بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه رازی

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

فرابرد کوانتومی حالت‌های درهم تنیده

استاد راهنما:

دکترشاهپور مرادی

نگارش:

نوروز خدایاری

مهرماه ۱۳۹۱

چکیده

فرآیند فرابرد کوانتومی عبارت است از انتقال یک حالت کوانتومی نامعلوم از یک مکان به مکان دیگر. این پدیده که ناشی از همبستگی کوانتومی مابین فرستنده و گیرنده است،با بکارگیری حالت‌های کوانتومی درهم تنیدهبه عنوان کانال کوانتومی، ارتباط دوربرد را امکان پذیر می‌سازد.هدف از این رساله، مطالعه نظری پدیده فرابرد کوانتومی حالت‌های درهم تنیده دو کیوبیتی و سه کیوبیتی و بررسی امکان فرابرد کوانتومی با استفاده از کانال‌های کوانتومی مختلف است. نشان داده می‌شود که برای حالت‌های درهم تنیده مختلف چه نوع کانال‌هایی می‌توانند فرابرد کوانتومی را میسر سازند.همچنین، فرابرد کوانتومی تجربی یک ویژگی فوتون (قطبش فوتون) مورد بررسی قرار می‌گیرد و این نتیجه مهم که درهم تنیدگی کوانتومی، یک خاصیت ذاتی ذرات ویا مربوط به چشمه تولید فوتون نیست، حاصل می‌شود.با توجه به اهمیت و کاربرد فرایند اطلاعات کوانتومی، فرآیند فرابرد کوانتومی می‌تواند برای ارسال اطلاعات با نوفه پایین و امنیت بالا و همچنین، ارتباط بین کامپیوترهای کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: کوانتوم، فرابرد کوانتومی، درهم تنیدگی، کیوبیت، قطبش فوتون

فهرست

عنوان صفحه

فصل دوم: فرابرد کوانتومی تک کیوبیت

فهرست جداول

عنوان صفحه

فهرست شکل‌ها

فصل اول

مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی

و نظریه اطلاعات کوانتومی

۱-۱ مقدمه

در اواخر قرن ۱۹ مشاهده شد که فیزیک کلاسیک نمی‌تواند جوابگوی نتایج برخی از آزمایش‌های تجربی باشد. در این زمان تئوری جدیدی به نام مکانیک کوانتومی بنا نهاده شد. این تئوری پدیده‌های میکروسکوپیک جهان را می‌توانست شرح دهد ، به طوریکه با همه نتایج تجربی سازگار بود. به عنوان مثال، آزمایش اشترن گرلاخ[۱] و آزمایش دو شکاف یانگ[۲] دو نمونه از پدیده‌هایی بود که با استفاده از مکانیک کوانتومی توضیح داده شدند.

در این فصل، ابتدا برخی از تعاریف مربوط به ریاضیات مکانیک کوانتومی را توضیح می‌دهیم و در ادامه، به بحث نظریه اطلاعات کوانتومی و برخی از تعاریف آن که برای موضوع فرابرد کوانتومی ضروری هستند می‌پردازیم.

۱-۲ ریاضیات مکانیک کوانتومی

در این بخش یک نماد گذاری خاص را معرفی می‌کنیم که نماد گذاری دیراک[۳] نامیده می‌شود. از این نمادگذاری در مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود. پس از آشنایی با این نماد گذاری، با عملگرها و عمل آنها روی حالت‌های کوانتومی آشنا می‌شویم.

۱-۲-۱ فضای برداری خطی[۴]

در این فضا، یک بردار ستونی را با استفاده از نماد گذاری دیراک، با نماد $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم و آن را کت[۵] می‌نامیم. و همچنین، بردار سطری را به صورت $\langle\Psi| = (|\Psi\rangle)^\dagger = (\,a^* b^*)$ نمایش می‌دهیم

