

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان

**برنامه‌ریزی چندهدفی فازی برای انتخاب تأمین‌کننده و مدل‌سازی ریسک: یک
روش امکانی**

استاد راهنما

دکتر حسن حسن‌پور

استاد مشاور

دکتر نسیم نصرآبادی

نگارنده

سحر مسگران

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

والدین کنجینه های زندگیم

پدر و مادر عزیزم

که هر چه دارم حاصل تربیت مشفقانه و دعای خیر آن هاست

و

خواهر مهربانم

که دوست و پشتیبان همیشگی من بوده است.

قدردانی و تشکر

تأیید خدایی را سزااست که خود معرفت ذاتش را به ما آموخت و نور سپاسش را در قلبمان افروخت، درهای دانش به پروردگارش به رویان برکشود و به اخلاص در یگانگی دانستن خویش هدایتان فرمود و ما را از کثرتی و تردید در شان خود دور نمود. از استاد که تقدیرم جناب آقای دکتر حسن پور به خاطر زحمات بی دریغشان سپاسگزارم. هرگز ادعای کنم که روزی خواهم توانست محبت های ایشان را جبران کنم اما می توانم اطمینان دهم که هیچ گاه لطفشان را فراموش نخواهم کرد. از استاد مشاور کرامیم سرکار خانم نصرآبادی که در به ثمر رساندن این پژوهش مریاری کرده اند، کمال تشکر را دارم. از اساتید محترم گروه ریاضی جناب آقای دکتر امان و جناب آقای دکتر وزیرمی که داورمی این رساله را بر عهده گرفتند و همچنین جناب آقای دکتر پناهی به عنوان نماینده می تحصیلات تکمیلی، قدردانی می نمایم. در پایان از خانواده می محترم که مراد سختی های این راه یار و یاور بوده اند، سپاسگزارم. از دوستان عزیزم خانم هاسعدی، حسینی، حسین زاده، هزبرکلالی، محمدی، امیری و زارعی به پاس محبت های زلال - شان نهایت سپاس را دارم.

چکیده

انتخاب شرکای زنجیره‌ی تأمین، یک تصمیم مهم شامل معیارهای چندگانه و عوامل ریسک است. مدیریت پشتیبانی در زنجیره‌های تأمین به منظور کاهش هزینه و افزایش کیفیت تولیدات، به دنبال مشارکت تأمین‌کنندگان مناسبی است. به همان اندازه که انتخاب تأمین‌کنندگان مناسب در تقلیل هزینه‌ها مؤثر است و باعث افزایش قدرت رقابت شرکت‌ها می‌شود، یک انتخاب نامناسب نیز می‌تواند باعث تنزل موقعیت مالی و عملیاتی شرکت‌ها گردد.

در اغلب مسائل دسترسی به اطلاعات دقیق و داده‌های معین، برای مدل‌بندی وضعیت واقعی امکان‌پذیر نمی‌باشد. به‌علاوه قضاوت افراد معمولاً به صورت مبهم انجام می‌گیرد و مقادیر دقیق و مشخص عددی برای بیان نظرات به کار گرفته نمی‌شود. بنابراین از مفاهیم فازی استفاده می‌گردد.

در این پایان‌نامه مدل‌های برنامه‌ریزی چند هدفی فازی و تصمیم‌گیری چند شاخصه‌ی فازی برای انتخاب تأمین‌کنندگان، ارائه شده و روش‌هایی برای حل آن‌ها پیشنهاد گردیده است.

واژه‌های کلیدی: انتخاب تأمین‌کننده؛ معیارهای چندگانه؛ عوامل ریسک؛ برنامه‌ریزی چند هدفی فازی؛ تصمیم‌گیری چند شاخصه‌ی فازی

