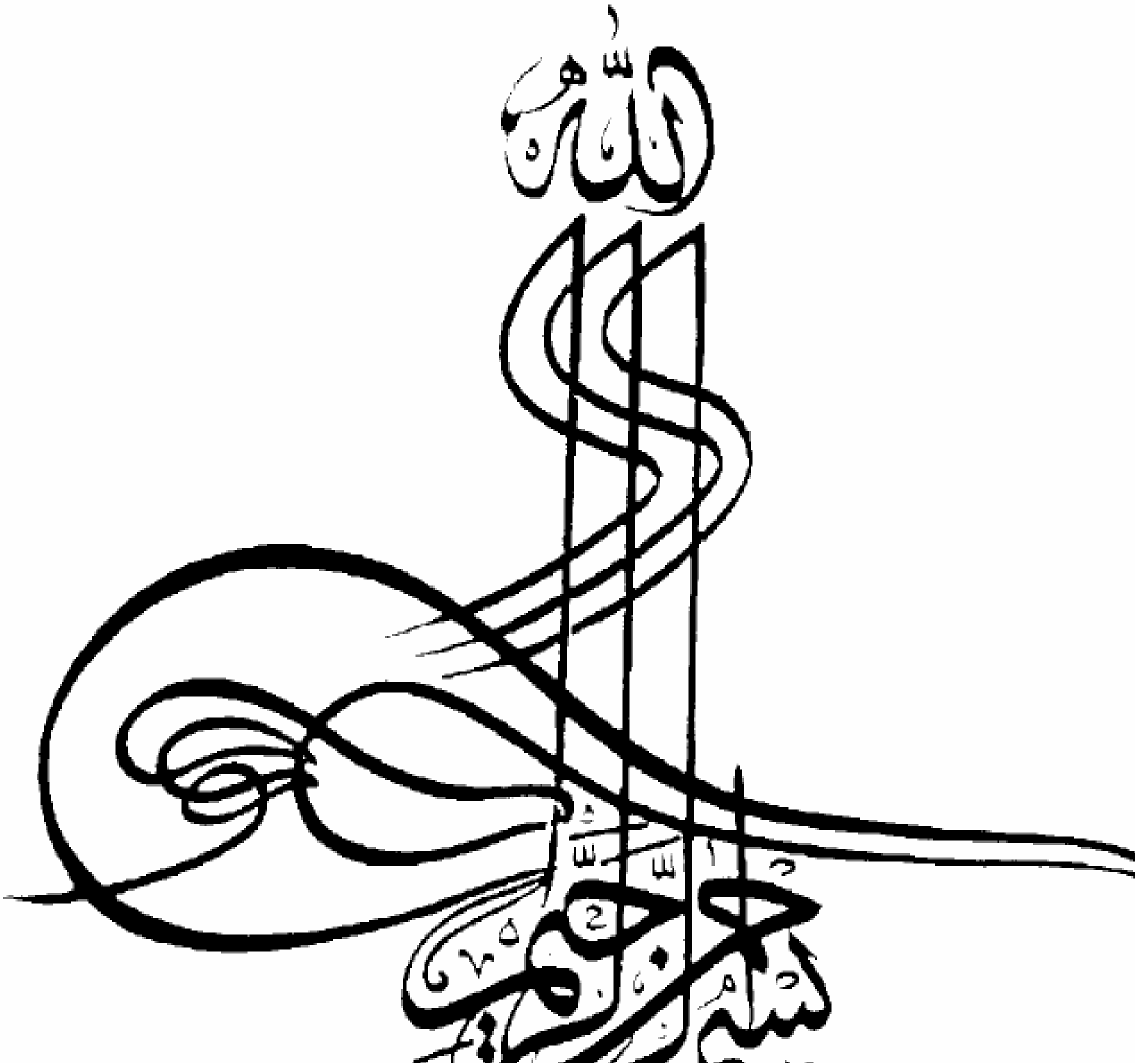
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده : ریاضی

گروه : ریاضی

زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ در p-گروههای متناهی

دانشجو : پری پناهی

استاد راهنمای اول :

