دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

موضوع:

مرکزساز جبرهای عملگری استاندارد و H^*-جبرهای نیم‌ساده

استاد راهنما:

پروفسور علی عبادیان

محقق:

فریبا پیرمحمدی

مهر ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

مقدس‌ترین واژه در لغت‌نامه‌ی دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت او می‌دانم

پدر بزرگوارم،

آن فرشته‌ای که از خواسته‌هایش گذشت، سختی‌ها را به جان خرید و خود را اسیر بلای مشکلات و ناملایمات کرد، تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام، برسم.

پروردگارا؛ نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره‌ی تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

برادارن و خواهران عزیزم

که همواره در طول تحصیل مشوقم بوده‌اند و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودشان مایه‌ی دلگرمی من می‌باشد.

سپاسگزاری...

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست

به امید آنکه توفیق یابم، جز خدمت به خلق او نکوشم

از جناب آقای دکتر علی عبادیان، استاد راهنما و همچنین از آقای دکتر استاد باشی و آقای دکتر شمس که زحمت داوری و ویرایش دوباره‌ی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چگونه سپاس گوییم تأثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را به کلبه‌ی محقر وجودم فروزان ساخته است.

فریبا پیرمحمدی

مهر ۱۳۹۳

چکیده

فرض کنیم A یک H^*−جبر نیم‌ساده و $T: A \to A$ یک نگاشت جمعی باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$ و بعضی $n \geqq ۱$ داشته باشیم

$$۲T(x^{n+۱}) = T(x)x^n + x^nT(x)$$

در این صورت T یک مرکزساز چپ و راست است.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز جهت اثبات قضایای اصلی در فصول بعدی آورده شده است.

در فصل دوم مشتق و مشتق جردن تعریف شده و برخی خواص آن‌ها همراه برخی قضایای اولیه مربوط به آن‌ها بیان شده است. همچنین به مشتق بودن برخی از مشتق‌های جردن در ساختارهای مختلف پرداخته‌ایم و قضایایی در این رابطه بیان نموده‌ایم.

فصل سوم که در واقع فصل اصلی می‌باشد، به تعریف مرکزسازها و مرکزسازهای جردن و برخی از خواص آن‌ها پرداخته‌ایم. همچنین به مرکزساز بودن برخی از مرکزسازهای جردن در ساختارهای مختلف پرداخته‌ایم و قضایایی در این رابطه بیان نموده‌ایم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی زیر نوشته شده است:

• I. Kosi-Ulbl and J. Vukman, *On centralizers of standard operator Algebras and semisimple H^*-Algebra,* Acta Math. Hungar. **110** (3) (2006), 217–223.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم اولیه، لم‌ها و قضایایی که در فصل‌های بعدی نیاز داریم بیان کرده‌ایم.

۱.۱ گروه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $f : G \times G \to G$ را یک عمل دوتایی (عمل) روی G می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی G را گروه [۱] می‌نامیم هرگاه در G عملی دوتایی که با نماد $\bullet$ نشان می‌دهیم و ضرب می‌نامیم، موجود باشد به طوری که به ازای هر $a, b, c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

i) $a \bullet b \in G$ (بسته بودن)

ii) $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ (شرکت‌پذیر بودن عمل $\bullet$)

---
[۱] group

iii) در C عضوی مانند e موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in G$، $a \bullet e = e \bullet a = a$

(وجود عنصر همانی در G)

iv) به ازای هر $a \in G$ عنصری از G مانند a^{-1} موجود باشد به طوری که :

$$a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$$

(وجود عنصر وارون در G)

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی G را به همراه عمل دوتایی $\bullet$ یک نیم‌گروه [1] (شبه گروه) می‌نامیم، هرگاه عمل $\bullet$ در G دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G را آبلی [2] (تعویض‌پذیر) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in G$، $a \bullet b = b \bullet a$. گروهی را که آبلی نباشد، یک گروه غیر آبلی [3] می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. تعداد اعضای گروه G را مرتبه‌ی گروه G می‌نامیم، که با نماد $\mathrm{O}(G)$ نمایش می‌دهیم. البته تعداد این اعضا مخصوصاً زمانی جالب خواهد بود که متناهی باشد که در این حالت G را یک گروه متناهی می‌نامیم.

مثال ۶.۱.۱.

i) مجموعه‌ی $G = \{-۱, ۰, +۱\}$ با عمل دوتایی ضرب اعداد حقیقی گروهی آبلی با مرتبه‌ی دو است.

ii) $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ با عمل دوتایی جمع معمولی، گروه‌هایی آبلی و نامتناهی‌اند و نیز هر سه با عمل ضرب معمولی، نیم‌گروه‌اند.

