_k} T^{n_k} x\}$ در $\mathcal{B}$ چگال است. بویژه، x برای T برداری فرادوری است. ([۲۵]).

در قضیه فوق اگر قرار دهیم $\lambda_{n_k} = 1$، برای هر عدد صحیح مثبت k، آن‌گاه محک ابردوری را خواهیم داشت. ([۲۵]).

ما رده همه عملگرهای کراندار روی $\mathcal{B}$ که یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد از بردارهای فرادوری دارند را با $SC_\infty(\mathcal{B})$ نمایش می‌دهیم. بطور مشابه، رده همه عملگرهای کراندار روی $\mathcal{B}$ که یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد از بردارهای ابردوری دارند را با $HC_\infty(\mathcal{B})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱: T را یک عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ جدایی‌پذیر $\mathcal{B}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید T در محک فرادوری نسبت به دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ صدق کند. می‌گوییم T در شرط $\mathcal{B}_0$ برای دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ صدق می‌کند اگر یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که

$$\|\lambda_{n_k} T^{n_k} e\| \longrightarrow 0$$

برای هر $e \in \mathcal{B}_0$.

قضیه ۳.۱: T را یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای باناخ جدایی‌پذیر $\mathcal{B}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید محک فرادوری برای T نسبت به دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ که در شرط $\mathcal{B}_0$ صدق می‌کند، برقرار باشد. پس یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ وجود دارد بطوریکه هر $z \in \mathcal{B}_1 \backslash \{0\}$ برای T، فرادوری است. ([۲۵]).

نکته باارزشی که این قضیه به ما می‌دهد این است که، یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد از بردارهای $\mathcal{B}_1$ وجود دارد بطوریکه برای هر $z \in \mathcal{B}_1 \backslash \{0\}$، مجموعه $\{\lambda_{n_k} T^{n_k} z\}$ در $\mathcal{B}$ چگال است.

ما در این رساله انتقال‌های وزن‌دار ابردوری و فرادوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم، بنابراین به معرفی انتقال‌ها می‌پردازیم. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و $\{e_n\}_{n\geq 0}$ پایه متعارف برای فضای $l^p = l^p(\mathbb{N})$ باشد. اگر $\{w_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله کراندار در $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ باشد، آنگاه انتقال وزن‌دار پسرو یکطرفه $T : l^p \longrightarrow l^p$ بوسیله رابطه

$$Te_n = \begin{cases} w_n e_{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

همچنین برای $1 \leq p < \infty$، فضای باناخ از دنباله‌های دوطرفه که p_جمع‌پذیر هستند را با $l^p(\mathbb{Z})$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ پایه متعارف برای فضای $l^p(\mathbb{Z})$ باشد. اگر $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنباله کراندار در $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ باشد، آنگاه انتقال وزن‌دار پسرو دوطرفه $T : l^p(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^p(\mathbb{Z})$ یک عملگر کراندار تعریف شده با ضابطه

$$Te_n = w_n e_{n-1}$$

می‌باشد و اگر عملگر کراندار T بصورت زیر تعریف شود

$$Te_n = w_n e_{n+1}$$

T را یک عملگر وزن‌دار پیشرو می‌نامند.

گزاره ۱.۴: فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و T یک انتقال وزن‌دار پسرو یکطرفه با دنباله وزنی $\{w_n\}$ تعریف شده روی فضای l^p و $\{\lambda_{n_k}\}$ یک دنباله از اعداد صحیح مثبت باشد. بنابراین شرایط زیر معادل بوده و هر کدام از آنها نتیجه می‌دهند که محک فرادوری نسبت به دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ برقرار است.

۱) برای هر عدد صحیح نامنفی q شرط زیر برقرار است:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \lambda_{n_k}\prod_{i=۱}^{n} w_{q+i}=\infty$$

۲) یک دنباله نانزولی $\{q(n_k)\}$ از اعداد صحیح مثبت که به ∞ میل می‌کنند وجود دارد بطوریکه

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \lambda_{n_k}\min_{q\leq q(n_k)}\prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}=\infty.$$

([۲۵]). یادآوری می‌کنیم که طیف عملگر T بصورت

$$\sigma(T)=\{\lambda\in \mathbb{C}:\ \text{معکوس‌پذیر نیست}\ T-\lambda\}$$

تعریف می‌شود. طیف اساسی T، $\sigma_e(T)$، طیف تصویر متعارف T در جبر خارج قسمتی کالکین $\frac{\mathcal{L}(\mathcal{B})}{\mathcal{K}(\mathcal{B})}$ می‌باشد، جاییکه $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{B}$ و $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ ایده‌ال همه عملگرهای فشرده روی $\mathcal{B}$ می‌باشد.