[1]–The stern-Gerlach experimental

[2]–Young’s double-slit experiment

[3]–dirac

[4]–Linear vector space

[5]–ket

که آنرا دوگان بردار Ψ می‌نامیم و با "برا"[1] نمایش می‌دهیم. دو بردار $|\alpha\rangle$و $|\beta\rangle$وقتی که با هم جمع می‌شوند بردار جدید $|c\rangle$را می‌دهند که به صورت زیر است

$$|c\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle \tag{۱-۱}$$

۱-۲-۲ استقلال خطی

مجموعه‌ای از بردار های $|v_1\rangle$،$|v_2\rangle$، ... و $|v_n\rangle$ را مستقل خطی گوییم، هرگاه:

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_1|v_2\rangle + \cdots \alpha_n|v_n\rangle = 0 \tag{۱-۲}$$

$$\alpha_1 \; + \; \alpha_2 \; + \cdots \alpha_n \; = 0 \tag{۱-۳}$$

به بیان دیگر، هیچکدام از بردارها را نتوان به صورت ترکیبی خطی از دیگر بردارها نوشت.

۱-۲-۳ ضرب داخلی

برای محاسبه طول یک بردار نیازمند ضرب داخلی بردارها هستیم.دو بردار $|u\rangle$ و $|v\rangle$را در فضای برداری در نظر می گیریم. ضرب داخلی این دو بردار به صورت $\langle u|v\rangle$ تعریف می‌شود. اگر برابر صفر باشد دو بردار را متعامد گوییم. ضرب داخلی دو بردار یک عدد مختلط است که مزدوج مختلط آن به صورت

$\langle u|v\rangle^* = \langle v|u\rangle$ تعریف می‌شود.

ضرب داخلی عملی خطی است. یعنی، اگر $|u\rangle$، $|v\rangle$ و $|w\rangle$ بردار باشند و α، β و γ اعداد مختلط باشند:

$$\langle u|\alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u|v\rangle + \beta\langle u|w\rangle \quad , \quad \langle \alpha u + \beta v|w\rangle = \alpha^*\langle u|w\rangle + \beta^*\langle v|w\rangle$$

برای محاسبه ضرب داخلی باید مزدوج هرمیتی بردار را حساب کنیم. یعنی باید $\langle u| = (|u\rangle)^+$ را محاسبه کنیم.

۱-۲-۴ نرم (طول) یک بردار

طول یا نرم یک بردار به صورت $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$ تعریف می شود. شرط مهمی که روی نرم بردار وجود دارد آن است که $\|u\| \geq 0$است که صفر مربوط به بردار صفر ($|u\rangle = 0$) است.

[1]-Bra

۱-۲-۵ پایه‌ها و بعد فضا

در صورتی که بردارهای $|v_n\rangle$ ... $|v_2\rangle$،$|v_1\rangle$ فضای v را تبیین کنند و مسقل خطی نیز باشند، این مجموعه را پایه‌های فضا و تعداد این بردارها را بعد فضا می‌گویند.

از دیدگاه کوانتومی، یک حالت کوانتومی بر حسب بردارهای پایه فضا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \cdots \alpha_n|v_n\rangle \tag{۱-۴}$$

که $|\alpha_i|^2$ احتمال آن است که سیستم پس از اندازه‌گیری در حالت $|v_i\rangle$ یافت شود.

۱-۲-۶ - بهنجارش

بهنجارش از اهمیت زیادی برخوردار است. زیرا، جمع احتمال‌ها باید برابر با یک باشد.

بردار $|a\rangle$ را بهنجار به یک گوییم اگر : $\langle a|a\rangle = 1$ یا نرم آن برابر با یک باشد: $\left||a\rangle\right| = 1$.

اگر پایه‌های فضا بهنجار به یک باشند، آن پایه‌ها را اورتونرمال[1] می‌گویند.

۱-۲-۷ **عملگر**[2]

عملگر یک قاعده ریاضی است که بر یک تابع اعمال می‌شود و تابع دیگری را نتیجه می‌دهد.