[1] semi−group
[2] Abelian−group
[3] non−Abelian

۲.۱ حلقه

تعریف ۱.۲.۱ (حلقه [1] **).** فرض کنید R یک مجموعه همراه با اعمال $+$ و $\cdot$ باشد. در این صورت R را یک حلقه گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) $(R, +)$ یک گروه آبلی باشد. یعنی:

۱) R نسبت به عمل $+$ بسته باشد،

۲) عمل $+$ در R شرکت‌پذیر باشد،

۳) R نسبت به عمل $+$ دارای عضو خنثی باشد، (این عضو خنثی را صفر نامیده و با (0) نمایش می‌دهیم).

۴) هر عضو R نسبت به عمل $+$ عضو قرینه داشته باشد، (معکوس a را با $-a$ نمایش داده و آن را قرینه‌ی a می‌نامیم).

۵) عمل $+$ در R تعویض‌پذیر باشد.

ب) $(R, \cdot)$ یک نیم‌گروه باشد. یعنی:

۱) R نسبت به عمل $\cdot$ بسته باشد،

۲) عمل $\cdot$ در R شرکت‌پذیر باشد.

ج) عمل $\cdot$ نسبت به عمل $+$ از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد. یعنی به ازای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم:

۱) $(b + c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$

۲) $a\cdot (b + c) = a\cdot b + a\cdot c$.

---

[1] ring

حلقه‌ی فوق را با $(R, +, \cdot)$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که $R \neq \{0\}$، حلقه‌ی R را غیربدیهی می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را یک زیرحلقه گوییم هرگاه S همراه با عمل جمع و ضرب R تشکیل یک حلقه دهد و با نماد $S \leqslant R$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. حلقه‌ی R را یکدار [1] می‌نامیم، هرگاه یک عضو $1 \in R$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$، $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

مثال ۴.۲.۱.

i) مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. $+$ را عمل جمع معمولی اعداد صحیح و $\cdot$ را عمل ضرب معمولی اعداد صحیح تعریف می‌کنیم. $\mathbb{Z}$ با این دو عمل، حلقه‌ای یکدار و تعویض‌پذیر است.

ii) مجموعه‌ی اعداد گویا، $\mathbb{Q}$ را در نظر می‌گیریم. $+$ را عمل جمع معمولی اعداد گویا و $\cdot$ را عمل ضرب معمولی اعداد گویا تعریف می‌کنیم. $\mathbb{Q}$ با این دو عمل، حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. عضو مخالف صفر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر [2] می‌نامیم، هرگاه عضو مخالف صفر دیگری از R مانند b موجود باشد به طوری که $a \cdot b = 0$.

تعریف ۶.۲.۱. یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر را دامنه‌ی صحیح (قلمرو صحیح) می‌نامیم، هرگاه فاقد مقسوم‌علیه صفر باشد.

[1] with unit
[2] zero divisor

مثال ۷.۲.۱. $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ قلمروهایی صحیح‌اند.

تعریف ۸.۲.۱. حلقه‌ای را که تمامی اعضای غیرصفر آن تحت عمل ضرب تشکیل گروه دهند، حلقه‌ی تقسیم [۱] می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$Z(R) = \{a \in R \mid ax = xa, x \in R\}$$

را مرکز حلقه‌ی R می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. یک حلقه‌ی تقسیم تعویض‌پذیر را میدان می‌نامیم.

مثال ۱۱.۲.۱. $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی میدان‌اند.

۳.۱ فضای برداری

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه‌ی ناتهی V را یک فضای برداری [۲] (فضای خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم، هرگاه V با عمل $+$ گروه آبلی باشد و به ازای هر $a \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، عضوی از V نمایش داده شده به صورت αa نظیر شود به طوری که به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $v, w \in V$ داشته باشیم:

i) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$،

ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$،

iii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$،

[۱] division−ring
[۲] vector space

$iv)$ $۱v = v$، (که در آن ۱ نشان دهنده‌ی عضو همانی $\mathbb{F}$ تحت عمل ضرب می‌باشد).

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ و $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، آنگاه V را به ترتیب فضای برداری مختلط (فضای خطی مختلط) و فضای برداری حقیقی (فضای خطی حقیقی) می‌نامیم. هر عضو V را بردار و هر عضو $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامیم.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان و

$$V = \{(\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{F}(i = ۱, ۲, \dots, n)\}.$$

دو عضو $(\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n)$ و $(\beta_۱, \beta_۲, \dots, \beta_n)$ از V با هم برابرند، هرگاه به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$ داشته باشیم، $\alpha_i = \beta_i$. تعریف می‌کنیم:

$i)$ $(\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n) + (\beta_۱, \beta_۲, \dots, \beta_n) = (\alpha_۱ + \beta_۱, \dots, \alpha_n + \beta_n)$؛

$ii)$ $\gamma(\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n) = (\gamma\alpha_۱, \dots, \gamma\alpha_n)$ که در آن $\gamma \in \mathbb{F}$.

