

الله الرحمن الرحيم



دانشگاه رازی

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

فرابرد کوانتومی حالت‌های درهم تنیده

استاد راهنما:

دکترشاهیپور مرادی

نگارش:

نوروز خدایاری

مهرماه ۱۳۹۱

چکیده

فرآیند فرابرد کوانتومی عبارت است از انتقال یک حالت کوانتومی نامعلوم از یک مکان به مکان دیگر. این پدیده که ناشی از همبستگی کوانتومی مابین فرستنده و گیرنده است، با بکارگیری حالت‌های کوانتومی درهم تنیده به عنوان کانال کوانتومی، ارتباط دوربرد را امکان پذیر می‌سازد. هدف از این رساله، مطالعه نظری پدیده فرابرد کوانتومی حالت‌های درهم تنیده دو کیوبیتی و سه کیوبیتی و بررسی امکان فرابرد کوانتومی با استفاده از کانال‌های کوانتومی مختلف است. نشان داده می‌شود که برای حالت‌های درهم تنیده مختلف چه نوع کانال‌هایی می‌توانند فرابرد کوانتومی را میسر سازند. همچنین، فرابرد کوانتومی تجربی یک ویژگی فوتون (قطبش فوتون) مورد بررسی قرار می‌گیرد و این نتیجه مهم که درهم تنیدگی کوانتومی، یک خاصیت ذاتی ذرات ویا مربوط به چشمه تولید فوتون نیست، حاصل می‌شود. با توجه به اهمیت و کاربرد فرایند اطلاعات کوانتومی، فرآیند فرابرد کوانتومی می‌تواند برای ارسال اطلاعات با نوفه پایین و امنیت بالا و همچنین، ارتباط بین کامپیوترهای کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: کوانتوم، فرابرد کوانتومی، درهم تنیدگی، کیوبیت، قطبش فوتون

فصل اول: مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی

۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ ریاضیات مکانیک کوانتومی
۲	۱-۲-۱ فضای برداری خطی
۳	۲-۲-۱ استقلال خطی
۳	۳-۲-۱ ضرب داخلی
۳	۴-۲-۱ نرم (طول) یک بردار
۴	۵-۲-۱ پایه‌ها و بعد فضا
۴	۶-۲-۱ بهنجارش
۴	۷-۲-۱ عملگر
۵	۱-۷-۲-۱ مزدوج هرمیتی
۵	۲-۷-۲-۱ عملگر هرمیتی
۵	۳-۷-۲-۱ عملگر یکانی
۵	۴-۷-۲-۱ عملگر نرمال
۶	۵-۷-۲-۱ عملگر تصویرگر
۶	۶-۷-۲-۱ عملگر مثبت
۶	۷-۷-۲-۱ ویژه مقادیر و ویژه بردارها
۷	۸-۷-۲-۱ مشاهده پذیرها
۷	۹-۷-۲-۱ اندازه گیری
۷	۱۰-۷-۲-۱ ضرب خارجی

- ۷-۲-۱۱ ضرب خارجی و نمایش ماتریسی ۷
- ۸-۲-۱۲ رد یک عملگر ۸
- ۸-۲-۱۳ مقدار چشمداشتی یک عملگر ۸
- ۸-۲-۱۴ اصل عدم قطعیت ۸
- ۳-۱ نظریه کوانتومی اندازه گیری ۹
- ۱-۳-۱ اندازه گیری تصویرگر ۹
- ۲-۳-۱ اندازه گیری POVM ۱۰
- ۴-۱ ضرب تانسوری ۱۳
- ۱-۴-۱ ماتریس عملگر تانسور ۱۵
- ۵-۱ ماتریس چگالی ۱۵
- ۶-۱ نظریه اطلاعات کوانتومی ۱۷
- ۱-۶-۱ بیت کلاسیکی ۱۸
- ۲-۶-۱ کیوبیت ۱۹
- ۱-۲-۶-۱ تصور هندسی کیوبیت ۲۰
- ۲-۲-۶-۱ حالت های دو کیوبیتی ۲۱
- ۳-۲-۶-۱ حالت های سه کیوبیتی ۲۱
- ۷-۱ گیت ۲۲
- ۱-۷-۱ گیت های کلاسیکی ۲۲
- ۱-۱-۷-۱ گیت های تک بیتی ۲۲
- ۲-۱-۷-۱ گیت های دوبیتی ۲۲
- ۲-۷-۱ گیت های کوانتومی ۲۳
- ۱-۲-۷-۱ گیت های تک کیوبیتی ۲۳