دکتر میرحیدر جعفری

استاد راهنمای دوم :

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار :بهمن ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : ریاضی

گروه : ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم پری پناهی

تحت عنوان: زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ در p-گروههای متناهی

در تاریخ **۱۳۸۸/۱۱/۱۱** توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** مورد ارزیابی و با درجه **عالی** مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : میرحیدر جعفری		نام و نام خانوادگی : ابراهیم هاشمی	
نام و نام خانوادگی : احمد زیره		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : نادر جعفری راد		نام و نام خانوادگی : مهدی ایرانمنش	
نام و نام خانوادگی : محسن پرویزی			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به مادر عزیزم، کسی که به من زندگی و عشق آموخت.

Dedicated to My Beloved Mother who taught me to live and love.

سپاس خداوند منان را که توفیق نگارش این پایان نامه را بر ما ارزانی داشت.

شایسته است از استاد ارجمند دکتر میرحیدر جعفری که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشتند و در این زمینه راهکارها ، پیشنهادات و انتقادات ایشان بسیار غنی ، کارا و تأثیرگذار بوده و حق بزرگی بر گردن بنده دارند، تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از دکتر ابراهیم هاشمی به خاطر مشاوره های مؤثر ایشان بالاخص در زمینه مقالات بین رشته ای به خصوص شیمی-گروه که نمایانگر افق زیبای تحقیقات کاربردی ریاضیات محض است ، بسیار سپاسگزارم .

برحق است مراتب سپاسگزاری خود را نسبت به آقای علی قدرتی فرد ریاست محترم اداره برنامه ریزی و بودجه شرکت مخابرات خراسان شمالی که در طی دوره تحصیل از مساعدات و کمکهای ایشان بسیار بهره مند بوده ام ، ابراز دارم .

در پایان از کلیه اساتید محترم دانشکده ریاضی ، بالاخص دکتر نزاکتی ، ریاست محترم دانشکده و دکتر احمد زیره ، مدیر گروه محترم ، که مرا در طی دوره تحصیل یاری نموده اند بسیار ممنون و سپاسگزارم.

بهمن ۱۳۸۸

پری پناهی

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

ماه و سال : بهمن ۱۳۸۸

چکیده

فرض کنید S یک p-گروه متناهی باشد ، زیرگروه آبلی A در S را زیرگروه آبلی بزرگ S گوییم، اگر برای هر زیرگروه آبلی A^* در S داشته باشیم، $\left|A^*\right| \geq |A|$.

زیرگروه Q در S را به طور مرکزی بزرگ گوییم، اگر برای هر زیرگروه Q^* در S داشته باشیم:

$$|Q||Z(Q)| \geq \left|Q^*\right| \left|Z\left(Q^*\right)\right|.$$

مطالعه روی زیرگروههای آبلی بزرگ و اختلاف روی آنها در سال ۱۹۶۴ با قضیه p-متمم نرمال دوم تامپسون آغاز گردید،که زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ دارای خواص مشابهی هستند.

در سال ۱۹۸۹ سرمک و دلگادو ، چند خانواده از زیرگروههای شامل زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ را به عنوان حالت خاص، مورد مطالعه قرار دادند.

سرمک و دلگادو مفهوم بحث شمردن برای گروههای متناهی را به بحث اندازه برای گروه متناهی G، که روی گروه متناهی H عمل می کند، تعمیم دادند. آنها در نهایت به نتایج قابل توجه و کاربردهای بسیار قوی در این زمینه دست یافتند.

در این پایان نامه، کار آنها را گسترش می دهیم و خواص زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ در p-گروههای متناهی را بدست خواهیم آورد. این برهان به طور مشابه برای p-گروههای متناهی در قضیه نقطه ثابت برل در گروههای جبری استفاده می شود.

فهرست مطالب

مقدمه

۱. مقدمه

در ابتدا فرض کنید S یک p-گروه متناهی باشد ، زیرگروه آبلی A در S را یک زیرگروه آبلی بزرگ S گوییم، اگر برای هر زیرگروه آبلی A^* در S ، $|A| \geq |A^*|$.

