بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

استفاده از توابع B– اسپلاین درجه چهار
در
حل تقریبی مسائل مقدار مرزی مرتبه سه

استاد راهنما:

دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مهدی حسینی

پژوهش و نگارش:

علیرضا بیات

مهر ۱۳۸۴

تقدیم به:

مادر و پدرم،

که عمری را بپایم سر کردند.

و همسرم،

که بیشترین عشق و عاطفه را نثارم نمود.

تشکر نامه :

ما نبودیم و تقاضامان نبود   لطف او ناگفته ی ما می شنود

همه ی حمدها و سپاس ها از خالق بی همتاست. حمد و سپاسی فوق حمد و سپاس ها. یک حمد و سپاس جانانه، که با بقیه ی شکرها و تشکرها فرق دارد. یک حمد و سپاس خاص. یک حمد و سپاسی که کل زندگی را جهت می دهد و آدمی را بنده می نماید. شنیده ام که به این شکرگذاری می گویند: الحمد لله.

و این در حالی است که آن عزیز، خود ما را به قدردانی از یکدیگر تشویق و ترغیب نموده است . هم او شکوفه ی سپید عشق را دلمان کاشت و اگر غیر از این بود، با کیمیاگری کوه ها به طلا و جواهر، دل ما، دل نمی شد.

پس، من در این صفحه به خود این آزادی را می دهم که از تعداد انگشت شماری از کسانی که دوستشان دارم و برایم زحمت کشیده اند تشکر کنم.

اولین آنها، پس از صلوات بر محمد و آل محمد، زنده یاد دکتر حسابی می باشد. بزرگ مردی که هنوز روح سترگش با ماست و نوید کار و کوشش و تلاش خستگی ناپذیر علمی را می دهد.

من فکر می کنم در دنیای معاصر که دامنه ی علم تا بی کران کشیده شده، خداوند او را به ما هدیه کرد تا هیچگاه نا امید نشده و به وسعت دامنه ی توانایی ذهن انسان پی ببریم.

پس از این مرد بزرگ، از تمامی معلمین و اساتیدی که از اول دبستان تا کنون بار تعلیم مرا به جان خریدند سپاس گذاری می کنم و دستشان را می بوسم.

بخصوص در این دو سال سپری شده در دانشگاه یزد، هر یک از اساتیدام علاوه بر زمینه علمی قوی برایم معلم اخلاق و زندگی بوده اند و هرکدام یک الگوی رفتاری خاص را رقم زدند:

جناب دکتر لقمانی: الگوی ادب،

استاد راهنمای عزیزی که مدت ها دفترکار خود را محل مطالعه و تحقیق و نگارش بنده قرار داد.

جناب دکتر کرباسی: مظهر آرامش و متانت،

جناب دکتر واعظ پور: نکته سنج ترین انسانی که در زندگی دیده ام،

جناب دکتر مالک: در یک کلام، با معرفت،

جناب دکتر حسینی: صبور و مطمئن.

از آقای دکتر مهدی احمدی نیا داور محترم دفاعیه و دکتر فرامرز کنجوری نماینده تحصیلات تکمیلی که قبول زحمت کردند کمال تشکر را دارم.

همچنین از آقای محسن نوروزی و خانم زینب ابوترابی که مرا در نگارش پایان نامه کمک کردند سپاس گذاری می کنم و نیز از دلسوزی های خانم ها مهری راسترو کارشناس تحصیلات تکمیلی، زهرا عابدینی منشی گروه ریاضی و ملیحه رضایی مسئول سایت کامپیوتر ممنون ام.

در انتها باز از همسر عزیزم که مدت دو سال را بدور از من در ناحیه مرزی عراق سپری کرد بی نهایت ... .