- ۲۳..... ۱-۲-۷-۱ گیت‌ها یا عملگرهای پائولی
- ۲۴..... ۱-۲-۷-۱ گیت هادامارد
- ۲۴..... ۲-۲-۷-۱ گیت‌های چند کیوبیتی
- ۲۵..... ۸-۱ درهم تنیدگی
- ۲۵..... ۱-۸-۱ حالت‌های درهم تنیده
- ۲۷..... ۱-۱-۸-۱ درهم تنیدگی چندجزیی
- ۲۷..... ۱-۱-۱-۸-۱ حالت‌های خالص
- ۲۸..... ۲-۱-۱-۸-۱ حالت‌های دسته GHZ
- ۲۸..... ۳-۱-۱-۸-۱ حالت‌های موسوم به W (W-Class)
- ۳۱..... ۴-۱-۱-۸-۱ حالت‌های آمیخته
- ۳۱..... ۲-۸-۱ پارادوکس EPR
- ۳۴..... ۳-۸-۱ نامساوی بل
- ۳۵..... ۱-۳-۸-۱ مدل متغیرهای پنهان (LHV) و نامساوی بل CHSH

فصل دوم: فرابرد کوانتومی تک کیوبیت

- ۴۰..... ۱-۲ مقدمه
- ۴۱..... ۲-۲ فوتون و قطبش فوتون
- ۴۱..... ۱-۲-۲ قطبش خطی
- ۴۱..... ۲-۲-۲ اندازه‌گیری قطبش خطی
- ۴۴..... ۳-۲ فرابرد کوانتومی
- ۴۴..... ۱-۳-۲ تعریف فرابرد کوانتومی
- ۴۴..... ۲-۳-۲ انتقال کیوبیت
- ۴۴..... ۱-۲-۳-۲ مشکلات موجود در راه انتقال کیوبیت

- ۴۵..... ۲-۲-۳-۲ قضیه عدم شبیه سازی
- ۴۶..... ۳-۲-۳-۲ کانال ارتباطی در ارسال کیوبیت
- ۴۶..... ۴-۲-۳-۲ کانال کوانتومی
- ۴۷..... ۴-۲ شرح فرابرد کوانتومی تک کیوبیتی
- فصل سوم: فرابرد حالت‌های درهم تنیده دو کیوبیتی و سه کیوبیتی**

- ۵۱..... ۱-۳ فرابرد حالت‌های درهم تنیده دو کیوبیتی
- ۵۱..... ۱-۱-۳ فرابرد حالت دو کیوبیتی با استفاده از کانال GHZ
- ۵۳..... ۲-۱-۳ فرم کلی فرابرد حالت دو کیوبیتی
- ۵۵..... ۱-۲-۱-۳ فرابرد حالت دو کیوبیتی با استفاده از کانال $g1$
- ۵۶..... ۳-۱-۳ فرابرد حالت دو کیوبیتی اشتراکی در محل فرستنده
- ۶۰..... ۲-۲ فرابرد کوانتومی حالت درهم تنیده سه کیوبیتی
- ۶۱..... ۱-۲-۳ فرابرد حالت سه کیوبیتی با استفاده از دو حالت درهم تنیده
- ۶۴..... ۲-۲-۳ فرابرد حالت کوانتومی سه-ذره‌ای با استفاده از سه جفت دو-ذره‌ای درهم تنیده