به عنوان مثال، عملگر مشتق:

$$\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \rightarrow \mathrm{Df(x)} = \frac{\partial \mathrm{f(x)}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{g(x)}$$

این تعریف را می‌توان به فضای برداری نیز اعمال نمود. در این حالت اگر $\hat{A}$ یک عملگر باشد، با اعمال روی یک کت $|\varphi\rangle$ ، کت $|x\rangle$ به دست می‌آید:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = |x\rangle \tag{۱-۵}$$

همچنین عملگرها می‌توانند روی برا نیز عمل کنند:

---

[1]orthonormal

[2]operator

$$\langle u|\hat{A} = \langle v| \quad (۱-۶)$$

یک عملگر را خطی گویند اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\hat{A}(\alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle) = \alpha(\hat{A}|\varphi_1\rangle) + \beta(\hat{A}|\varphi_2\rangle) \quad (۱-۷)$$

به طوریکهαوβ اعداد مختلط و $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ بردارهایی در فضای هیلبرت می‌باشند.

۱-۲-۷-۱ مزدوج هرمیتی

مزدوج هرمیتی عملگر$\hat{A}$ که با $A^\dagger$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر است:

$$\langle a|A^\dagger|b\rangle = (\langle b|A|a\rangle)^* \quad (۱-۸)$$

عمل مزدوج هرمیتی به این صورت است: ابتدا مزدوج مختلط تمام ثابت‌ها را می گیریم، کت‌ها را با براها جابجا می کنیم و بجای عملگر، الحاقی آن را قرار می‌دهیم.

۱-۲-۷-۲ عملگر هرمیتی[۱]

عملگری است که مزدوج هرمیتی آن با خودش برابر باشد:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

۱-۲-۷-۳ عملگر یکانی[۲]

عملگری است که معکوس آن با مزدوج هرمیتی‌اش برابر باشد:

$$U^\dagger = U^{-1}$$

عملگر یکانی از دیدگاه کت و برا به صورت $\langle\Phi|A^\dagger|\Psi\rangle = \langle\Psi|A|\Phi\rangle^\dagger$تعریف می‌شود.

۱-۲-۷-۴ عملگر نرمال[۳]

عملگر $\hat{A}$ را نرمال گویند اگر:

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$$

---

[1]Hermitian operator
1 Unitary operator
[3]Normal operator

۱-۲-۷-۵ عملگر تصویرگر[1]

اگر $|\Psi\rangle$ یک کت باشد، عملگر تصویرگر بر اساس این بردار به صورت $P = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ تعریف می‌شود.

خواص عملگر تصویرگر:

۱) $P|\Psi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$

۲) $P^2 = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| = P$

۳) اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویرگر باشند که با هم جابجا می‌شوند، حاصل ضرب این دو عملگر هم تصویرگر است.

$$(P_1P_2)(P_1P_2) = P_1P_2P_1P_2 = P_1P_1P_2P_2 = P_1P_2$$

۱-۲-۷-۶ عملگر مثبت[2]

عملگر A را در فضای برداری V^n در نظر می گیریم. عملگر A را معین مثبت می‌نامیم هرگاه برای تمام $|\Psi\rangle \in \mathrm{V}^n$ داشته باشیم که:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0$$

۱-۲-۷-۷ ویژه مقادیر[3] و ویژه بردارها[4]

یک بردار $|\varphi\rangle$ را ویژه کت و یا ویژه بردار عملگر $\hat{A}$ گویند، هرگاه: $\hat{A}|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$ که λ یک عدد مختلط است. λ را ویژه مقدار $\hat{A}$ که وابسته به ویژه کت $|\varphi\rangle$ است، می‌نامند.

اگر دو یا چند ویژه کت وابسته به یک ویژه مقدار باشد، می گوییم که این حالت‌ها تبهگن هستند.

قضیه: ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند. ویژه کت‌های عملگر هرمیتی متعامد هستند[۲].

[1] Projective operator
[2] Positive Operator
[3] Eigen value
[4] Eigen Vector

۱-۲-۷-۸ مشاهده پذیرها[1]

در نظریه مکانیک کوانتومی، به هر متغیر دینامیکی مانند مکان، انرژی و غیره، یک عملگر هرمیتی نسبت داده می‌شود زیرا، ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند. در واقع، ویژه مقادیر این عملگرها طیف آن متغیرهای دینامیکی را مشخص می‌کنند. به عنوان مثال، ویژه مقادیر عملگر هامیلتونین طیف انرژی سیستم را مشخص می‌کند.