V تحت اعمال تعریف شده در بالا روی میدان $\mathbb{F}$ فضایی برداری است که آن را با نماد $\mathbb{F}^n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $W \subset V$؛ W را زیرفضای برداری V می‌نامیم، هرگاه W تحت اعمال V روی $\mathbb{F}$ یک فضای برداری باشد. به طور معادل W را زیرفضای برداری V می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $w_۱, w_۲ \in W$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$، $\alpha w_۱ + \beta w_۲ \in W$.

۴.۱ جبر

در این بخش از نماد $\mathbb{F}$ برای نشان دادن میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A را به همراه نگاشت $A \times A \to A$ با ضابطه‌ی $(x,y) \to xy$ که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و $x,y,z \in A$ در خواص زیر صدق می‌کند:

i) $x(yz) = (xy)z$؛

ii) $(x+y)z = xy + yz$ و $x(y+z) = xy + xz$؛

iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$؛

یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم.

میدان $\mathbb{F}$ را میدان اسکالر جبر A می‌نامیم. اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، آنگاه A را به ترتیب جبر حقیقی و جبر مختلط می‌نامیم.

تذکر ۲.۴.۱. در A، نگاشت $(x,y) \to xy$ را ضرب و بردار xy را ضرب x و y می‌نامیم.

تذکر ۳.۴.۱. خاصیت (i) از تعریف (۱.۴.۱) بیان می‌کند که مجموعه‌ی A همراه عمل ضربش یک نیم‌گروه است.

تذکر ۴.۴.۱. خاصیت (iii) از تعریف (۱.۴.۱) با

$$(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y), \qquad (x,y \in A, \alpha,\beta \in \mathbb{F})$$

معادل است.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باشد. زیرفضای برداری B از A را یک زیرجبر می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in B$ داشته باشیم

$$ab \in B.$$

تعریف ۶.۴.۱. زیرمجموعه‌ای از جبر A مانند S را که در خاصیت $x,y \in S \Longrightarrow xy \in S$ صدق کند، یک شبه زیر گروه از A می‌نامیم.

تعریف ۷.۴.۱. یک زیرفضای برداری از جبر A را که زیرشبه گروهی از آن نیز باشد، یک زیرجبر از A می‌نامیم.

بدیهی است که اگر B یک زیرجبر از جبر A باشد، آنگاه B با همان میدان اسکالر A خود یک جبر است. در این حالت ضرب تعریف شده در B عبارت است از تحدید ضرب تعریف شده در A بر مجموعه‌ی $B \times B$.

تعریف ۸.۴.۱. عضو e از جبر A را عضو یکه (همانی) می‌نامیم، هرگاه $e \neq 0$ و به ازای هر $x \in A$، $ex = xe = x$.

تعریف ۹.۴.۱. جبری را که دارای عضو یکه باشد، جبر یکدار [۱] می‌نامیم.

یک جبر حداکثر یک عضو یکه دارد؛ یعنی اگر e و e' هر دو یکه‌های یک جبر باشند، آنگاه $e' = ee' = e$.

عضو یکه‌ی منحصر به فرد یک جبر یکه‌دار را با ۱ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۴.۱. جبر A را یک جبر جابجایی [۲] می‌نامیم، هرگاه به ازای هر x و y داخل A، $xy = yx$.

[۱] with unit−algebra
[۲] commutative−algebra

تعریف ۱.۴.۱۱. عضو x را در جبر A خودتوان [1] می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$a^۲ = x.$$

تعریف ۱.۴.۱۲. فرض کنیم A و M به ترتیب جبر و فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. M را به همراه نگاشت $A \times M \to M$ با ضابطه‌ی $(a, m) \to am$ که در روابط زیر صدق می‌کند،

i) به ازای هر عضو ثابت $a \in A$، نگاشت $m \to am$ روی M خطی باشد؛

ii) به ازای هر عضو ثابت $m \in M$، نگاشت $a \to am$ روی A خطی باشد؛

iii) به ازای هر $a_۱, a_۲ \in A$ و $m \in M$، $(a_۱a_۲)m = a_۱(a_۲m)$؛

یک $A-$مدول چپ [2] می‌نامیم.

نگاشت $(a, m) \to am$ را ضرب مدولی می‌نامیم. به طور مشابه M را یک $A-$مدول راست [3] می‌نامیم، هرگاه یک نگاشت $A \times M \to M$ با ضابطه‌ی $(a, m) \to ma$ موجود باشد به طوری که در روابط (i) و (ii) صدق کند و نیز به ازای هر $a_۱, a_۲ \in A$ و $m \in M$، $(ma_۱)a_۲ = m(a_۱a_۲)$.