فصل چهارم: شرح فرابرد کوانتومی تجربی

- ۶۹..... ۱-۴ مقدمه
- ۶۹..... ۲-۴ کدگذاری کیوبیت‌ها و درهم تنیدگی در فوتون‌های قطبیده
- ۷۱..... ۳-۴ تولید فوتون‌های درهم تنیده
- ۷۱..... ۱-۳-۴ چشمه‌های اتمی
- ۷۳..... 4-3-2 تبدیل پایین پارامتری
- ۷۷..... ۳-۳-۴ چشمه‌های نیمه‌هادی
- ۸۰..... ۴-۴ مشاهده درهم تنیدگی و اندازه‌گیری همبستگی قطبش
- ۸۲..... ۵-۴ شرح یک کار عملی فرابرد

- ۸۴..... ۱-۵-۴ شرح تجربی فرابرد کوانتومی
- ۸۵..... ۱-۱-۵-۴ آماده کردن حالت ناشناخته برای فرابرد شدن
- ۸۵..... ۲-۱-۵-۴ تولید جفت فوتون درهم تنیده
- ۸۷..... ۳-۱-۵-۴ اندازه گیری حالت های بل و کامل شدن فرابرد کوانتومی
- ۸۷..... ۶-۴ کارهای تجربی گزارش شده

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول ۱-۳	۵۶
جدول ۲-۳	۶۵

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۱: نمایش کیوبیت با استفاده از کره بلوخ	۲۱
شکل ۱-۲: نامساوی بل	۳۵
شکل ۴-۱: نمودار آبشار اتمی کلسیم	۷۱
شکل ۴-۲: تولید جفت درهم تنیده با استفاده از روش تبدیل پایین پارامتری	۷۳
شکل ۴-۳: تولید جفت درهم تنیده با استفاده از شکافنده پرتو	۷۴
شکل ۴-۴: انطباق مخروطی	۷۵
شکل ۴-۵: درهم تنیدگی با روش مخروط‌های هم محور	۷۶
شکل ۴-۶: تولید جفت درهم تنیده با استفاده از تداخل سنج	۷۶
شکل ۴-۷: انتشار دو فوتون آبشاری	۷۸
شکل ۴-۸: تولید اکسایتون با استفاده از تشدید برانگیختگی فوتون	۸۰
شکل ۴-۹: مشاهده درهم تنیدگی	۸۱
شکل ۴-۱۰: هیستوگرام نرخ مقدار تطبیق	۸۲
شکل ۴-۱۱: طرح فرایند فرابرد کوانتومی با استفاده از کاواک	۸۴
شکل ۴-۱۲: شکل شماتیک فرابرد کوانتومی	۸۵
شکل ۴-۱۳: تولید جفت درهم تنیده	۸۶
شکل ۴-۱۴: شکل کلی فرابرد بین آلیس و باب	۸۷
شکل ۴-۱۵: فرابرد کوانتومی بین جزایر لاپالما و تریف	۸۸

فصل اول

مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی

و نظریه اطلاعات کوانتومی

۱-۱ مقدمه

در اواخر قرن ۱۹ مشاهده شد که فیزیک کلاسیک نمی‌تواند جوابگوی نتایج برخی از آزمایش‌های تجربی باشد. در این زمان تئوری جدیدی به نام مکانیک کوانتومی بنا نهاده شد. این تئوری پدیده‌های میکروسکوپیکی جهان را می‌توانست شرح دهد، به طوریکه با همه نتایج تجربی سازگار بود. به عنوان مثال، آزمایش اشترن گرلاخ^۱ و آزمایش دو شکاف یانگ^۲ دو نمونه از پدیده‌هایی بود که با استفاده از مکانیک کوانتومی توضیح داده شدند.

در این فصل، ابتدا برخی از تعاریف مربوط به ریاضیات مکانیک کوانتومی را توضیح می‌دهیم و در ادامه، به بحث نظریه اطلاعات کوانتومی و برخی از تعاریف آن که برای موضوع فرابرد کوانتومی ضروری هستند می‌پردازیم.

۲-۱ ریاضیات مکانیک کوانتومی

در این بخش یک نماد گذاری خاص را معرفی می‌کنیم که نماد گذاری دیراک^۳ نامیده می‌شود. از این نماد گذاری در مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود. پس از آشنایی با این نماد گذاری، با عملگرها و عمل آنها روی حالت‌های کوانتومی آشنا می‌شویم.