فهرست مطالب

۱	مقدماتی از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۳	۲.۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی	۳
۴	۳.۱ α -برش‌ها و اتحاد تجزیه	۴
۶	۴.۱ مجموعه‌های محدب فازی	۶
۶	۵.۱ اصل گسترش	۶
۸	۶.۱ اعداد فازی	۸
۹	۷.۱ اعداد فازی LR	۹
۱۴	۸.۱ قطعی‌سازی اعداد فازی ذوزنقه‌ای	۱۴
۱۵	۹.۱ نظریه‌ی امکان	۱۵
۲۴	۱۰.۱ مقایسه‌ی بین دو عدد فازی	۲۴
۲۵	۱۱.۱ امکان و احتمال	۲۵
۲۹	۲ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی	۲۹
۲۹	۱.۲ مقدمه	۲۹
۳۱	۲.۲ معرفی مسائل برنامه‌ریزی تک هدفی	۳۱
۳۲	۱.۲.۲ برنامه‌ریزی خطی	۳۲

۳۳	برنامه‌ریزی عدد صحیح	۲.۲.۲
۳۴	روش شاخه و کران	۳.۲
۳۶	تجزیه و تحلیل چند معیاره‌ی قطعی	۴.۲
۳۷	روش <i>TOPSIS</i>	۱.۴.۲
۳۹	جواب بهینه‌ی پارتو	۲.۴.۲
۴۰	روش وزن‌دهی	۳.۴.۲
۴۱	روش حداقل-حداکثر وزنی	۴.۴.۲
۴۲	تجزیه و تحلیل چند معیاره‌ی فازی	۵.۲
۴۲	بهینه‌سازی مسائل چند هدفی فازی به کمک نظریه‌ی امکان	۱.۵.۲
۴۶	تصمیم‌گیری چند شاخصه‌ی فازی	۲.۵.۲
۴۶	تحلیل حساسیت	۶.۲
۴۸	انتخاب تأمین‌کنندگان ۳	
۴۸	مقدمه	۱.۳
۵۱	زنجیره‌ی تأمین	۲.۳
۵۳	مدیریت زنجیره‌ی تأمین	۳.۳
۵۴	فرآیندهای اصلی مدیریت زنجیره‌ی تأمین	۴.۳
۵۵	ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان	۵.۳
۵۶	مدل‌های تصمیم‌گیری برای تعریف مسئله و فرموله کردن معیارها	۶.۳
۵۶	مدل‌های تصمیم‌گیری برای ارزیابی تأمین‌کنندگان	۷.۳
۵۷	مدل‌های گروه‌بندی	۱.۷.۳
۵۷	مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی	۲.۷.۳
۵۹	روش تحلیل پوششی داده‌ها	۳.۷.۳
۶۰	روش میزان انحراف از بهینه	۴.۷.۳

۶۰	روش تاکسونومی عددی	۵.۷.۳
۶۰	سیستم‌های بر پایه‌ی استدلال	۶.۷.۳
۶۱	روش آنروپی بیشینه	۷.۷.۳
۶۱	مدل‌های وزن‌دهی خطی	۸.۷.۳
۶۱	فرآیند تحلیل سلسله مراتبی	۹.۷.۳
۴ برنامه‌ریزی چند هدفی برای انتخاب تأمین‌کننده: یک روش امکانی		
۶۳	مقدمه	۱.۴
	مسئله‌ی برنامه‌ریزی چند هدفی برای انتخاب تأمین‌کننده بدون محدودیت انتخاب توسط مشتری	۲.۴
۶۴		
۶۷	روش حل	۱.۲.۴
۷۱	تحلیل حساسیت	۳.۴
	مسئله‌ی برنامه‌ریزی چند هدفی برای انتخاب تأمین‌کننده با محدودیت انتخاب توسط مشتری	۴.۴
۷۲		
۷۴	روش حل	۱.۴.۴
۷۷	تحلیل حساسیت	۵.۴
۵ تصمیم‌گیری چند شاخصه‌ی فازی برای انتخاب تأمین‌کننده		
۷۹	مقدمه	۱.۵
۸۰	اندازه‌ی تشابه براساس فاصله	۲.۵
۸۱	مدل <i>DEMATEL</i> اصلاح شده	۳.۵
۸۹	مدل <i>TOPSIS</i> اصلاح شده	۴.۵
۹۴	روش اجرا	۵.۵
۱۰۲	تحلیل حساسیت	۶.۵