۱-۲-۷-۹ اندازه‌گیری[2]

هر کمیتی که قابل اندازه‌گیری باشد، عملگری هرمیتی به آن وابسته است که ویژه بردارهای عملگر هرمیتی کامل هستند. بدین ترتیب حالت سیستم که توسط بردار $|\Psi\rangle$ توصیف می‌شود را می‌توان بر حسب این ویژه کت‌ها بسط داد و اگر این ویژه کت‌ها را با $\{|\Phi_i\rangle\}$ نمایش دهیم، داریم:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \langle \Phi_i | \Psi \rangle | \Phi_i \rangle$$

۱-۲-۷-۱۰ ضرب خارجی

حاصل‌ضرب کت $|\Psi\rangle$ در "برا"ی $\langle\Phi|$ که به صورت $|\Psi\rangle\langle\Phi|$ نوشته می‌شود را ضرب خارجی می‌گویند. حاصل‌ضرب خارجی برخلاف ضرب داخلی یک عدد اسکالر نیست بلکه، حاصل آن یک عملگر است.

نمایش ماتریسی عملگرها: عملگرها در فضای n بعدی را می‌توان به صورت ماتریس‌های $n\times n$ در نظر گرفت که روی بردارهای ستونی $n\times 1$ اثر می‌کند.

۱-۲-۷-۱۱ ضرب خارجی و نمایش ماتریسی

می‌خواهیم نشان دهیم که ضرب خارجی یک کت و برا، یک عملگر است. درمورد فضای دو بعدی این موضوع را بررسی می‌کنیم:

دو کت $|\Psi\rangle$ و $|\Phi\rangle$ را در فضای دو بعدی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad , \qquad |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ابتدا $\langle\Phi|$ را به دست می‌آوریم: $\langle\Phi| = (|\Phi\rangle)^\dagger = (\, c^* d^*)$

---

[1] observables
[2] Measurement

$$|\Psi\rangle\langle\Phi| = \binom{a}{b}(c^* \quad d^*) = \begin{bmatrix} a(c^*d^*) \\ b(c^*d^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{bmatrix}$$

۱-۲-۷-۱۲ رد[1] یک عملگر

در جبر ماتریسی به مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس "رد" آن ماتریس می گویند:

$$Tr\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$$

در حالت کلی، "رد" یک عملگر $\hat{A}$به صورت زیر است:

$$Tr(\hat{A}) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|A|u_i\rangle$$

که $|u_i\rangle$ پایه های فضا هستند.

۱-۲-۷-۱۳ مقدار چشمداشتی یک عملگر

فرض کنید که حالت کوانتومی سیستم $|\Psi\rangle$ است. می‌خواهیم عملگر A را که یک مشاهده پذیر فیزیکی است روی این حالت اندازه‌گیری کنیم. میانگین اندازه‌گیری A را مقدار چشمداشتی عملگر A می گوییم.

$$\langle A\rangle = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

۱-۲-۷-۱۴ اصل عدم قطعیت

عدم قطعیت یا انحراف معیار عملگر Aبه صورت$\Delta A = \sqrt{(\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2)}$بیان می‌شود.

بر اساس این عدم قطعیت، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|<[A,B]>|$$

مفهوم فیزیکی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ این است که اندازه‌گیری همزمان دو عملگر که با هم جابجا نمی‌شوند به طور دقیق امکانپذیر نیست. به عنوان مثال، در مورد مکان و اندازه‌حرکت خطی:

$$[X,P] = i\hbar \rightarrow \Delta X\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

---

[1]Trace

هرچقدر اندازه‌گیری ΔP دقیق باشد، دقت در مورد اندازه‌گیری مکان کمتر می‌شود و بالعکس.

۱–۳ نظریه کوانتومی اندازه‌گیری

در این بخش دو نوع از اندازه‌گیری‌های کوانتومی را معرفی می‌کنیم. این دو نوع اندازه‌گیری که روی پایه‌-های اورتو نرمال انجام می‌شوند، اندازه‌گیری تصویری و اندازه‌گیری POVM هستند.