۱-۲-۱ فضای برداری خطی^۴

در این فضا، یک بردار ستونی را با استفاده از نماد گذاری دیراک، با نماد $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |\Psi\rangle$ نمایش می‌دهیم و آن را کت^۵ می‌نامیم. و همچنین، بردار سطری را به صورت $\langle\Psi| = (|\Psi\rangle)^\dagger = (a^* b^*)$ نمایش می‌دهیم

¹-The stern-Gerlach experimental

²-Young's double-slit experiment

³-dirac

⁴-Linear vector space

⁵-ket

که آنرا دوگان بردار Ψ می‌نامیم و با "بر" ^۱ نمایش می‌دهیم. دو بردار $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ وقتی که با هم جمع می‌شوند بردار جدید $|c\rangle$ را می‌دهند که به صورت زیر است

$$|c\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle \quad (1-1)$$

۲-۲-۱ استقلال خطی

مجموعه‌ای از بردارهای $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$ را مستقل خطی گوئیم، هرگاه:

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \dots + \alpha_n|v_n\rangle = 0 \quad (2-1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0 \quad (3-1)$$

به بیان دیگر، هیچکدام از بردارها را نتوان به صورت ترکیبی خطی از دیگر بردارها نوشت.

۳-۲-۱ ضرب داخلی

برای محاسبه طول یک بردار نیازمند ضرب داخلی بردارها هستیم. دو بردار $|u\rangle$ و $|v\rangle$ را در فضای برداری در نظر می‌گیریم. ضرب داخلی این دو بردار به صورت $\langle u|v\rangle$ تعریف می‌شود. اگر برابر صفر باشد دو بردار را متعامد گوئیم. ضرب داخلی دو بردار یک عدد مختلط است که مزدوج مختلط آن به صورت $\langle u|v\rangle^* = \langle v|u\rangle$ تعریف می‌شود.

ضرب داخلی عملی خطی است. یعنی، اگر $|u\rangle, |v\rangle$ و $|w\rangle$ بردار باشند و α, β و γ اعداد مختلط باشند:

$$\langle u|\alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u|v\rangle + \beta\langle u|w\rangle, \quad \langle \alpha u + \beta v|w\rangle = \alpha^*\langle u|w\rangle + \beta^*\langle v|w\rangle$$

برای محاسبه ضرب داخلی باید مزدوج هرمیتی بردار را حساب کنیم. یعنی باید $\langle u| = (|u\rangle)^+$ را محاسبه کنیم.

۴-۲-۱ نرم (طول) یک بردار

طول یا نرم یک بردار به صورت $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$ تعریف می‌شود. شرط مهمی که روی نرم بردار وجود دارد آن است که $\|u\| \geq 0$ است که صفر مربوط به بردار صفر ($|u\rangle = 0$) است.

^۱-Bra

۱-۲-۵ پایه‌ها و بعد فضا

در صورتی که بردارهای $|v_1\rangle, |v_2\rangle \dots |v_n\rangle$ فضای v را تبیین کنند و مستقل خطی نیز باشند، این مجموعه را پایه‌های فضا و تعداد این بردارها را بعد فضا می‌گویند.

از دیدگاه کوانتومی، یک حالت کوانتومی بر حسب بردارهای پایه فضا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |v_i\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle + \dots + \alpha_n |v_n\rangle \quad (۴-۱)$$

که $|\alpha_i|^2$ احتمال آن است که سیستم پس از اندازه‌گیری در حالت $|v_i\rangle$ یافت شود.

۱-۲-۶ - بهنجارش

بهنجارش از اهمیت زیادی برخوردار است. زیرا، جمع احتمال‌ها باید برابر با یک باشد.

بردار $|a\rangle$ را بهنجار به یک گوئیم اگر: $\langle a|a\rangle = 1$ یا نرم آن برابر با یک باشد: $\| |a\rangle \| = 1$.

