دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

عنوان:

عدد نظم کاستلنوو-مامفورد برای مدول‌ها و کران آن برای حاصل‌ضرب تانسوری

نگارش:

سارا چهرازی

استادراهنما:

دکتر سیامک یاسمی

استاد مشاور:

دکتر مسعود طوسی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در ریاضی محض

دی‌ماه ۱۳۸۷

چکیده

فرض کنید $R=K[X_۱,\dots,X_n]$ یک حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K و M یک Rـمدول مدرج متناهی مولد باشد و هم‌چنین فرض کنید I و J دو ایده‌ال R باشند. اخیراً برخی کارهای مطالعاتی در خصوص این‌که چه زمانی عدد نظم کاستلنوو‌ـمامفورد $I+J$، $I\cap J$، I^k $(k\in\mathbb{N})$، IJ و IM می‌تواند به‌وسیله عدد نظم I، J و M کران‌دار شود؛ انجام شده است. بعدها کاویگلیا با برخی شرایط برای مدول‌های مدرج متناهی مولد M و N نشان داد که؛ $\operatorname{reg}(M\otimes N)\leq\operatorname{reg}(M)+\operatorname{reg}(N)$.

در این پروژه همه این نتایج را گردآوری و در بخش پایانی عدد نظم کاستلنوو‌ـمامفورد $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ را بررسی نمودیم.

واژگان کلیدی: حاصل‌ضرب تانسوری، عدد نظم کاستلنوو‌ـمامفورد، کوهمولوژی موضعی، تحلیل آزاد مینیمال مدرج.

پیشگفتار

قبل از آن که نظریه‌ای علمی از عدد نظم کاستلنوو- مامفورد ارائه گردد، اولین نتیجه کران‌دار آن، در سال ۱۸۹۳ میلادی، توسط کاستلنوو[1] در [7] اثبات گردید. این نتیجه تحت عنوان «کران عدد نظم ایده‌آل چندجمله‌ای‌هایی که روی یک خم تصویری صفر می‌شوند بیان شده است. به طور مشابه، بحث کلاسیک «مسئلهٔ گامهای زیاد متناهی» برخاسته از قضیه «سی زی جی» هیلبرت[2]، در سال ۱۹۲۳ توسط هنتزلت[3] و نوتر[4] در [18]، و در سال ۱۹۲۶ توسط هرمان[5] در [16] مطرح گردید، که ممکن است به صورت سؤالی برای کران عدد نظم درک شود، می‌توان این سئوال را به شرح زیر بیان نمود:

آیا درجه‌هایی که در یک نمایش آزاد مینیمال از یک مدول مدرج (متناهی مولد)، (بر یک حلقه چندجمله‌ای روی یک میدان) واقع می‌شوند، عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد این مدول را کران‌دار می‌کنند؟

زمانی که مامفورد[6] در سال ۱۹۶۶ در [23]، مفهوم عدد نظم کاستلنوو را معرفی می‌کرد، ابتدا یک نتیجه کران‌داری، که مفهومی اساسی برای ساختار رویه‌های هیلبرت و پیکارد[7] بود را، اثبات نمود.

بعد از معرفی مفهوم عدد نظم، جستجو برای کرانهای آن، به موضوعی جذاب تبدیل گردید که با نقش اصلی و مهم این کرانها در بُعد بنیادی و محاسبه گرانه هندسه جبری، جذاب و پرانگیزه‌تر گردید.

با درک مفاهیم مطرح شده، موضوع این پروژه، تحت عنوان «عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد و کران آن برای حاصلضرب تانسوری مدولها» با هدایت و راهنمایی استاد ارجمند جناب آقای دکتر یاسمی، توسط اینجانب ارائه گردیده که مورد تائید واقع شده است. کار اصلی این پایان‌نامه، بررسی و مطالعه کرانهای عدد نظم برای برخی عملیات جبری، روی ایده‌آلها و مدولها می‌باشد.

برای بررسی و مطالعه این موضوع، آگاهی از اطلاعات اولیه از حلقه‌ها و مدولهای مدرج و همچنین، تعاریف اجمالی از عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد و لم‌های مقدماتی مربوط به آن، ضروری می‌باشد. بدین لحاظ، این مفهومات، در فصل‌های ۲ و ۳ همین نوشتار ارائه گردیده‌اند.

در اجرای این پایان‌نامه، فرض بر این است که، $R = K[X_1, \dots, X_n]$ یک حلقه چندجمله‌ای روی میدان K، و M و N دو Rـ مدول مدرج متناهی مولد و $I, J \subset R$ دو ایده‌آل می‌باشند.

با بیان مفروضات فوق‌الذکر، سؤالات به شرح زیر مطرح است:

الف) در چه صورتی می‌توان عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد I^r را با r ضربدر عدد نظم I محدود کرد.

ب) در چه صورتی می‌توان عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد IJ را توسط عدد نظم I به علاوه عدد نظم J محدود کرد.