زیرگروه Q در S را به طور مرکزی بزرگ گوییم، اگر برای هر زیرگروه Q^* در S داشته باشیم:

$$|Q||Z(Q)| \geq |Q^*||Z(Q^*)|.$$

زیرگروه به طور مرکزی بزرگ را برای سادگی CL-زیرگروه می نامیم. (اولین بار جاناتان آلپرین[۱] این تعریف را پیشنهاد کرد.)

مطالعه روی زیرگروههای آبلی بزرگ در سال ۱۹۶۴ با قضیه p-متمم نرمال دوم تامپسون[۲] [۱۶] آغاز گردید،که زیرگروههای به طور مرکزی دارای خواص مشابهی هستند. در سال ۱۹۸۹ سرمک[۳] و دلگادو[۴][۱]، چند خانواده از زیرگروههای شامل زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ را به عنوان حالت خاص، مورد مطالعه قرار دادند. سرمک و دلگادو مفهوم بحث شمردن برای گروههای متناهی را به بحث اندازه برای گروه متناهی G، که روی گروه متناهی H عمل می کند، تعمیم دادند. آنها بالاخره به نتایج قابل توجه و کاربردهای بسیار قوی در این زمینه دست یافتند.

سرمک و دلگادو نشان دادند، که برای هر دو زیرگروه به طور مرکزی بزرگ Q و R در S، $QR=RQ$ و QR یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ در S است. لذا S شامل یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ ماکسیمال منحصر به فردی است، که آنرا S_{CL} می نامیم.

در این پایان نامه، کار آنها را گسترش می دهیم، تا به نتایج بهتر و کاربردهای قویتری برسیم. همچنین کاربردهای زیرگروه تامپسون، $J(S)$، در p-گروه متناهی S، را بدست خواهیم آورد. بویژه،

---

[۱] Jonathan Alperin
[۲] J.G.Thompson
[۳] A.Chermak
[۴] A.delgado

شرایط کافی برای اثبات $J(S) < S$ را بدست می آوریم. این برهان به طور مشابه برای p-گروههای متناهی در قضیه نقطه ثابت برل[۵] در گروههای جبری استفاده می شود.

در بخش ۲-۲ ، قضیه ۲-۲-۱ ، نشان می دهیم که برای هر زیرگروه به طور مرکزی بزرگ Q در S و هر زیرگروه آبلی بزرگ A در S، داریم $QA=AQ$ و QA یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ در S است. بنابراین $S_{CL} \geq J(S)$ (نتیجه ۲-۲-۲). و این به ما کمک می کند با محاسبه ای کوتاه نشان دهیم که $S > J(S)$.

در فصل ۳ ، زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ مینیمال S را بررسی می کنیم، که دارای گروههای مشتق یکسانی هستند ، لذا یک زیرگروه مشخص S می باشد، (نتیجه ۳-۲) و این زیرگروه مشتق در G نرمال است (قضیه ۳-۶) .

به وسیله قضیه های قوی ایتو[۶] و تامپسون [۱۴ص۴۳] و قضیه ۵-۸ نشان می دهیم، که یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ مینیمال در S موجود است، که به وسیله $J(S)$ و هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ نرمال می شود، یعنی $J(S) \subseteq N_G(S)$ (قضیه ۴-۷ و نتیجه ۵-۱۰). در قضیه ۵-۸ فرضهای زیر را در نظر می گیریم.

۵-۷ فرضها

(۱) S یک p-گروه متناهی است .

(۲) Q یک زیرگروه S از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ است .

(۳) g یک عنصر S است که Q را نرمال می کند، یعنی $g \in N_S(Q)$.