اگر پایه‌های فضا بهنجار به یک باشند، آن پایه‌ها را اورتونرمال^۱ می‌گویند.

۱-۲-۷ عملگر^۲

عملگر یک قاعده ریاضی است که بر یک تابع اعمال می‌شود و تابع دیگری را نتیجه می‌دهد.

به عنوان مثال، عملگر مشتق:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow Df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = g(x)$$

این تعریف را می‌توان به فضای برداری نیز اعمال نمود. در این حالت اگر \hat{A} یک عملگر باشد، با اعمال روی یک کت $|\varphi\rangle$ ، کت $|x\rangle$ به دست می‌آید:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = |x\rangle \quad (۵-۱)$$

همچنین عملگرها می‌توانند روی برا نیز عمل کنند:

¹orthonormal
²operator

$$\langle u|\hat{A} = \langle v| \quad (6-1)$$

يك عملگر را خطی گویند اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\hat{A}(\alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle) = \alpha(\hat{A}|\varphi_1\rangle) + \beta(\hat{A}|\varphi_2\rangle) \quad (7-1)$$

به طوریکه α و β اعداد مختلط و $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ بردارهایی در فضای هیلبرت می باشند.

۱-۷-۲-۱ مزدوج هرمیتی

مزدوج هرمیتی عملگر \hat{A} که با A^\dagger نمایش داده می شود به صورت زیر است:

$$\langle a|A^\dagger|b\rangle = (\langle b|A|a\rangle)^* \quad (8-1)$$

عمل مزدوج هرمیتی به این صورت است: ابتدا مزدوج مختلط تمام ثابت ها را می گیریم، کت ها را با براها جابجا می کنیم و بجای عملگر، الحاقی آن را قرار می دهیم.

۱-۷-۲-۲ عملگر هرمیتی^۱

عملگری است که مزدوج هرمیتی آن با خودش برابر باشد:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

۱-۷-۲-۳ عملگر یکانی^۲

عملگری است که معکوس آن با مزدوج هرمیتی اش برابر باشد:

$$U^\dagger = U^{-1}$$

عملگر یکانی از دیدگاه کت و برا به صورت $\langle \Phi|A^\dagger|\Psi\rangle = \langle \Psi|A|\Phi\rangle^\dagger$ تعریف می شود.

۱-۷-۲-۴ عملگر نرمال^۳

عملگر \hat{A} را نرمال گویند اگر:

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$$

¹Hermitian operator

²Unitary operator

³Normal operator

۱-۲-۷-۵ عملگر تصویرگر^۱

اگر $|\Psi\rangle$ یک کت باشد، عملگر تصویرگر بر اساس این بردار به صورت $P = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ تعریف می‌شود.

خواص عملگر تصویرگر:

$$P|\Psi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle = |\Psi\rangle(1)$$

$$P^2 = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| = P \quad (۲)$$

(۳) اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویرگر باشند که با هم جابجا می‌شوند، حاصل ضرب این دو عملگر هم تصویرگر است.

$$(P_1 P_2)(P_1 P_2) = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1 P_1 P_2 P_2 = P_1 P_2$$

۱-۲-۷-۶ عملگر مثبت^۲

عملگر A را در فضای برداری V^n در نظر می‌گیریم. عملگر A را معین مثبت می‌نامیم هرگاه برای تمام $|\Psi\rangle \in V^n$ داشته باشیم که:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0$$

۱-۲-۷-۷ ویژه مقادیر^۳ و ویژه بردارها^۴

یک بردار $|\varphi\rangle$ را ویژه کت و یا ویژه بردار عملگر \hat{A} گویند، هرگاه: $\hat{A}|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$ که λ یک عدد مختلط است. λ را ویژه مقدار \hat{A} که وابسته به ویژه کت $|\varphi\rangle$ است، می‌نامند.

اگر دو یا چند ویژه کت وابسته به یک ویژه مقدار باشد، می‌گوییم که این حالت‌ها تبهگن هستند.

قضیه: ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند. ویژه کت‌های عملگر هرمیتی متعامد هستند [۲].