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و پیش نیازها ۳

۲ اسپلاین‌ها و B – اسپلاین‌ها ۱۱

۲–۱ درونیابی با چند جمله‌ای ها ۱۲

۲–۲ اسپلاین ۱۳

۲–۳ B – اسپلاین‌ها ۱۷

۳ روش تفاضلات متناهی ۲۳

۳–۱ حل مسائل مقدار مرزی مرتبه ۳ با روش تفاضلات متناهی ۲۵

۳–۲ نتایج عددی ۲۷

۴ حل عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم با توابع B – اسپلاین درجه چهار ۳۱

۴–۱ روش هم‌محلی (کالوکیشن) ۳۲

۴–۱–۱ معرفی تعدادی از توابع پایه‌ای ۳۳

۴–۱–۲ روش هم‌محلی برای BVP مرتبه‌ی سه ۳۸

۴–۲ مسائل مقدار مرزی خطی ۳۹

۴–۳ مسائل مقدار مرزی غیر خطی ۴۱

۴–۴ نتایج عددی ۴۳

۵ حل مسائل مقدار مرزی با نرم افزار MATLAB ۵۹

۵–۱ MATLAB وتوانایی‌های آن ۶۰

۵–۲ استفاده از برنامه‌ی bvp4c ۶۲

۵–۲–۱ نشانوندهای ورودی bvp4c ۶۲

۵–۲–۲ شرح (pvp4c (odefun , bcfun , solinit ۶۴

۵–۲–۳ حل یک BVP منفرد با bvp4c ۶۵

۵–۲–۴ نکاتی در مورد bvp4c ۶۷

۵—۳ تابع‌های راه‌انداز bvp4c ۷۳
۵—۳—۱ bvpinit ۷۳
۵—۳—۲ bvpset ۷۴
۵—۳—۳ deval ۷٦

۵—۴ مقایسه روش‌ها ۷۷

A متن برنامه ها ۸۱

A—۱ متن برنامه‌های مربوط به اسپلاین‌ها ۸۲
A—۱—۱ تولید ضرایب بی اسپلاین درجه‌ی n ۸۲
A—۱—۲ تولید اشکال بی اسپلاین درجه‌ی n ۸۳
A—۱—۳ ضرایب اسپلاین مکعبی ۸۵

A—۲ برنامه‌های تفاضلات متناهی ۹٦
A—۲—۱ حل کلی حل یک BVP خطی با تفاضلات متناهی ۹٦
A—۲—۲ حل $y''' = xy + (x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳)exp(x)$ ۹۹

A—۳ برنامه‌های حل BVP با B — اسپلاین درجه‌ی چهار ۱۰۱
A—۳—۱ حل $y''' = xy + (x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳)e^x$ ۱۰۱
A—۳—۲ حل $y''' = xy - x + (x + ۱۰۰۰)e^{-۱۰x}$ ۱۰۳
A—۳—۳ حل $y''' = -۲e^{-۲y} + ۴(۱ + x)^{-۲}$ ۱۰۵

A—۳—۴ برنامه کلی حل یک BVP خطی با بی‌اسپلاین ۱۰۹

A—۴ برنامه‌های حل BVP با مت لب ۱۱۳

A—۴—۱ حل $y''' = xy + (x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳)e^x$ ۱۱۳

A—۴—۲ حل $y''' = xy - x + (x + ۱۰۰۰)e^{-۱۰x}$ ۱۱۴

A—۴—۳ حل معادله‌ی $y'' + (۲/x)y' + y^۵ = ۰$ ۱۱۵

A—۴—۴ حل معادله‌ی $f''' + ff'' + beta(۱ - (f')^۲) = ۰$ ... ۱۱۷

A—۴—۵ حل معادله‌ی $y'' + (lambda - ۲qcos(۲x))y = ۰$ .. ۱۲۰

B واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۲۲

C واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۱۲۶

کتاب نامه ۱۲۹

چکیده

موضوع اصلی این پایان نامه بر پایه‌ی حل مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی سوم با استفاده از B − اسپلاین‌های درجه‌ی چهارم قرار گرفته است بدین ترتیب که ابتدا پایه‌ای از توابع B−اسپلاین را تولید می‌کنیم و پس از آن جواب تقریبی معادله را به شکل ترکیب خطی از این توابع در نظر می‌گیریم و آنها را به جای y و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی مربوطه می‌گذاریم. نتیجه تولید یک دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی با $n + ۳$ معادله و $n + ۳$ مجهول خواهد بود که در پایان با حل این دستگاه و بدست آوردن ضرایب مجهول جواب تقریبی y بدست خواهد آمد.