(۴) α خودریختی ای از Q است که به وسیله مزدوج g القاء می شود. یعنی

$$\alpha : Q \to Q \quad \text{به طوریکه} \quad x\alpha\ x^g$$

---

[۵] Borel

[۶] N.Ito

(۵) Q را می توان به عنوان یک حلقه لی در نظر گرفت . به ازای اعداد صحیح j,i که $i+j\geq p$ داریم:

$$[(\alpha-1)^i(Q),(\alpha-1)^j(Q)]=0 \quad , \quad (\alpha-1)^p(Q)=0 .$$

در اینجا قضیه لازارد[۷] (قضیه ۶-۱) نشان می دهد، که Q می تواند به عنوان یک حلقه لی منظم باشد، به طوری که $\alpha-1$ یک درونریختی خوش تعریف از گروه جمعی خودش باشد .

قضیه ۵-۸ ، به طور کلی بیان می کند، که با این شرایط، یک نگاشت φ وجود دارد، که هر زیرگروه T در Q را به یک زیرگروه T^* در Q می برد، که خیلی شبیه T بوده و به وسیله g نرمال می شود، علاوه بر این اگر T تحت یک ترتیب جزئی معینی از زیرگروههای Q ماکسیمال باشد، آنگاه g باید T را نرمال کند.

این نتایج مبنی بر بعضی نتایج از مرجع [۴] است، که به عنوان قضایای (۴-۳) و (۴-۴) در این پایان نامه ظاهر می گردند. که این نتایج شبیه کاربردهای قضیه نقطه ثابت برل برای گروههای جبری هستند. همچنین قضیه (۵-۸) نیز چنین شباهتی دارد.

نمادهای زیر را برای p- گروه متناهی S نیاز داریم.

فرض کنید:

$d(S)=max\{\,|A|\mid A\leq S$ و A آبلی است $\}$

$f(S)=max\{|R|.|Z(R)|\mid R\leq S\}$

$f_1(S)=max\{\,|R|.|C_S(R)|\mid R\leq S\}$

$\mathscr{A}(S)=\{A\leq S\mid |A|=d(S)$ و A آبلی است $\}$

$\mathscr{F}(S)=\{R\leq S\mid |R|\,|Z(R)|=f(S)\}$

$\mathscr{F}_1(S)=\{R\leq S\mid |R|\,|C_S(R)|=f_1(S)\}$

$J(S)=\langle\ \mathscr{A}(S)\ \rangle$

---

[۷] M . Lazard

$S_{CL} = \langle \ \mathscr{F}(S) \ \rangle$

$S' = [S, S]$

بنابراین عناصر $\mathscr{A}(S)$ زیرگروههای آبلی بزرگ S هستند، عناصر $\mathscr{F}(S)$ زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ S می باشند و $J(S)$ ، همانند مرجع [۱۵] ، زیرگروه تامپسون S نامیده می شود.

یک CL-زیرگروه S که تحت شمول در $\mathscr{F}(S)$ مینیمال است، یک CL-زیرگروه مینیمال S نامیده می شود.

در فصل ۲، (گزاره ۲-۱-۴)، نشان می دهیم، که $f(S)=f_1(S)$ و $\mathscr{F}(S)$ یک زیرمجموعه $\mathscr{F}_1(S)$ است.

همه گروهها در این پایان نامه متناهی هستند. در سراسر این پایان نامه p یک عدد اول دلخواه ثابت فرض شده و S یک p-گروه متناهی دلخواه ثابت می باشد.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ تعاریف مقدماتی

ما برای شروع مبحث نیاز به مفاهیم اساسی در نظریه گروهها داریم، لذا حائز اهمیت است که در ابتدا تعاریف و قرارداد های مختلفی را معرفی کنیم که در سراسر این پایان نامه استفاده می شود.

فرض کنیم G یک گروه متناهی دلخواه باشد.

۱-۱-۱ تعریف : خودریختی φ از گروه G را π–خودریختی گوییم اگر مرتبه اش فقط بر اعضای مجموعه π قابل قسمت باشد و π'–خودریختی گوییم اگر مرتبه اش برهیچ عضو مجموعه π قابل قسمت نباشد.