¹Projective operator

²Positive Operator

³Eigen value

⁴Eigen Vector

۱-۲-۷-۸ مشاهده پذیرها^۱

در نظریه مکانیک کوانتومی، به هر متغیر دینامیکی مانند مکان، انرژی و غیره، یک عملگر هرمیتی نسبت داده می شود زیرا، ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند. در واقع، ویژه مقادیر این عملگرها طیف آن متغیرهای دینامیکی را مشخص می کنند. به عنوان مثال، ویژه مقادیر عملگر هامیلتونین طیف انرژی سیستم را مشخص می کند.

۱-۲-۷-۹ اندازه گیری^۲

هر کمیتی که قابل اندازه گیری باشد، عملگری هرمیتی به آن وابسته است که ویژه بردارهای عملگر هرمیتی کامل هستند. بدین ترتیب حالت سیستم که توسط بردار $|\Psi\rangle$ توصیف می شود را می توان بر حسب این ویژه کت ها بسط داد و اگر این ویژه کت ها را با $\{|\Phi_i\rangle\}$ نمایش دهیم، داریم:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \langle \Phi_i | \Psi \rangle |\Phi_i\rangle$$

۱-۲-۷-۱۰ ضرب خارجی

حاصل ضرب کت $|\Psi\rangle$ در "برای" $\langle \Phi|$ که به صورت $\langle \Phi| \Psi \rangle$ نوشته می شود را ضرب خارجی می گویند. حاصل ضرب خارجی برخلاف ضرب داخلی یک عدد اسکالر نیست بلکه، حاصل آن یک عملگر است. نمایش ماتریسی عملگرها: عملگرها در فضای n بعدی را می توان به صورت ماتریس های $n \times n$ در نظر گرفت که روی بردارهای ستونی $1 \times n$ اثر می کند.

۱-۲-۷-۱۱ ضرب خارجی و نمایش ماتریسی

می خواهیم نشان دهیم که ضرب خارجی یک کت و برای، یک عملگر است. در مورد فضای دو بعدی این موضوع را بررسی می کنیم:

دو کت $|\Psi\rangle$ و $|\Phi\rangle$ را در فضای دو بعدی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ابتدا $\langle \Phi|$ را به دست می آوریم: $\langle \Phi| = (|\Phi\rangle)^\dagger = (c^* d^*)$

¹observables
²Measurement

$$|\Psi\rangle\langle\Phi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c^* \quad d^*) = \begin{bmatrix} a(c^*d^*) \\ b(c^*d^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{bmatrix}$$

۱-۲-۷-۱۲ رد^۱ یک عملگر

در جبر ماتریسی به مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس "رد" آن ماتریس می گویند:

$$Tr \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$$

در حالت کلی، "رد" یک عملگر \hat{A} به صورت زیر است:

$$Tr(\hat{A}) = \sum_{i=1}^n \langle u_i | \hat{A} | u_i \rangle$$

که $|u_i\rangle$ پایه های فضا هستند.

۱-۲-۷-۱۳ مقدار چشمداشتی یک عملگر

فرض کنید که حالت کوانتومی سیستم $|\Psi\rangle$ است. می خواهیم عملگر A را که یک مشاهده پذیر فیزیکی است روی این حالت اندازه گیری کنیم. میانگین اندازه گیری A را مقدار چشمداشتی عملگر A می گوئیم.

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

۱-۲-۷-۱۴ اصل عدم قطعیت

عدم قطعیت یا انحراف معیار عملگر A به صورت $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ بیان می شود.

بر اساس این عدم قطعیت، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر بیان می شود:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |$$

مفهوم فیزیکی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ این است که اندازه گیری همزمان دو عملگر که با هم جابجا نمی شوند به طور دقیق امکانپذیر نیست. به عنوان مثال، در مورد مکان و اندازه حرکت خطی:

$$[X, P] = i\hbar \rightarrow \Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

^۱Trace

هرچقدر اندازه گیری ΔP دقیق باشد، دقت در مورد اندازه گیری مکان کمتر می شود و بالعکس.