۱–۳–۱ اندازه‌گیری تصویرگر

برای این نوع اندازه‌گیری که اندازه‌گیری ون–نیومن[1]نیز نامیده می‌شود،یک سیستم دوحالته مانند اتمی که دو حالت پایه و برانگیخته برای آن متصور هستیم، در نظر می‌گیریم. حالت پایه را با $\langle 0|$ و حالت برانگیخته را با $\langle 1|$ نشان می‌دهیم. هدف آن است که احتمال بودن اتم در یکی از این حالت‌ها و همچنین حالت اتم پس از اندازه‌گیری مشخص شود.

وابسته به هرکدام از حالت‌ها (حالت‌های پایه و برانگیخته یا $\langle 0|$ و$\langle 1|$) یک عملگر تصویرگر وجود دارد. به عنوان نمونه، در مورد حالت‌های $\langle 0|$و $\langle 1|$داریم:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \quad , \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|$$

عملگر تصویری یا تصویرگر دارای خاصیت‌های زیر است:

$$P^2 = P \quad , \qquad P^+ = P \quad , \quad P_0 + P_1 = \hat{I}$$

و همچنین، اگر $\{P_1 , P_2 , ...\}$ عملگر تصویرگر داشته باشیم، رابطه بین آنها به صورت زیر است:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

حال، احتمال بدست آوردن خروجی i ام پس از اندازه‌گیری با استفاده از عملگر تصویرگر به صورت زیر در می‌آید:

$$P_r(i) = |\langle P_i|\varphi\rangle|^2 = \langle \varphi_r|P_i^+ P_i|\varphi_r\rangle = \langle \varphi_r|P_i^2|\varphi_r\rangle = \langle \varphi_r|P_i|\varphi_r\rangle \qquad (۱–۹)$$

که رابطه (۱–۹) همان مقدار چشمداشتی P_i روی φ است.

در اینجا، φ را برحسب ویژه کت‌های پایه $\langle u_j|$می‌نویسیم:

$$|\varphi\rangle = \sum_j |u_j\rangle \langle u_j|\varphi\rangle \qquad . \quad P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$P_i|\varphi\rangle = \sum_j |u_i\rangle \langle u_i|u_j\rangle\langle u_j|\varphi\rangle = \langle u_i|\varphi\rangle|u_i\rangle \, .$$

[1]–Von-Neumann

$$\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle = \left(\sum_j\langle u_j|\varphi\rangle|u_j\rangle\right)^{+}\langle u_i|\varphi\rangle|u_i\rangle = \sum_i\sum_j\langle\varphi|u_j\rangle\langle u_j|u_i\rangle\langle u_i|\varphi\rangle$$

$$\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle = |\langle u_i|\varphi\rangle|^2 = Tr(\, P_i|\varphi\rangle).$$

می‌دانیم که حالت سیستم پس از اندازه‌گیری به یکی از ویژه کت‌های پایه فضا می‌رود. برحسب عملگرهای تصویرگر، حالت سیستم پس از اندازه‌گیری به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|\varphi'\rangle = \frac{P_i|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle}}$$

به عنوان مثال، دیدیم که:

$$P_i|\varphi\rangle = \langle u_i|\varphi\rangle|u_i\rangle \rightarrow\ |u_i\rangle = \frac{P_i|\varphi\rangle}{\langle u_i|\varphi\rangle} => |\varphi'\rangle = \frac{P_i|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle}}$$

۱-۳-۲ اندازه‌گیری POVM[1]

در مکانیک کوانتومی، اندازه‌گیری تصویری محدود کننده است و همیشه امکان پذیر نیست. گاهی اوقات در فرایند اندازه‌گیری، حالت ذره کوانتومی از بین می‌رود. بنابر این، اندازه‌گیری مجدد تصویری امکان پذیر نیست. به عنوان نمونه، اگر یک سیستم دارای حالت کوانتومی