پیشگفتار

بی اسپلاین‌ها از دهه‌ی ۶۰ میلادی با کارهای جالبی که کارل دیبوئر [5] بر روی آن انجام داد راهگشای حل بسیاری از مسائل علمی در زمینه محاسبات فیزیک اتمی شدند، واز آنجا که این محاسبات نیازمند دقت بالائی بودند، این دسته از توابع توانست جوابگوی نیازهای متعدد محاسباتی شود . از طرفی، یکی ازمسائلی که از دیرباز برای دانشمندان علوم و مهندسی حائز اهمیت بوده است حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مقدار مرزی است. تقریباً از دهه‌ی ۹۰ استفاده از توابع پایه بی اسپلاین برای حل عددی مسائل مقدار مرزی مورد توجه قرار گرفته است و مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

اکنون هدف اصلی این پایان نامه استفاده از بی اسپلاین درجه چهار در حل تقریبی مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم می‌باشد که در پنج فصل با موضوعات زیر ارائه شده است.

فصل اول شامل تعاریف و قضایایی مقدماتی است، که برای درک مطالب جنبه‌ی پیش نیاز دارد تعاریفی همچون معادلات دیفرانسیل معمولی ومعادلات دیفرانسیل پاره‌ای، مسأله مقدار مرزی، مسأله مقدار اولیه و قضایایی در مورد وجود و یکتایی جواب‌هایشان.

در فصل دوم تعریف اسپلاین‌ها و $B-$ اسپلاین‌ها به همراه قضایای مربوطه، خواص و ویژگی‌ها، طریقه‌ی تولید و پاره‌ای از کاربردهای آن ارائه شده است.

فصل سوم به روش تفاضلات متناهی خواهد پرداخت چرا که این روش به گفته‌ی کاگلار [3] در بهبود روش $B-$ اسپلاین‌ها می‌تواند مفید باشد و بدان نیازمندیم.

فصل چهارم که قسمت اصلی پایان نامه را تشکیل می‌دهد خود به چهار بخش تقسیم می‌شود در بخش اول به روش هم محلی که اساس و ریشه‌ی روش حل با $B-$ اسپلاین‌ها می‌باشد، می‌پردازد به این ترتیب که ابتدا روش را توضیح داده، توابع پایه‌ای مهم و مشهور مربوطه را به همراه استفاده از روش در یک مثال سه بعدی معرفی کرده و در انتها مزایای روش را متذکر شده است. لازم به ذکر است که از مزایای بسیار جالب توجه و مفید روش

هم‌محلی همین تعمیم ساده‌ی فرمول‌بندی از دو بعدی به سه بعدی است و هدف از آوردن مثال مذکور نیز همین است اگر چه برنامه نویسی و بدست آوردن جواب آن کار نگارنده نمی‌باشد. در بخش دوم و سوم این فصل به ترتیب به حل مسائل مقدار مرزی خطی و غیر خطی مرتبه سوم بوسیله‌ی B — اسپلاین‌های درجه چهار خواهیم پرداخت و در بخش چهارم نیز نتایج عددی به همراه مثال‌های متنوعی ارائه خواهد گردید.

فصل پنجم به حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از نرم افزار MATLAB می‌پردازد. این فصل نیز خود شامل چهار بخش است در بخش اول اندکی در رابطه بامعرفی نرم افزار و توانائی‌های آن صحبت شده در بخش دوم به طریقه بهره برداری از تابع تخصصی bvp4c که در سال ۲۰۰۴ برای حل مسائل مقدار مرزی طراحی شد می‌پردازد و در بخش سوم هم متعاقباً توابع پشتیبان آن معرفی می‌گردند و در آخرین بخش از فصل مذکور کلیه‌ی روش‌های یاد شده در پایان نامه به وسیله‌ی چند مثال مورد مقایسه و آزمایش قرار می‌گیرند.