۱-۳ نظریه کوانتومی اندازه گیری

در این بخش دو نوع از اندازه گیری های کوانتومی را معرفی می کنیم. این دو نوع اندازه گیری که روی پایه های اورتونرمال انجام می شوند، اندازه گیری تصویری و اندازه گیری POVM هستند.

۱-۳-۱ اندازه گیری تصویرگر

برای این نوع اندازه گیری که اندازه گیری ون-نیومن^۱ نیز نامیده می شود، یک سیستم دو حالته مانند اتمی که دو حالت پایه و برانگیخته برای آن متصور هستیم، در نظر می گیریم. حالت پایه را با $|0\rangle$ و حالت برانگیخته را با $|1\rangle$ نشان می دهیم. هدف آن است که احتمال بودن اتم در یکی از این حالت ها و همچنین حالت اتم پس از اندازه گیری مشخص شود.

وابسته به هر کدام از حالت ها (حالت های پایه و برانگیخته یا $|0\rangle$ و $|1\rangle$) یک عملگر تصویرگر وجود دارد. به عنوان نمونه، در مورد حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ داریم:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \quad , \quad P_1 = |1\rangle\langle 1|$$

عملگر تصویری یا تصویرگر دارای خاصیت های زیر است:

$$P^2 = P \quad , \quad P^+ = P \quad , \quad P_0 + P_1 = \hat{I}$$

و همچنین، اگر $\{P_1, P_2, \dots\}$ عملگر تصویرگر داشته باشیم، رابطه بین آنها به صورت زیر است:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

حال، احتمال بدست آوردن خروجی i ام پس از اندازه گیری با استفاده از عملگر تصویرگر به صورت زیر در می آید:

$$P_r(i) = |\langle P_i | \varphi \rangle|^2 = \langle \varphi_r | P_i^+ P_i | \varphi_r \rangle = \langle \varphi_r | P_i^2 | \varphi_r \rangle = \langle \varphi_r | P_i | \varphi_r \rangle \quad (9-1)$$

که رابطه (۹-۱) همان مقدار چشمداشتی P_i روی φ است.

در اینجا، φ را بر حسب ویژه کت های پایه $|u_j\rangle$ می نویسیم:

$$|\varphi\rangle = \sum_j |u_j\rangle \langle u_j | \varphi \rangle \quad . \quad P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$P_i |\varphi\rangle = \sum_j |u_i\rangle \langle u_i | u_j \rangle \langle u_j | \varphi \rangle = \langle u_i | \varphi \rangle |u_i\rangle .$$

^۱-Von-Neumann

$$\langle \varphi | P_i | \varphi \rangle = (\sum_j \langle u_j | \varphi \rangle | u_j \rangle)^+ \langle u_i | \varphi \rangle | u_i \rangle = \sum_i \sum_j \langle \varphi | u_j \rangle \langle u_j | u_i \rangle \langle u_i | \varphi \rangle$$

$$\langle \varphi | P_i | \varphi \rangle = |\langle u_i | \varphi \rangle|^2 = Tr(P_i | \varphi \rangle).$$

می دانیم که حالت سیستم پس از اندازه گیری به یکی از ویژه کت های پایه فضا می رود. بر حسب عملگرهای تصویرگر، حالت سیستم پس از اندازه گیری به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\varphi'\rangle = \frac{P_i |\varphi\rangle}{\sqrt{\langle \varphi | P_i | \varphi \rangle}}$$

به عنوان مثال، دیدیم که:

$$P_i |\varphi\rangle = \langle u_i | \varphi \rangle | u_i \rangle \rightarrow | u_i \rangle = \frac{P_i |\varphi\rangle}{\langle u_i | \varphi \rangle} \Rightarrow |\varphi'\rangle = \frac{P_i |\varphi\rangle}{\sqrt{\langle \varphi | P_i | \varphi \rangle}}$$

۱-۳-۲ اندازه گیری POVM^۱

در مکانیک کوانتومی، اندازه گیری تصویری محدود کننده است و همیشه امکان پذیر نیست. گاهی اوقات در فرایند اندازه گیری، حالت ذره کوانتومی از بین می رود. بنابر این، اندازه گیری مجدد تصویری امکان پذیر نیست. به عنوان نمونه، اگر یک سیستم دارای حالت کوانتومی