لیست جداول

- ۱.۱ اندازه‌های امکان برای متوسط درجه حرارت در ۱۳ آبان با $X = [10, 20]$ ۲۰
- ۲.۱ توزیع امکان متناظر با بزرگی یک قالی بر حسب دو متغیر V_1 و V_2 . . ۲۶
- ۳.۱ اندازه‌های احتمال و امکان نوع بیماری ۲۶
- ۱.۳ تقسیم بندی کلی عمده‌ترین مدل‌های کمی انتخاب تأمین‌کننده ۵۵
- ۱.۴ اعداد فازی ذوزنقه‌ای مربوط به مثال ۱.۲.۴ ۶۹
- ۲.۴ α -برش‌های داده‌های جدول ۱.۴ به ازای $\alpha_1 = \dots = \alpha_8 = 0.5$. . . ۷۰
- ۳.۴ مقادیر قطعی شده‌ی توابع هدف مثال ۱.۲.۴ به ازای مقادیر مختلف α ۷۱
- ۴.۴ اعداد فازی ذوزنقه‌ای و α -برش‌های آن‌ها به ازای $\alpha_1 = \dots = \alpha_{10} = 0.5$ در مثال ۱.۴.۴ ۷۷
- ۵.۴ مقادیر قطعی شده‌ی توابع هدف مثال ۱.۴.۴ به ازای مقادیر مختلف α ۷۸
- ۱.۵ تأثیر ارزیابی‌ها با به کارگیری متغیرهای زبانی ۸۲
- ۲.۵ مقادیر زبانی برای درجه‌بندی گزینه‌ها ۹۰
- ۳.۵ ارزیابی‌های زبانی هر معیار توسط مدیر تولید ۹۶
- ۴.۵ ارزیابی‌های زبانی هر معیار توسط مدیر کیفیت ۹۶
- ۵.۵ ارزیابی‌های زبانی هر معیار توسط مدیر برنامه‌ریزی ۹۷

- ۶.۵ جداول مربوط به ماتریس‌های \tilde{T} و \tilde{X} ۹۷
- ۷.۵ جدول مربوط به نقاط قطعی شده ۹۸
- ۸.۵ وزن‌ها و وزن‌های نرمال شده ۹۹
- ۹.۵ ارزیابی تأمین‌کنندگان توسط مدیر تولید ۱۰۰
- ۱۰.۵ ارزیابی تأمین‌کنندگان توسط مدیر کیفیت ۱۰۰
- ۱۱.۵ ارزیابی تأمین‌کنندگان توسط مدیر برنامه‌ریزی ۱۰۰
- ۱۲.۵ مقادیر تشابهات و مقادیر s_{gj} و s_{bi} و u_j ۱۰۱

لیست تصاویر

۵۲	۱.۳	شمایی از یک زنجیره‌ی تأمین
۷۲	۱.۴	رابطه‌ی تابع هدف با α در مثال ۱.۲.۴
۷۸	۲.۴	رابطه‌ی تابع هدف با α در مثال ۱.۴.۴
۸۲	۱.۵	اعداد فازی مثلثی برای میزان تأثیر
۸۹	۲.۵	وزن معیار C_i
۹۹	۳.۵	نمودار سببی مربوط به داده‌های جدول ۷.۵
۱۰۱	۴.۵	نمودار انحراف استاندارد بر حسب α
۱۰۲	۵.۵	تحلیل حساسیت

پیشگفتار

سازمان‌ها و شرکت‌های زمان حاضر برای اینکه بتوانند در صحنه‌های رقابت جهانی دوام بیاورند و با چهره‌ای موفق ظاهر شوند، نیاز دارند عوامل خاصی از قبیل کیفیت محصولات و کیفیت روندهای اجرایی و تولیدی سازمان را در ساختار و محصولات خود به حد مطلوبی برسانند. حال آنکه رمز موفقیت در رسیدن به این اهداف این است که بتوانند بر روی فعالیت‌های اصلی خود و اهداف اصلی سازمان تمرکز بیشتری داشته باشند. لذا در راستای حل این مشکل اساسی بسیاری از مدیران سازمان‌های بزرگ تصمیم گرفتند فعالیت‌هایی را که اهمیت راهبردی چندانی برای سازمان ندارند به منابع بیرون از سازمان واگذار گردد. با چنین اقدامی مدیران و در راستای اقدام آن‌ها، کارکنان می‌توانند روی فعالیت‌هایی در سازمان که بر عوامل مذکور تأثیر مستقیم دارند، تمرکز بیشتری داشته و به نحو مطلوب به انجام برسانند. اما در جریان یک فرآیند برون‌سپاری، مسائل مختلفی مد نظر قرار می‌گیرد. از جمله‌ی این مسائل انتخاب سرویس دهندگان، نوع الگوریتم انتخاب و بسیاری از عوامل است، که از جمله مسائل و دغدغه‌های فکری مدیران می‌باشد.