متن کامل برنامه‌ها نیز به همراه واژه نامه‌ای مختصر، ضمیمه‌ی پیوست می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

مقدمه :

معادلات دیفرانسیل ماهیت بسیار مؤثری را در زندگی ما دارد چرا که بسیاری از قوانین عمومی زندگی و طبیعت بدیهی‌ترین بیان خود را در زبان این معادلات می‌یابند و از طرفی هنگامی که ساده‌ترین شکل مشتق یعنی dy/dx را بعنوان میزان تغییر y نسبت به x در نظر می‌گیریم بیان می‌داریم که می‌خواهیم بر تغییرات چیره شویم و آن را تحت سیطره‌ی خود بگیریم، چرا که در هر روند طبیعی، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آنها به‌وسیله اصول علمی اساسی حاکم بر آن روند، به یکدیگر مربوط می‌شوند و بشر این را از صدها سال پیش دریافته است.

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE):

هر معادله که رابطه‌ی بین دو یا چند متغیر و مشتقات آنها نسبت به تنها یک متغییر مستقل را بیان دارد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.

مثال ۱ :

$$\frac{dy}{dx} - ۵y = ۱$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

از طرفی نمایش معمول یک معادله دیفرانسیل به صورت $L[y] = g$ است که در اینجا L عملگر دیفرانسیلی نامیده می‌شود و g یک تابع معلوم می‌باشد.

یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$L[y] = \sum_{j=\circ}^{n} f_j(t) y^{(j)}(t) = g(t)$$

که در آن $f_j(t)$ ها توابع معلومی هستند.

در یک معادله دیفرانسیل معمولی ممکن است متغیر مستقل یا متغیر وابسته وجود نداشته باشند ولی مشتق حتماً حضور دارد.

مثال ۲ :

$$y'''(x) - ۲ = ۰$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE):

این گونه معادلات در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می‌آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مسأله مورد بحث دو یا بیشتر از دو باشد. در چنین حالتی، هر متغیر وابسته، احتمالاً یک تابع با بیش از یک متغیراست، لذا نسبت به یک متغیر تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. مثلاً در بررسی تأثیرات حرارتی در یک جسم صلب، ممکن است دمای θ از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر و از لحظه‌ای به لحظهٔ دیگر تغیر کند، که مشتقات زیر را به همراه خواهد داشت:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}, \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

مسئله مقدار مرزی (BVP):

یک معادله دیفرانسیل همراه باشرایط مرزی را یک مسئله‌ی مقدار مرزی می‌نامند .

بنابراین یک مسأله مقدار مرزی تشکیل یافته از:

۱) قسمت دیفرانسیلی که می تواند به یکی از صورتهای زیر باشد

الف) معادله دیفرانسیل معمولی، مثل:

$$L[y] = y^n + f_{n-۱}(x)y^{n-۱} + ... + f_۱ y' + f_۰ y = ۰ \qquad a \leq x \leq b$$

ب) معادله دیفرانسیل بامشتقات جزئی، مثل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = f(X,Y), \quad (X,Y) \in \Omega$$

۲) قسمت شرط، مثل:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(1) = ln(2) \end{cases}$$

ویا

$$u = exp(-2x + 3y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

اما شرط مرزی را می‌توانیم به دو دسته‌ی مجزا و غیر مجزا تقسیم نماییم. در شرط مرزی مجزا در هر رابطه تنها یک نقطه مرزی دخالت دارد مثل $y(1) + y'(1) = 0$ اما در شرط مرزی غیر مجزا بیش از یک نقطه‌ی مرزی دخالت دارد مثل $y(0) + y(1) = 0$.

روش حل عددی بسیاری از مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی مثل بازی جورچین است به این ترتیب که در این بازی ابتدا بهتر است که قطعات را از لبه‌ها و کنار صفحه چید و بعد رفته رفته به وسط نزدیک شد.

نکته جالب توجهی که در یک BVP وجود دارد این است که با برخورد اول، فرد فکر می‌کند که تنها قسمت دیفرانسیلی همه کاره است و شرایط مرزی نقش زیادی ندارند، در حالی که این‌طور نیست شرط مرزی می‌تواند کلاً چهره‌ی جواب معادله دیفرانسیل خود را عوض کند.