طیف اساسی چپ، $\sigma_{le}(T)$، مجموعه تمام اعداد مختلط λ است بطوریکه $ran(T-\lambda)$ بسته نبوده یا $\ker(T-\lambda)$ نامتناهی‌بعد باشد. طیف اساسی راست، $\sigma_{re}(T)$، مجموعه تمام اعداد مختلط λ است بطوریکه $ran(T-\lambda)$ بسته نبوده یا $\ker(T^*-\lambda)$ نامتناهی‌بعد باشد. می‌دانیم که

$$\sigma_e(T)=\sigma_{re}(T)\cup\sigma_{le}(T).$$

همچنین، مجموعه مقادیر ویژه T را طیف نقطه‌ای T، $\sigma_p(T)$، می‌نامند.

قضیه ۵.۱: اگر T در محک فرادوری صدق کند و $\circ\in\sigma_e(T)$، آنگاه یک زیرفضای بسته نامتناهی‌بعد از بردارهای فرادوری وجود دارد. ([۳۱]).

گزاره ۶.۱: اگر T در محک فرادوری صدق کند، آن‌گاه $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ([۲۵]).

تعریف ۷.۱: فرض می‌کنیم $\{\beta(n)\}$ یک دنباله از اعداد مثبت، با شرط‌های $\beta(\circ) = ۱$ و $۱ \leq p < \infty$ باشد، ما فضای دنباله‌های $f = \{\hat{f}(n)\}_{n=\circ}^{\infty}$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که:

$$\|f\|^p = \|f\|_\beta^p = \sum_{n=\circ}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p \beta(n)^p < \infty.$$

توجه کنید که نمایش صوری $f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ به ازای هر مقدار z، چه سریها همگرا باشند یا نباشند، بکار می‌رود. فضای تمام سری‌های توانی صوری با نماد $H^p(\beta)$ نشان داده می‌شود و آن را فضاهای هاردی وزندار می‌نامند.

به عبارت دیگر:

$$H^p(\beta) = \{f : f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \|f\|_\beta < \infty\}$$

لازم به ذکر است که اگر $n \in \mathbf{Z}$، به این فضا، فضای هاردی وزندار از سریهای لوران صوری، اطلاق می‌شود و آن را با نماد $L^p(\beta)$ نشان می‌دهند. پس:

$$L^p(\beta) = \{f : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \|f\|_\beta < \infty\}.$$

این فضاها، فضاهای باناخ انعکاسی با نرم $\|.\|_\beta$ هستند.

تعریف ۸.۱: فرض کنید $\hat{f}_k(n) = \delta_{nk}$ یعنی

$$\hat{f}_k(n) = \begin{cases} ۱ & n = k \\ \circ & n \neq k \end{cases}$$

و

$$f_k(z) = z^k$$

باشد. در اینصورت $\{f_k\}_k$ یک پایه است به گونه‌ای که:

$$\|f_k\|_\beta = |\beta(k)|$$

حال عملگر ضربی به وسیله‌ی z یعنی M_z را روی فضای $L^p(\beta)$ یا $H^p(\beta)$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(M_z f)(z) = \sum_n \hat{f}(n) z^{n+1} = z f(z).$$

تعریف ۹.۱: عملگر انتقال پسرو B روی $H^2(\beta)$ به وسیله‌ی ضابطه‌ی

$$Bf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k+1) z^k$$

تعریف شده است، جاییکه

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \\ \|f\|_\beta^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k) < \infty. \end{aligned}$$

لذا عملگر B کراندار است اگر و تنها اگر $\left(\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ کراندار باشد.

فصل ۲

۲ – عملگرهای انتقال وزن‌دار و محک فرادوری

در این فصل ما شرایط قضیه ۳.۱ را برای عملگرهای انتقال وزن‌دار پسرو یکطرفه بررسی می‌کنیم. ما نشان خواهیم داد که برای این نوع عملگرها شرایط قضیه ۳.۱، برای وجود یک زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از بردارهای فرادوری لازم و کافی می‌باشند.