برای انتخاب تأمین‌کنندگان تاکنون روش‌های مختلفی ارائه شده است. در اکثر حالات تصمیم‌گیرنده با تصمیم‌گیری‌هایی مواجه است که عوامل مختلفی در آن دخیل می‌باشند. این عوامل نیز به نوبه‌ی خود دارای حالات مختلف هستند که به صورت عوامل کاملاً مستقل و عوامل وابسته نمایان شده‌اند. در بسیاری از موارد نیز تخصیص مقادیر دقیق به این ملاک‌ها یا عوامل ممکن نبوده و با حالت‌های غیر دقیق مواجه می‌باشیم. این عوامل

و گستردگی ملاک‌ها، باعث گردیده است اکثر مدل‌های ارائه شده نتوانند فرآیند سیستم را به دقت مدل‌سازی نمایند. لذا در سال‌های اخیر برای بررسی این نامعینی در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، استفاده از مفاهیم فازی مورد توجه واقع گردیده که در این پایان‌نامه به آن پرداخته‌ایم.

آنچه در این تحقیق خواهد آمد به قرار زیر است:

در فصل اول، پس از معرفی مجموعه‌های فازی و مفاهیم و تعاریف مقدماتی آن، اعداد فازی مورد بررسی قرار گرفته است. سپس مبانی نظریه‌ی امکان ارائه گردیده و در پایان این فصل با توجه به اهمیت تفاوت مفاهیم امکان و احتمال، به مقایسه‌ی کوتاه بین این دو پرداخته شده است.

در فصل دوم، ابتدا به معرفی انواع مسائل بهینه‌سازی و سپس به تجزیه و تحلیل مدل‌های تصمیم‌گیری چند معیاره‌ی قطعی و فازی پرداخته شده است.

در فصل سوم، پس از معرفی زنجیره‌ی تأمین و مدیریت و فرآیندهای آن، به بررسی مدل‌های تصمیم‌گیری برای تعریف مسئله و فرموله کردن معیارها پرداخته شده و همچنین مروری اجمالی بر مدل‌های تصمیم‌گیری برای ارزیابی تأمین‌کنندگان ارائه گردیده است.

در فصل چهارم، مدل‌های برنامه‌ریزی چند هدفی فازی برای انتخاب تأمین‌کننده در دو حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد که از نظریه‌ی امکان برای حل این مدل‌ها استفاده شده است. سپس مثالی برای هر حالت ارائه می‌گردد و در پایان هر مثال تحلیل حساسیت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل پایانی، مدل تصمیم‌گیری چند شاخصه‌ی فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد که با ترکیب روش‌های *DEMETAL*^۱ اصلاح شده و *TOPSIS*^۲ اصلاح شده به انتخاب تأمین‌کننده‌ی مناسب می‌پردازد. سپس تحلیل حساسیت در این قسمت نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

^۱The Decision-Making Trial and Evaluation Laboratory

^۲Technique for Order-Preference by Similarity to Ideal Solution

فصل ۱

مقدماتی از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱.۱ مقدمه

در نظریه‌ی مجموعه‌ها که زیربنای ریاضیات جدید است، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای از اشیاء معین تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شیء مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه‌ی متناظر است و اگر نباشد، عضو آن مجموعه نیست. مثلاً اگر مجموعه‌ی مرجع X ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگ‌تر از ده بودن»، آن‌گاه P یک ویژگی خوش-تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگ‌تر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر.