$|\Psi\rangle = \sum c_i |u_i\rangle$ باشد، یک اندازه گیری تصویری $|u_k\rangle \langle u_k|$ ، تابع موج را به $|u_k\rangle$ می برد (فرو می ریزد). اگر اندازه گیری را روی سیستم تکرار کنیم، با اطمینان سیستم را در حالت $|u_k\rangle$ خواهیم یافت. اندازه گیری تصویری را در دنیای واقعی نیز نمی توان به کار برد. در آزمایشگاه، هنگام آشکارسازی یک فوتون، فوتون از بین می رود. و یا هنگامی که یک فوتون به یک فیلتر پلاروید شلیک می شود توسط فیلتر جذب می شود و اندازه گیری دیگری نمی توان روی آن انجام داد. یک نوع اندازه گیری که تعمیم یافته تر از اندازه گیری تصویری است، اندازه گیری POVM نام دارد. یک POVM شامل دسته ای از عملگرهای مثبت است که عموماً با E_i نشان داده می شود. برخلاف عملگرهای تصویری که تعداد آنها برابر با ابعاد فضای هیلبرت است، شمار عملگرهای POVM ممکن است با ابعاد فضای هیلبرت متفاوت باشد.

عملگرهای اندازه گیری در یک POVM می توانند از یک دسته عملگرهای اندازه گیری اختیاری $\{m_i\}$ به صورت $E_i = m_i^+ m_i$ بدست آیند و $\sum E_i = I$ عملگرهای E_i دارای چند خاصیت هستند:

(i) معین مثبت هستند. یعنی، دارای ویژه مقادیر مثبت و حقیقی اند.

¹Positive Operator Valued Measures

(ii) احتمال نتیجه اندازه گیری i به صورت $p_i = \langle \Psi | E_i | \Psi \rangle$ داده می شود که از $p_i = \langle \Psi | m_i^+ m_i | \Psi \rangle$ به دست می آید.

دسته عملگرهای $\{E_i\}$ می تواند به جای دسته عملگرهای $\{m_i\}$ برای تخمین احتمال های اندازه گیری استفاده شود.

وقتی که سیستم یک حالت آمیخته باشد، به وسیله ماتریس چگالی ρ شرح داده می شود. در این موارد، احتمال به دست آوردن نتیجه اندازه گیری i به وسیله $Tr(E_i \rho)$ داده می شود.

مثال ۱: یک سیستم کوانتومی در حالت $|\Psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle$ قرار دارد. می خواهیم احتمال های اندازه گیری ۰ و ۱ را در روش POVM پیدا کنیم. در موارد یک کیوبیتی، اندازه گیری POVM را با استفاده از عملگرهای تصویری انجام می دهیم. در این مثال، $E_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $E_1 = |1\rangle\langle 1|$ را تعیین می کنیم که $\sum_i E_i = E_0 + E_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$

نمایش ماتریسی این عملگرها در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به صورت

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. هر کدام از این ماتریس ها دارای دو ویژه مقدار $\{1, 0\}$ هستند که نشان دهنده مثبت بودن عملگرها است. با استفاده از $P(i) = \langle \Psi | E_i | \Psi \rangle$ احتمال های مربوطه را حساب می کنیم.

$$P(0) = \langle \Psi | E_0 | \Psi \rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1| \right) (|0\rangle\langle 0|) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle \right) = \frac{4}{5}$$

$$P(1) = \langle \Psi | E_1 | \Psi \rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1| \right) (|1\rangle\langle 1|) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle \right) = \frac{1}{5}$$

مثال ۲: در این مثال می خواهیم اندازه گیری POVM را روی یک سیستم مخلوط دو حالت بررسی کنیم.

حالت های کوانتومی را به صورت

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

در نظر می گیریم. ما POVM را با سه عملگر در نظر می گیریم. دوتای اول را

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle\langle 1| = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و