1) Castelnuovo 2) Hilbert 3) Hentzelt 4) Noether 5) Hermann 6) Mumford 7) Picard

ج) در چه صورتی می‌توان عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد IM را توسط عدد نظم I به علاوه عدد نظم M محدود کرد.

د) در چه صورتی می‌توان عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد $I \cap J$ را توسط عدد نظم I به علاوه عدد نظم J محدود کرد.

ه) در چه صورتی می‌توان عدد نظم $I + J$ را توسط عدد نظم I به علاوه عدد نظم J محدود کرد.

و) در چه صورتی می‌توان عدد نظم $M \otimes_R N$ را توسط عدد نظم M به علاوه عدد نظم N محدود کرد.

ز) در چه صورتی می‌توان عدد نظم $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ را توسط عدد نظم M به علاوه عدد نظم N محدود کرد.

(سؤالی که جوابی به آن داده نشد و کرانی دیگر برای عدد نظم $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ مشخص گردید).

در ارتباط با سؤالات مطرح شده، پاسخهای اجمالی آنها به شرح زیر می‌باشد، که تجزیه و تحلیل آنها در فصول ۴ و ۵ به صورت جامع آورده شده‌اند.

۱) پاسخ (الف): چندلر[1] در سال ۱۹۹۷ در [9] با فرض این که $\dim \frac{R}{I} \leq ۱$ است، نشان داده است که $\mathrm{reg}(I^r) \leq r\,\mathrm{reg}(I)$ برقرار می‌گردد.

۲) پاسخ (ب) و (د): شاردین[2]، مینح[3] و ترانگ[4] در سال ۲۰۰۷ در [12] نشان دادند که اگر I و J، دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای تقاطع کامل از R باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\mathrm{reg}(IJ) \leq \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J), \qquad \mathrm{reg}(I \cap J) \leq \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J)$$

۳) پاسخ (ج): کونکا[5] و هرزوگ[6] در سال ۲۰۰۳ در [10] با استفاده از روشهای مشابه چندلر ثابت کردند که تحت فرضیات یکسان، یعنی $\dim \frac{R}{I} \leq ۱$، رابطه زیر ایجاب می‌شود:

$$\mathrm{reg}(IM) \leq \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(M)$$

۴) پاسخ (و): کاویگلیا[7] در سال ۲۰۰۷ در [6] نشان داد که چگونه برای یک همبافت داده شده از مدولهای مدرج و دانستن برخی جزئیات عددهای نظم کاستلنوو ـ مامفورد برای همه مدولهای موجود در همبافت و برای همه همولوژیهای مثبت ممکن است تا یک کران روی عدد نظم همولوژی صفر بدهیم. با بیان این استدلال می‌توان این گونه نتیجه گرفت که اگر، $\dim(\mathrm{Tor}_۱^R(M, N)) \leq ۱$ باشد، آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\mathrm{reg}(M \underset{R}{\otimes} N) \leq \mathrm{reg}(M) + \mathrm{reg}(N)$$

1) Chandler 2) Chardin 3) Minh 4) Trung 5) Conca 6) Herzog 7) Caviglia

توضیح اول: سیدمن[1] در سال ۲۰۰۲ در [26] نشان داد که اگر I و J دو ایده‌آل R، معرف رویه‌هایی باشند که تقاطع آنها یک مجموعه متناهی نقاط باشد، آنگاه $\operatorname{reg}(IJ) \leq \operatorname{reg}(I) + \operatorname{reg}(J)$ برقرار می‌باشد. از آنجا که کار سیدمن به صورت هندسی بوده است، توضیح این کار مورد تجزیه و تحلیل قرار نگرفته، بلکه این رابطه از همین مطلب (۴) نتیجه گرفته شده است.

توضیح دوم: با این پاسخ، سؤالات (الف)، (ب)، (ج)، (د) و (ه) نیز پاسخ داده می‌شود.

۵) پاسخ (ز): با توجه به استدلال بیان شده در (۴)، اگر فرض شود که r کوچکترین درجه مولد مینیمال همگن M و برای $i > 0$، $\operatorname{depth}_R\left(\operatorname{Ext}^i_R(M,N)\right) \geq n - i$ باشد، رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$\operatorname{reg}(\operatorname{Hom}_R(M,N)) \leq \operatorname{reg}(N) - r$$

توضیح: کاویگلیا برای این قسمت، قضیه‌ای دیگر با به حداقل رساندن شرایط و ساده‌تر نمودن آن بیان نموده است. در این ارتباط با هدایت و راهنمایی استاد ارجمند جناب آقای دکتر یاسمی پس از تجزیه و تحلیل قضیه فوق الاشاره به این نتیجه رسیدیم که، این قضیه، درست نبوده و ثابت نمی‌شود. بدین لحاظ در تماسی که با پروفسور شاردین که درکشور فرانسه سکونت دارند، برقرارگردید، نتیجه‌ای را که در تجزیه و تحلیل ما حاصل شده بود مورد تائید قرار دادند و مثال نقضی هم ارائه دادند.