۱-۱-۲ تعریف : عنصر x در G را یک π-عنصر گوییم اگر $|x|$ فقط بر اعداد مجموعه π قابل قسمت باشد و به طور مشابه گروه G را π-گروه نامیم اگر $|G|$ فقط بر اعداد مجموعه π قابل قسمت باشد. همچنین $\pi(G)$ مجموعه اعداد اول بخش کننده $|G|$ را نشان می دهد.

۱-۱-۳ تعریف : $O_\pi(G)$ بزرگترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد G را نشان می دهد، که مرتبه آن فقط بر اعداد مجموعه π بخش پذیر است و زیرگروه تولید شده توسط اجتماع تمام زیرگروههای نرمال G با این خاصیت می باشد.

۱-۱-۴ تعریف :$O^\pi(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد H در G را نشان می دهد، به طوریکه مرتبه G/H فقط بر اعداد مجموعه π بخش پذیر باشد و اشتراک تمام زیرگروههای نرمال G است به طوریکه گروه خارج قسمت متناظر دارای این خاصیت باشد.

۱-۱-۵ تعریف : $O_{p'}(G)$، p'–چنبره[۸] G نامیده می شود، به عبارتی بزرگترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد G که مرتبه آن نسبت به p اول است.

---

[۸] p'–Core

۱-۱-۶ تعریف : $O_{\text{۲}}(G)=O(G)$ چنبره G نامیده می شود، به عبارتی بزرگترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد از مرتبه فرد.

۱-۱-۷ تعریف : H بخش G است اگر $H=A/B$ که $A,B\leq G$ و $B<A$.

۱-۱-۸ تعریف : K، H را نرمال می کند، اگر $K\subseteq N_G(H)$ و به طور مشابه عنصر g، H را نرمال می کند، یعنی $g\in N_G(H)$.

۱-۱-۹ تعریف : H را زیرگروه مشخص G گوییم اگر H تحت تمام خودریختی های G ثابت است.

۲-۱-۱۰ تعریف : زیرگروه ماکسیمال H در گروه G یک زیرگروه سره است به طوریکه هیچ زیرگروه سره دیگری مانند K اکیداً شامل H نباشد.

۱-۱-۱۱ تعریف : کوچکترین مضرب مشترک مرتبه های عناصر G را توان[۹] G می نامیم.

۱-۱-۱۲ ریختی[۱۰] : یک کاتگوری مانند C شامل دو کلاس می باشد یکی اشیاء و دیگری ریختی ها. روی هر ریختی دو عمل وجود دارد یکی دامنه (مبدأ) و دیگری هم دامنه (مقصد). اگر ریختی f دارای دامنه X و هم دامنه Y باشد، می نویسیم $X\rightarrow Y$. لذا یک ریختی عبارتست از یک پیکان از دامنه به هم دامنه اش.

۱-۱-۱۳ تعریف : گروه G روی مجموعه X (از چپ) عمل می کند در صورتیکه یک تابع مانند ⁕ از $G\times X$ به X که وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر g,h در G و x در X ، $(gh).x=g.(h.x)$.

(۲) برای هر x در X ، $\text{۱}.x=x$.

به ویژه اگر $H<G$ آنگاه G با عمل تزویج روی H عمل می کند.

---

[۹] Exponent

[۱۰] Morfism

۱-۱-۱۴ تعریف : یک درونریختی گروه G عبارتست از یک همریختی $f:G\to G$.

۱-۱-۱۵ تعریف : اگر G یک گروه و X یک مجموعه باشد عمل G روی X را :

۱) **متعدی** نامیم، اگر برای هر دو عنصر y,x در X یک عضو g در G موجود باشد که $gx=y$.

۲) **باوفا** (مؤثر) نامیم، اگر برای دو عضو متمایز g و h در G یک عضو x در X موجود باشد، به طوریکه $gx\neq hx$ یا به طور معادل برای هر $e\neq g\in G$ یک x در X موجود باشد، که $gx\neq x$.

۳) **آزاد** (نیم منظم) نامیم، اگر برای هر دو عضو متمایز g و h در G و تمام عناصر x در X داشته باشیم، $gx\neq hx$ یا به طور معادل اگر $gx=x$ آنگاه $g=e$.