تعریف ۱.۴.۱۳. M را یک $A-$دو مدول [4] می‌نامیم، هرگاه M، $A-$مدول راست و $A-$مدول چپ باشد به ازای هر $a, b \in A$ و $m \in M$ ضرب‌های مدولی زیر را داشته باشیم:

$$a(mb) = (am)b.$$

تعریف ۱.۴.۱۴. یک گروه جمع‌پذیر A از $R-$مدول M را یک زیرمدول M می‌نامیم هرگاه $r \in R$ و $a \in A$، آنگاه $ra \in A$.

[1] idempotent
[2] left $A-$module
[3] right $A-$module
[4] $A-$bimodule

تعریف ۱.۴.۱۵. یک مدول A روی یک حلقه‌ی R را ساده گوییم هرگاه زیرمدولی به غیر از خودش و صفر نداشته باشد.

تعریف ۱.۴.۱۶. یک مدول A روی یک حلقه‌ی R با عضو واحد را نیم‌ساده گوییم، هرگاه حاصل‌جمع مستقیم از زیرمدول‌های ساده باشد.

۱.۵ مقدماتی از جبر و جبر خطی

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم G و H دو گروه باشند. نگاشت $\varphi : G \to H$ را همریختی (همریختی گروهی [۱]) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. تابع $T : V \to W$ را تبدیل خطی (نگاشت خطی) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in V$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

وقتی T خطی است، اغلب به جای $T(x)$ از نماد Tx استفاده می‌کنیم.

تبدیل خطی در واقع همان همریختی فضاهای برداری روی یک میدان است.

اگر $\mathbb{F}$ را میدان‌های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{T}^{۱} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = ۱\}$ و $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم، آنگاه T را به ترتیب نگاشت $\mathbb{Q}$−خطی، نگاشت $\mathbb{R}$−خطی، نگاشت $\mathbb{T}^{۱}$−خطی و نگاشت $\mathbb{C}$−خطی می‌نامیم.

[۱] homomorphism−group

لم ۱.۵.۳. *فرض کنیم V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند. اگر $f : V \to W$ نگاشتی جمعی باشد، آنگاه نگاشتی $\mathbb{Q}$-خطی نیز هست.*

برهان. به لم [۱] از مرجع [۷] مراجعه کنید. $\square$

لم ۱.۵.۴. *فرض کنیم V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. $f : V \to W$ نگاشتی $\mathbb{T}$[۱]-خطی است اگر و تنها اگر نگاشتی $\mathbb{C}$-خطی باشد.*

برهان. به لم [۱] از مرجع [۷] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنیم $T, U : V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند و $\alpha \in \mathbb{F}$. به ازای هر $x \in V$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} (T+U)(x) = Tx + Ux, \\ (\alpha T)(x) = \alpha(Tx). \end{cases}$$

مجموعه‌ی تمامی تبدیلات خطی از V به W با اعمال تعریف شده در بالا یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است که با نماد $L(V, W)$ نمایش می‌دهیم، (یادآوری می‌کنیم که $L(V, W)$ تنها زمانی تعریف می‌شود که V و W فضاهایی برداری روی میدانی واحد باشند).

مثال ۱.۵.۶. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. به ازای هر $x \in V$ و $T, U \in L(V, V)$، عمل ضرب را به صورت $(TU)(x) = T(Ux)$ تعریف می‌کنیم. با عمل ضرب بالا، $L(V, V)$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ است. این جبر را با نماد $L(V)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۵.۷. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت

i) یک تبدیل خطی از V به V را یک عملگر خطی [۱] روی V می‌نامیم.

---
[۱] linear operator

ii) یک تبدیل خطی از V به F را یک تابعک خطی [1] (تابعی خطی) روی V می‌نامیم.

iii) مجموعه‌ی تمامی تابعک‌های خطی روی V را فضای دوگان V [2] می‌نامیم و با نماد V^* نمایش می‌دهیم؛ در واقع $V^* = L(V, F)$.

تعریف ۸.۵.۱. فرض کنیم V و W فضاهای برداری باشند. نگاشت $f : V \times V \to W$ را نگاشت دو جمعی [3] می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ داشته باشیم:

i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$؛

ii) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$.

تعریف ۹.۵.۱. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری روی $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت

$$f : V \times V \to W$$

را نگاشت دو خطی [4] می‌نامیم هرگاه:

i) f دو جمعی باشد؛

ii) به ازای هر $x, y \in V$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$، $f(\alpha x و \beta y) = \alpha\beta f(x, y)$.

تعریف ۱۰.۵.۱. فرض کنیم A و B دو جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $\varphi : A \to B$ را همریختی (همریختی جبری) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و $x, y \in A$ داشته باشیم:

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$؛

ii) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$؛

iii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

[1] linear functional
[2] daul space of V
[3] biadditive mapping
[4] bilinear mapping