بنابراین ما بطور کلی مشخص می‌کنیم که چه وقت عملگرها متعلق به $SC_\infty(l^p)$ می‌باشند.

در اینجا تاکید می‌کنیم که عملگر الحاق انتقال وزن‌دار یکطرفه (یا دوطرفه) که فرادوری باشد دارای طیف نقطه‌ای تهی می‌باشد. چون، می‌دانیم که هر عملگر وزن‌دار یکطرفه (یا دوطرفه) که فرادوری باشد در محک فرادوری صدق می‌کند ([۳۱] را ببینید) و بنابراین طبق گزاره ۱.۶، $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.

در قضیه ۱.۵ در [۱۲] ثابت می‌شود که بستار در نرم آن عملگرهایی که دارای زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از بردارهای فرادوری می‌باشد و آن‌هایی که عملگر الحاقشان دارای طیف نقطه‌ای تهی می‌باشد، برابر است با بستار در نرم عملگرهای فرادوری که عملگر الحاقشان دارای طیف نقطه‌ای تهی می‌باشد. چون خاصیت عضو $SC_\infty(l^p)$ تحت نگاشت تشابه پایا است، می‌توانیم فرض کنیم که وزن‌ها مثبت‌اند. ما قراردادمان را یادآوری می‌کنیم؛ اگر یک عملگر در محک فرادوری برای دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ صدق کند آن‌گاه می‌توانیم فرض کنیم که λ_{n_k} مثبت است.

در طول این فصل، ما قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد که مشخص می‌کند چه موقع یک عملگر انتقال وزن‌دار پسرو از لحاظ دنباله وزن‌ها متعلق به $SC_\infty(l^p)$ می‌باشد.

قضیه ۱.۲: فرض کنید $۱ \leq p < \infty$ و T یک عملگر انتقال وزن‌دار پسرو با دنباله وزنی $\{w_n\}$ باشد که روی فضای l^p تعریف شده است، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) عملگر T در محک فرادوری و شرط $B_{\circ}$ برای دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ صدق می‌کند.

ب) دنباله اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت $\{m_j\}$ و دنباله $\{q(n)\}$ موجودند به قسمی که:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(\limsup_{m_j>n}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} w_{m_j-n+i}}{\min_{q\leq q(n)}\prod_{i=1}^{n} w_{q+i}}\right)\right)=0.$$

ج) یک زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از بردارهای فرادوری برای T موجود باشد.

قضیه ۳.۱ نشان می‌دهد که (الف)، (ج) را نتیجه می‌دهد. برای باقیمانده اثبات نشان می‌دهیم که (الف) و (ب) معادلند و (ج)، (الف) را نتیجه می‌دهد.

آغاز می‌کنیم با اثبات اینکه در قضیه فوق، (ب)، (الف) را نتیجه می‌دهد. بنابراین ما شرایط کافی روی وزن‌ها را برای عملگر انتقال وزن‌دار یکطرفه داریم تا بررسی کنیم که چه موقع عضو $SC_{\infty}(l^p)$ می‌باشند.

قضیه ۲.۲: فرض کنید $1\leq p<\infty$ و T یک عملگر انتقال وزن‌دار پسرو با دنباله وزنی $\{w_n\}$ باشد که روی فضای l^p تعریف شده است. اگر یک دنباله اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت $\{m_j\}$ و یک دنباله $\{q(n)\}$ موجود باشد به قسمی که:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(\limsup_{m_j>n}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} w_{m_j-n+i}}{\min_{q\leq q(n)}\prod_{i=1}^{n} w_{q+i}}\right)\right)=0 \qquad (1)$$

آنگاه T در فرض‌های قضیه ۳.۱ صدق می‌کند. بنابراین، T دارای یک زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از بردارهای فرادوری می‌باشد.