۴) **منظم** (کاملاً متعدی) نامیم، اگر متعدی و آزاد باشد. بعبارتی برای هر دو عنصر y,x در X دقیقاً یک عضو g در G موجود باشد، که $gx=y$. در این حالت X به فضای همگن اصلی G یا G-تورسور[11] معروف است.

۵) **ساده نشدنی** نامیم، اگر X یک مدول روی حلقه R و عمل G، R-خطی باشد و دارای هیچ زیرمدول ثابت سره ناصفری نباشد .

۱-۱-۱۶ تعریف : زنجیری از زیرگروههای $G\supseteq G'\supseteq (G')'\supseteq ...$ را سری مشتق G می نامیم و بسادگی می توان دید، که G حل پذیر است اگر و تنها اگر سری مشتق آن به عضو همانی ختم شود.

۱-۱-۱۷ تعریف : زنجیری از زیرگروههای $G \subseteq G' \subseteq [G',G] \subseteq [[G',G],G] \subseteq ...$ را سری مرکزی پائینی G می نامیم، می توان نشان داد که G پوچتوان است اگر و تنها اگر سری مرکزی پائینی آن به عضو همانی ختم شود. اگر G پوچتوان باشد، کلاس G یکی کمتر از تعداد جملات در سری مرکزی پائینی آن می باشد ، لذا یک گروه آبلی، پوچتوان از کلاس یک است.

[11] G-Torsor

۱-۱-۱۸ تعریف : زنجیری از زیرگروههای $G=G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq ... \supseteq G_n = 1$ را سری نرمال G گوییم، درصورتی که برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، $G_i < G_{i-1}$. گروههای خارج قسمت G_{i-1}/G_i را فاکتورهای سری نرمال و عدد صحیح n را طول آن نامیم. اگر هر G_i زیرگروه نرمال سره ماکسیمال G_{i-1} باشد، سری نرمال را سری ترکیبی و فاکتورهای G_{i-1}/G_i را فاکتورهای ترکیبی گوییم. در این حالت G_{i-1}/G_i هیچ زیرگروه نرمال سره به جز همانی ندارد، لذا یک گروه ساده است.

۱-۱-۱۹ تعریف : یک گروه از مرتبه توانی از یک عدد اول p را یک p-گروه می گوییم.

۱-۱-۲۰ گروه هایزنبرگ[۱۲]: گروه ماتریسهای 3×3 بالا مثلثی به شکل $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

می باشد، که آنرا تحت عمل ضرب ماتریسها در نظر می گیرند. عناصر a، b و c می توانند از حلقه جابجایی دلخواه گرفته شوند، اغلب آنها از حلقه اعداد حقیقی یا حلقه اعداد صحیح گرفته می شوند.

۱-۱-۲۱ تعریف : گروه آبلی مقدماتی یک گروه آبلی متناهی است، که هر عنصر غیر بدیهی آن دارای مرتبه p باشد، که p یک عدد اول است.

بنا به طبقه بندی گروههای آبلی به طور متناهی تولید شده، هر گروه آبلی مقدماتی باید به شکل $(\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^n$ باشد، که n یک عدد صحیح نامنفی است(اغلب n را رتبه گروه می نامند). در اینجا $\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$ ، گروه دوری از مرتبه p (یا بطور معادل اعداد صحیح به همنهشتی p) را نشان می دهد.

۱-۱-۲۲ تعریف : اگر G یک p-گروه باشد، رتبه G با $m(G)$ نشان داده می شود، که رتبه ماکسیمم بین زیرگروههای آبلی مقدماتی G است.

۱-۱-۲۳ تعریف : G حاصلضرب مرکزی زیرگروههای A و B است اگر،

---

[۱۲] Heisenberg Groups

$$[A,B]=1 \quad \text{و} \quad G=AB \ .$$

و این حاصلضرب مستقیم است اگر داشته باشیم، $A \cap B=1$ ، در حالت اخیر می نویسیم $G = A\times B$.

این مفاهیم و علامتگذاریها به طور طبیعی به حاصلضربهای متناهی از زیرگروههای G تعمیم می یابد.