به طور مثال معادله $y'' + \lambda y = 0$ با شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(1) = 0$ تنها توابع متعامد سینوسی را بعنوان تابع ویژه تولید می‌کند اما همین معادله با شرایط مرزی متناوب کل توابع متعامد مربوط به سری فوریه را تشکیل می‌دهد.

کارهای اساسی بر روی مسائل مقدار مرزی از اوایل قرن ۱۸ میلادی شروع شد و با

نامگذاری دسته‌ی مهمی از آن تحت عنوان مسائل اشتورم — لیوویل در ۱۸۳۰ شهرت یافت و این دو ریاضیدان بزرگ قضایای بسیار مهمی را در این رابطه کشف نمودند.

بعدها فردهلم ریاضیدان سوئدی نیز به نتایج چشم گیری دست یافت. قضایای شگفت آوری که می‌توانست ارتباط عمیق چند شاخه‌ی بزرگ ریاضیات مثل جبر، جبر خطی و معادلات دیفرانسیل را به زیبایی بیان کند، تا آنجا که هنوز هم وقتی یکسانی رفتار بعضی از معادلات دیفرانسیل را با دستگاه‌های جبری می‌خوانیم و می‌بینیم به شگفت می آییم.

مسأله مقدار اولیه:

یک معادله دیفرانسیل را همراه با شرایط اولیه مسأله مقدار اولیه می‌گویند. به طور مثال شرایط اولیه برای معادله دیفرانسیل مرتبه n ام چنین است.

$$y(\circ) = k_{\text{۱}}$$
$$y'(\circ) = k_{\text{۲}}$$
$$y''(\circ) = k_{\text{۳}}$$
$$\vdots$$
$$y^{n-\text{۱}}(\circ) = k_n$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل:

مدل ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی به صورت دستگاهی از چند معادله دیفرانسیل است.

چنین دستگاهایی شامل دو یا چند معادله دیفرانسیل نسبت به دو یا چند تابع مجهول اند که باید همزمان حل شوند.

در اینجا دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را به شکل زیر در نظر می‌گیریم؛

$$
\begin{aligned}
x'_۱ &= f_۱(t, x_۱, x_۲, \cdots, x_n)\\
x'_۲ &= f_۲(t, x_۱, x_۲, \cdots, x_n)\\
&\vdots\\
x'_n &= f_n(t, x_۱, x_۲, \cdots, x_n)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که در آن $f_۱, f_۲, \cdots f_n$ توابعی از $n+۱$ متغیرند که در ناحیه ای مانند D از فضای اقلیدسی $n+۱$ بعدی $R \times R^n$ تعریف شده‌اند و $x_۱, x_۲, \cdots x_n$ ، n تابع مجهولند. منظور از حل این دستگاه بدست آوردن بازه‌ای مثل R و توابع مشتق‌پذیر $\phi_۱(t), \phi_۲(t), \cdots, \phi_n(t)$ است. به طوری که توابع $\phi_j(t)$ برای $t \in I$ تعریف شده باشند و برای هر $t \in I$ ، نقطه $\big(t, \phi_۱(t), \phi_۲(t), \cdots, \phi_n(t)\big)$ در ناحیه D باشد و به ازای $j = ۱, ۲, \cdots, n$ داشته باشیم $\phi'_j(t) = f_j\big(t, \phi_۱(t), \phi_۲(t), \cdots, \phi_n(t)\big)$.

ملاحظه می‌کنیم که برای $n = ۱$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول $x' = f(t, x)$ بدست می آید.

در مورد دستگاه معادلات بالا نیز یک مسئله مقدار اولیه عبارت است از بدست آوردن جواب $\phi_۱(t), \phi_۲(t), \cdots, \phi_n(t)$ برای دستگاه، به طوری که برای $t_\circ \in I$ و مقادیر داده شده $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n$ داشته باشیم:

$$\phi_j(t_\circ) = \alpha_j \qquad (j = ۱, ۲, \cdots, n)$$

قضیه: اگر توابع f_i و $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ برای $i, j = ۱, ۲, \cdots, n$ پیوسته باشند و $(t_\circ, \alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n) \in D$ آنگاه دستگاه معادلات (۱) دارای یک و فقط یک جواب $\big(\phi_۱(t), \phi_۲(t), \cdots, \phi_n(t)\big)$ در همسایگی $t_\circ$ است به طوری‌که $\phi_j(t_\circ) = \alpha_j \quad (j = ۱, ۲, \cdots, n)$.