$|\Psi\rangle = \sum c_i\,|u_i\rangle$ باشد، یک اندازه‌گیری تصویری $|u_k\rangle\langle u_k|$، تابع موج را به $|u_k\rangle$ می‌برد (فرو می‌ریزد). اگر اندازه‌گیری را روی سیستم تکرار کنیم، با اطمینان سیستم را در حالت $|u_k\rangle$ خواهیم یافت. اندازه‌گیری تصویری را در دنیای واقعی نیز نمی‌توان به کار برد. در آزمایشگاه، هنگام آشکارسازی یک فوتون، فوتون از بین می‌رود. و یا هنگامی که یک فوتون به یک فیلتر پلاروید شلیک می‌شود توسط فیلتر جذب می‌شود و اندازه‌گیری دیگری نمی‌توان روی آن انجام داد. یک نوع اندازه‌گیری که تعمیم یافته‌تر از اندازه‌گیری تصویری است، اندازه‌گیری POVM نام دارد. یک POVM شامل دسته‌ای از عملگرهای مثبت است که عموما با E_i نشان داده می‌شود. برخلاف عملگرهای تصویری که تعداد آنها برابر با ابعاد فضای هیلبرت است، شمار عملگرهای POVM ممکن است با ابعاد فضای هیلبرت متفاوت باشد.

عملگرهای اندازه‌گیری در یک POVM می‌توانند از یک دسته عملگرهای اندازه‌گیری اختیاری $\{m_i\}$ به صورت $E_i = m_i^{+}m_i$ بدست آیند و $\sum E_i = \mathrm{I}$. عملگرهای E_i دارای چند خاصیت هستند:

(i) معین مثبت هستند. یعنی، دارای ویژه مقادیر مثبت و حقیقی‌اند.

[1] Positive Operator Valued Measures

(ii) احتمال نتیجه اندازه‌گیری i به صورت $p_i = \langle\Psi|E_i|\Psi\rangle$ داده می‌شود که از $p_i = \langle\Psi|m_i^{+}m_i|\Psi\rangle$ به دست می‌آید.

دسته عملگرهای $\{E_i\}$ می‌تواند به جای دسته عملگرهای $\{m_i\}$برای تخمین احتمال‌های اندازه‌گیری استفاده شود.

وقتی که سیستم یک حالت آمیخته باشد، به وسیله ماتریس چگالی ρ شرح داده می‌شود. در این موارد، احتمال به دست آوردن نتیجه اندازه‌گیری iبه وسیله $Tr(E_i\rho)$ داده می‌شود.

مثال ۱: یک سیستم کوانتومی در حالت $|\Psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle$ قرار دارد. می‌خواهیم احتمال‌های اندازه-گیری ۰ و ۱ را در روشPOVM پیدا کنیم. در موارد یک کیوبیتی، اندازه‌گیری POVM را با استفادهاز عملگرهای تصویری انجام می‌دهیم. در این مثال، $E_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $E_1 = |1\rangle\langle 1|$ را تعیین می‌کنیم که $\sum_i E_i = E_0 + E_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathrm{I}$.

نمایش ماتریسی این عملگرها در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$به صورت

$$E_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad E_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

است. هرکدام از این ماتریس‌ها دارای دو ویژه مقدار $\{1,0\}$ هستند که نشان دهنده مثبت بودن عملگرها است. با استفاده از$P(i) = \langle\Psi|E_i|\Psi\rangle$ احتمال‌های مربوطه را حساب می‌کنیم.

$$P(0) = \langle\Psi|E_0|\Psi\rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right)(|0\rangle\langle 0|)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) = \frac{4}{5}$$

$$\mathrm{P}(1) = \langle\Psi|E_1|\Psi\rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right)(|1\rangle\langle 1|)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) = \frac{1}{5}$$

مثال ۲: در این مثال می‌خواهیم اندازه‌گیری POVM را روی یک سیستم مخلوط دو حالته بررسی کنیم.

حالت‌های کوانتومی را به صورت

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad |\Psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

در نظر می‌گیریم. ما POVM را با سه عملگر در نظر می‌گیریم. دوتای اول را

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1| = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}(0 \quad 1) = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

و