حال فرض کنید که بخواهیم درباره‌ی آن دسته از مجموعه‌ی اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در اینجا با یک ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم یعنی «بزرگ» سر و کار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف

در گردایه‌ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰۰ عددی بزرگ است و عضو گردایه‌ی اعداد حقیقی «بزرگ» است یا خیر؟ ۱۰۰۰۰ چه طور؟ می‌بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست و این نظریه از صورت‌بندی این مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم با آن سر و کار داریم این‌گونه‌اند؛ یعنی مفاهیمی منعطف هستند و یا مجموعه‌هایی با کران‌های نادقیق متناظر هستند.

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز می‌باشد. قبل از ورود به بحث اصلی و معرفی ساختار ریاضی این نظریه، اساس کار پروفسور لطفی عسگرزاده (معروف به زاده) مبدع ایرانی تبار این نظریه را شرح می‌دهیم. این کار را با پیگیری مثال فوق درباره‌ی اعداد حقیقی بزرگ انجام می‌دهیم. همان‌طور که در بالا بیان شد، آنچه در مجموعه بودن «اعداد بزرگ» اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ی «اعداد بزرگ» است. مثلاً اینکه آیا ۱۰۰۰ عددی بزرگ است؟ ۱۰۰۰۰ چه طور؟ و همین‌طور برای سایر اعداد. بنا به پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، عددی از بازه‌ی $[0, 1]$ به عنوان درجه‌ی بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چه یک عدد، بزرگ‌تر بود عدد متناظر برای عضویت آن در A یعنی «مجموعه‌ی اعداد بزرگ» به یک نزدیک‌تر باشد و برعکس، هر چه عدد مورد نظر کوچک‌تر بود، عدد مربوط به عضویت آن در A به صفر نزدیک‌تر باشد.

۲.۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر هر زیر مجموعه‌ی معمولی A از X ، یک تابع از X به $\{0, 1\}$ است که این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه‌ی $[0, 1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X ، عددی را از بازه‌ی $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه‌ی معمولی نیست، بلکه آن را یک مجموعه‌ی فازی می‌نامیم (به طور دقیق‌تر، یک زیر مجموعه‌ی فازی از X) و با \tilde{A} نشان می‌دهیم. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان می‌دهیم، مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X یک عدد را از بازه‌ی $[0, 1]$ به عنوان درجه‌ی عضویت آن عنصر در مجموعه‌ی فازی \tilde{A} نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد ۱ نشان دهنده‌ی تعلق بیشتر x به مجموعه‌ی فازی \tilde{A} است و برعکس نزدیکی آن به ۰ نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به \tilde{A} است.

برای نشان دادن یک مجموعه‌ی فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش، به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه‌ی فازی است. روش متداول دیگر، توصیف یک مجموعه‌ی فازی به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}.$$

هنگامی که X یک مجموعه‌ی متناهی (یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_1, \dots, x_n\}$ باشد، یک زیرمجموعه‌ی \tilde{A} از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \dots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} \right\},$$

یا

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i,$$

و هنگامی که X یک مجموعه‌ی پیوسته باشد، نماد زیر به کار برده می‌شود:

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x.$$

که در آن‌ها علامت‌های $\sum_{i=1}^n$ و \int_X نشان‌دهنده‌ی اجتماع است. به علاوه در بعضی موارد و برای اختصار به جای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ، $\tilde{A}(x)$ نوشته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع و \tilde{A} یک زیرمجموعه‌ی فازی از آن باشد. مجموعه‌ی نقاطی از X که برای آن‌ها $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ ، تکیه‌گاه^۱ \tilde{A} نام دارد و با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. مقدار $h(\tilde{A}) = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$ ارتفاع مجموعه‌ی \tilde{A} نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه‌ی فازی \tilde{A} برابر یک باشد، آن‌گاه \tilde{A} نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت، \tilde{A} زیر نرمال نام دارد. بدیهی است که هر مجموعه‌ی فازی زیر نرمال \tilde{A} را می‌توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ‌ها بر ارتفاع \tilde{A} ، نرمال کرد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع و \tilde{A} و \tilde{B} دو زیرمجموعه‌ی فازی از آن باشند، در این صورت می‌گوییم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ هرگاه:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x).$$