۱-۱-۲۴ تعریف : اگر A و B دو گروه باشند و $\varphi : A \to Aut(B)$ یک همریختی باشد، آنگاه $A\times B$ با عمل زیر یک گروه است .

$$(h,k)*(h',k') = (hh',\, k\,\varphi(h')k') = (hh',\, k\,\varphi_{h'}\, k') \ .$$

که آنرا حاصلضرب نیم مستقیم خارجی A و B می نامیم.

۱-۱-۲۵ تعریف : اگر $X=AB$ که $A<X$ و $A \cap B=1$ آنگاه X حاصلضرب نیم مستقیم داخلی A و B است ، همچنین B را متمم A می گوییم.

۱-۱-۲۶ تعریف : زیرگروه موضعی عبارتست از نرمالساز زیرگروه حل پذیر غیرهمانی. همچنین زیرگروه موضعی، یک نرمال کننده برای یک p - زیرگروه سیلو در گروه G می باشد.

برای عدد اول p، زیرگروه p-موضعی را نرمالساز p-زیرگروه غیر همانی تعریف می کنیم. می گوییم زیرگروه $L\subseteq G$ ، p-موضعی است اگر L نرمال کننده $N_G(P)$ باشد، که P زیرگروه سره G است، به طوری که $P>1$ و $|P|$ توانی از عدد اول p است.

۱-۱-۲۷ تعریف : زیرگروه نرمال C در G زیرگروه p-متمم نرمال G می باشد، اگر $|C|=p$ و $|G:C|$ توانی از p باشد .

به عبارتی اگر $P\in Syl_p(G)$ باشد و $G=PO_{p'}(G)$ می گوییم، G دارای یک p-متمم نرمال است.

۱-۱-۲۸ تعریف : اگر $O_{p'}(G)=1$ آنگاه G را p-فشرده گوییم در صورتیکه ، $C_G\left(O_p\left(G\right)\right) \le O_p\left(G\right)$.در حالت کلی G، p-فشرده است اگر $G/O_{p'}\left(G\right)$ چنین باشد.
(توجه کنید که $O_{p'}\left(G/O_{p'}(G)\right)=1$).

۱-۱-۲۹ تعریف : از تعریف کلاس واضح است که کلاس یک p-گروه مانند P از مرتبه p^n، حداکثر $n-1$ است و اگر تساوی برقرار باشد، می گوییم P از کلاس ماکسیمال است.

۱-۱-۳۰ تعریف : یک p-گروه G، خاص[۱۳] است اگر یا G آبلی مقدماتی باشد یا G از کلاس ۲ بوده و $G'=\Phi\left(G\right)=Z\left(G\right)$ آبلی مقدماتی باشد. توجه کنید که در هر مورد $G'=\Phi\left(G\right)$ و G دارای کلاس ۱ یا ۲ است.

بعلاوه گروه G را فوق العاده خاص[۱۴] نامیم اگر G خاص ناآبلی بوده و $|G'|=p$. بعبارتی اگر G دارای کلاس ۲ بوده و $|G|=p$.

۱-۱-۳۱ تعریف : G را شبه ساده[۱۵] گوییم اگر G کامل[۱۶] و $G/Z\left(G\right)$ ساده باشد.

۱-۱-۳۲ مثال : اگر $G=SL\left(2,q\right)$ که q فرد است و $q>3$ آنگاه G شبه ساده است اما ساده نیست.$Z\left(G\right)$ از مرتبه ۲ است و به وسیله $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ تولید می شود. ($SL\left(2,3\right)$ حل پذیر است اما این کافی نیست).

۱-۱-۳۳ تعریف : G را نیم ساده[۱۷] گوییم اگر یا G یک حاصلضرب مرکزی از گروههای شبه ساده باشد یا $G=1$. اگر $G\neq 1$ نیم ساده باشد، عاملهای شبه ساده G دقیقاً مجموعه

---

[۱۳] Special
[۱۴] Extra- Special
[۱۵] Quasisimple
[۱۶] Perfect
[۱۷] Semisimple