اثبات: [17].

به‌طور کلی، نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی nام حالتی خاص از نظریه‌ی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است چرا که اگر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی nام

$$y^{(n)} = g(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

را در نظر بگیریم و بنویسیم

$$y = x_1, y' = x_2, ..., y^{(n-1)} = x_n$$

آنگاه، دستگاه معادلات مرتبه‌ی اول زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= g(t, x_1, x_2, ...x_n) \end{aligned}$$

که حالتی خاص از دستگاه معادلات است.

اما این قضیه در مورد مسائل مقدار مرزی صادق نیست و با وجود پیوستگی ضرایب مشتقات مسئله می‌تواند جواب منحصر بفرد نداشته باشد.

مثال ۳ :

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

در اینجا همانطور که می‌دانیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = c_1 cos(4x) + c_2 sin(4x)$ است و با بکار بردن شرط $y(0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $c_1 = 0$ پس $y = c_2 sin(4x)$، نیز با بکار بردن شرط $y(\pi/2) = 0$ داریم $c_2 sin(2\pi) = 0$. یعنی c_2 هر عدد حقیقی می‌تواند باشد و در اینجا جواب مسئله‌ی مقدار مرزی خانواده‌ای از

توابع به شکل $y = c_2 sin(4x)$ می‌باشد.

مثال ۴ :

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

مثل حالت قبل جواب عمومی $y = c_1 cos(4x) + c_2 sin(4x)$ است و با بکار بردن شرط $y(0) = 0$، $c_1 = 0$ می‌شود و $y = c_2 sin(4x)$، اما شرط $y(\pi/2) = 1$ ما را به $c_2 \times 0 = 1$ رهنمون می‌کند که مسئله را بدون جواب می‌گذارد. این مشکلات ما را به قضایای زیر هدایت می‌کند.

قضیه(مسائل مقدار مرزی): فرض کنید $f(t, x, y)$ در ناحیه‌ی،

$R = \{(t, x, y) \ : \ a \leq t \leq b \ , \ -\infty < x < +\infty \ , \ -\infty < y < +\infty\}$ پیوسته باشد و $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(t, x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(t, x, y)$ روی R پیوسته باشند اگر عدد ثابت $M > 0$ وجود داشته باشد چنانکه f_x و f_y در روابط زیر صادق باشند

۱) برای هر (t, x, y) واقع در R $\qquad f_x(t, x, y) > 0$

۲) برای هر (t, x, y) واقع در R $\qquad |f_y(t, x, y)| < M$

آنگاه مسئله مقدار مرزی $x'' = f(t, x, x')$ با شرایط اولیه $x(a) = \alpha$ و $x(b) = \beta$ ، یک جواب منحصر به فرد $x = x(t)$ در $a \leq t \leq b$ دارد.

اثبات: [12].

نتیجه(مسائل مقدار مرزی خطی): فرض کنید $f(t, x, y)$ دارای شکل $f(t, x, y) = p(t)y + q(t)x + r(t)$ باشد و f و مشتقاتش یعنی $f_x = q(t)$ و $f_y = p(t)$ روی R پیوسته باشند، اگر ثابت $M > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که:

۱) برای هر $t \in [a, b]$، $\qquad q(t) > 0 \qquad$ ۲) برای هر $t \in [a, b]$، $\qquad |q(t)| < M$

آنگاه مسئله مقدار مرزی $x'' = p(t)x' + q(t)x + r(t)$ با شرایط اولیه $x(a) = \alpha$ و $x(b) = \beta$ ، یک جواب منحصر به فرد $x = x(t)$ در $a \leq t \leq b$ دارد.

فصل ۲

اسپلاین‌ها و B – اسپلاین‌ها