۳.۱ - برش‌ها و اتحاد تجزیه α

مجموعه‌ی مرجع X و زیر مجموعه‌ی فازی \tilde{A} از آن را در نظر بگیرید و فرض کنید $\alpha \in (0, 1]$. مجموعه عناصری از X که درجه‌ی عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی \tilde{A}

^۱Support

حداقل به بزرگی α باشد، α -برش (یا مجموعه‌ی تراز α) \tilde{A} نام دارد و با A_α نشان داده می‌شود. یعنی؛

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

چنانچه $\alpha = 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$A_0 = \overline{\{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}},$$

که منظور از \bar{B} بستار مجموعه‌ی B است. α -برش قوی مجموعه‌ی فازی \tilde{A} با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

α -برش‌ها، توصیفی از مجموعه‌ی فازی با استفاده از مجموعه‌های قطعی ارائه می‌دهند و ویژگی‌های آن‌ها در زیر بیان شده‌اند [۳۷]:

(۱) خانواده‌ی $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ یکنواست. یعنی

$$0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha.$$

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1], A_\alpha \subseteq B_\alpha \quad (۲)$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha, \quad (\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \quad (۳)$$

همچنین هر مجموعه‌ی فازی مثل \tilde{A} را می‌توان بر حسب مجموعه‌های تراز A_α به صورت زیر نوشت، که به اتحاد تجزیه شهرت یافته است:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha A_\alpha$$

که در آن

$$\alpha A_\alpha = \{\alpha x \mid x \in A_\alpha\}.$$

در بعضی موارد بسته به اینکه تابع عضویت \tilde{A} پیوسته یا گسسته باشد رابطه‌ی فوق به صورت‌های زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{A} = \int_0^1 \alpha A_\alpha$$

یا

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha} \alpha A_\alpha$$

که در آن‌ها علامت‌های \int_0^1 و \sum_{α} نشان‌دهنده‌ی اجتماع است.

۴.۱ مجموعه‌های محدب فازی

وقتی مجموعه‌ی مرجع، فضای برداری اقلیدسی n بعدی (\mathbb{R}^n) باشد، مفهوم محدب بودن مجموعه‌های قطعی را می‌توان به مجموعه‌های فازی نیز گسترش داد.

تعریف ۱.۴.۱. یک مجموعه‌ی فازی محدب است، هرگاه هر یک از α -برش‌هایش یک مجموعه‌ی محدب باشند.

تعریف ۲.۴.۱. یک مجموعه‌ی فازی محدب است هرگاه رابطه‌ی زیر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)).$$

ثابت می‌شود که دو تعریف فوق معادلند [۳۷].

۵.۱ اصل گسترش

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی است. این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیر فازی به گونه‌ای که به صورت

کمیت‌های فازی درآیند. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

تابع معمولی $f : X \rightarrow Y$ را در نظر بگیرید. این تابع به هر $x \in X$ ، نقطه‌ای از Y را می‌انگارد. بنابراین تابع f بر هر نقطه از X عمل کرده و نقطه‌ای از Y را به آن نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم f را طوری گسترش دهیم که به جای اینکه بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیرمجموعه‌ی فازی از X عمل کند. یعنی قلمرو f از X به $F(X)$ (مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های فازی X) تعمیم داده شود. آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیر مجموعه‌ی فازی از X مثلاً \tilde{A} است. مسلماً انتظار داریم که $f(\tilde{A})$ یعنی حاصل عمل f بر \tilde{A} ، دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک زیر مجموعه‌ی فازی از Y مانند \tilde{B} باشد. اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می‌کند.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید X_1, \dots, X_n ، n مجموعه‌ی مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ ، n زیرمجموعه‌ی فازی به ترتیب از X_1, \dots, X_n باشند. در این صورت حاصل ضرب دکارتی $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ به صورت یک مجموعه‌ی فازی از X با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{(\tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_n)}(x_1, \dots, x_n) = \min_i \{ \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x_i \in X_i \}.$$

تعریف ۲.۵.۱. (اصل گسترش) مفروضات تعریف فوق را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید f نگاشتی از X به مجموعه‌ی Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ به عنوان یک زیرمجموعه‌ی فازی \tilde{B} از Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_n), x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \}$$