اثبات: شرط (۱–۲) نتیجه می‌دهد که یک دنباله از اعداد صحیح مثبت $\{n_k\}$ وجود دارد بقسمی که:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\sup_{m_j>n}\frac{\prod_{i=1}^{n_k} w_{m_j-n_k+i}}{\min_{q\leq q(n)}\prod_{i=1}^{n} w_{q+i}}\right)=0 \tag{۲}$$

زیرا اگر فرض کنید:

$$S_{n,m_j}=\frac{\prod_{i=1}^{n} w_{m_j-n+i}}{\min_{q\leq q(n)}\prod_{i=1}^{n} w_{q+i}}$$

آنگاه داریم:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\ \limsup_{m_j>n}\ S_{n,m_j}=0$$

پس زیردنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ موجود است که

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\ \limsup_{m_j>n}\ S_{n_k,m_j}=0$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\limsup\ S_n=\limsup_{N\longrightarrow\infty}\ \{S_n : n>N\}$$

بنابراین

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\ \limsup_{n_k\longrightarrow\infty}\ \{S_{n_k,m_j} : m_j>n_k\}=0$$

در نتیجه

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\ \sup_{m_j>n_k}\ S_{n_k,m_j}=0.$$

با استخراج کردن دوباره یک زیردنباله، می‌توانیم فرض کنیم برای هر j, k، $n_k \neq m_j$. حال اگر قرار دهیم:

$$A_{n_k} = \sup_{m_j > n_k} \prod_{i=1}^{n_k} w_{m_j - n_k + i}$$

و

$$B_{n_k} = \min_{q \leq q(n_k)} \prod_{i=1}^{n_k} w_{q+i}$$

آنگاه طبق (۲-۲) داریم:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{A_{n_k}}{B_{n_k}} = 0.$$

در نتیجه

$$\frac{A_{n_k}}{B_{n_k}} < \frac{1}{4^k}$$

پس

$$\frac{2^k}{B_{n_k}} < \frac{1}{2^k A_{n_k}}$$

بنابراین λ_{n_k} موجود است که

$$\frac{2^k}{B_{n_k}} < \lambda_{n_k} < \frac{1}{2^k A_{n_k}}$$

در نتیجه چون $\lambda_{n_k} B_{n_k} > 2^k$، داریم:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_{n_k} B_{n_k} = \infty.$$

پس ما می‌توانیم دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$ را بدست آوریم که

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_{n_k} \min_{q \leq q(n_k)} \prod_{i=1}^{n_k} w_{q+i} = \infty$$

و از طرفی چون $\lambda_{n_k}A^{n_k} < \frac{۱}{۲k}$، پس

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \lambda_{n_k} \sup_{m_j>n_k} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{m_j-n_k+i} = ۰$$

لذا

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \lambda_{n_k}\Big(\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}\Big) \sup_{m_j>n_k} \Big\{\frac{\prod_{i=۱}^{n_k} w_{m_j-n_k+i}}{\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}}\Big\} = ۰$$

طبق (۲) در گزاره ۴.۱ می‌بینیم که T در محک فرادوری، برای دنباله $\{\lambda_{n_k}\}$، صدق می‌کند. حال تعریف می‌کنیم $\mathcal{B}_۰ = \overline{span}\{e_{m_j}\}$. فرض کنید $e = \sum_{j=۱}^{\infty}\alpha_j e_{m_j} \in \mathcal{B}_۰$. چون $n_k \neq m_j$ به ازای هر j,k داریم:

$$\begin{aligned}
\|\lambda_{n_k}T^{n_k}e\| &= \|\lambda_{n_k}T^{n_k}(\sum_{j=۱}^{\infty}\alpha_j e_{m_j})\| \\
&= \|\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_{n_k}\alpha_j T^{n_k} e_{m_j}\| \\
&= \lambda_{n_k}\|\sum_{m_j>n_k}^{\infty}\alpha_j \prod_{i=۱}^{n_k} w_{m_j-n_k+i} e_{m_j-n_k}\| \\
&= \lambda_{n_k}\Big(\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}\Big)\|\sum_{m_j>n_k}^{\infty}\alpha_j \frac{\prod_{i=۱}^{n_k} w_{m_j-n_k+i}}{\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}} e_{m_j-n_k}\| \\
&\leq \lambda_{n_k}\Big(\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}\Big) \sup \frac{\prod_{i=۱}^{n_k} w_{m_j-n_k+i}}{\min_{q\leq q(n_k)} \prod_{i=۱}^{n_k} w_{q+i}} \|\sum_{m_j>n_k}\alpha_j e_{m_j-n_k}\|
\end{aligned}$$

که وقتی k به سمت ∞ میل می‌کند، به سمت صفر نزدیک می‌شود. بنابراین تمام فرض‌های قضیه ۳.۱ برقرار است و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

طبق قضیه ۵.۱ می‌بینیم که شرایط قضیه بالا، وقتیکه $۰ \in \sigma_e(T)$ برقرار است. حال اگر $۰ \notin \sigma_e(T)$