1) Sidman

سپاسگزاری

سپاس و ستایش خداوند یکتا را که در طول زندگی و تحصیلم، مرا از الطاف و نعمات بی‌پایانش بهره‌مند ساخته و تواناییم عطا فرمود تا این کار تحقیقی را به سرانجام رسانم.

سپاس و تشکر از جناب آقای دکتر سیامک یاسمی، استادراهنمای گرانقدرم که کسب علم، تجربه و حکمت در محضرشان از افتخارات دوران تحصیلی‌ام محسوب می‌گردد، ایشان که در نهایت صبر، حوصله و بردباری، در این مقطع از تحصیلات همواره انگیزه و انرژی لازم را برای کار به من داده‌اند. قدردان زحمات آقایان دکتر مسعود طوسی، دکتر رحیم زارع نهندی هستم که به من آموختند چطور با نظم و جدیت کار را به انجام رسانم.

از آقایان عبدال محمودزاده و محسن اصغرزاده، بسیار سپاسگزارم که هر کدام، به نحوی در کسب منابع و در به سرانجام رساندن این پروژه مرا همراهی نموده‌اند.

از همه آنانی که مرا در انجام این پروژه یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و برای همه این بزرگواران از درگاه ایزد منان آرزوی سلامتی، سعادت و توفیقات روزافزون دارم.

امیدوارم این کار تحقیقی، برای آنانی که در این زمینه کارهای تحقیقاتی انجام خواهند داد، سودمند و مفید باشد.

با آرزوی سعادت و توفیق

برای همه این بزرگواران

سارا چهرازی

تقدیم

این نوشته تحقیقی را تقدیم می‌دارم به

- پدرم که زحمات و فداکاری‌های بی‌دریغش هموارکننده راه زندگی‌ام بوده و هست.
- مادرم که با محبت، مهربانی، تشویق و حمایتش در طول زندگی و تحصیلاتم مرا همواره یار و مددکار بوده و می‌باشد.
- برادرانم که وجودشان مایه دلگرمی، شادی و قوت قلب من بوده و خواهد بود.

ایمان دارم که هرکس قدر زحمات پدر و مادر را بداند قدرش متعالی می‌گردد و نتیجه‌اش خیر و برکت است. باشد که خداوند از سرچشمه محبت خود یاریم فرماید تا بتوانم قطره‌ای از دریای بی‌کران فداکاری و محبتهای صادقانه و صمیمانه آنها را که در این راه مرا همراهی کرده‌اند، جبران نمایم.

خداوندا، تندرستی کامل، آرامش قلب، عمری پربار و طولانی و عزتی پایدار نصیب یکایک اعضای خانواده‌ام بگردان.

با تقدیم صادقانه و صمیمانه

سارا چهرازی

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$K[x_{۱}, \dots, x_n]$	حلقه‌چندجمله‌ای‌ها
$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز
$\mathrm{Ass}_R(M)$	ایده‌آلهای اول وابسته
$Z_R(M)$	مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر
$V(I)$	مجموعهٔ ایده‌آلهای اول شامل I
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ R
$\mathrm{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه (محمل) M
$\mathrm{ht}(-)$	ارتفاع
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول Rـ مدول M
$\mu(-)$	تعداد اعضای مجموعهٔ مولد مینیمال
$\mathrm{depth}_R(M)$	طول Mـ رشته منظم ماکسیمال در m
$\mathrm{grade}_R(I, M)$	طول Mـ رشته منظم ماکسیمال در I
$pd_R(M)$	بعد پروژکتیو
$id_R(M)$	بعد انژکتیو
$\deg(x)$	درجهٔ عضو همگن x
$\mathrm{reg}(M)$	عدد نظم کاستلنوو ـ مامفورد
$\mathrm{sat}(M)$	درجه اشباع
LCD	کوچکترین مضرب مشترک
GCD	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک
$M \bigotimes_R N$	حاصلضرب تانسوری
$H_a^i(-)$	کوهمولوژی موضعی

فصل اول

پیش نیازها

لازم است پیش از آنکه مطالب اصلی را آغاز کنیم، برخی از تعاریف و مفاهیم جبر جابجایی و جبر همولوژی را که نقش بسزایی در فهم مطالب دارند، یادآور شویم. فرض کرده‌ایم که خواننده با مباحث مطرح شده در جبر پیشرفته و هم‌چنین با حلقه کسرها آشنایی دارد.

در سراسر این پایان‌نامه، فرض کنید R حلقه جابجایی و یکدار می‌باشد.

۱-۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی از جبر جابجایی

۱-۱-۱ تعریف (ایده‌ال‌های اول وابسته) فرض کنید M یک Rـمدول باشد، مجموعه‌ی ایده‌ال‌های اول وابسته M را با علامت $\mathrm{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از:

$$\mathrm{Ass}_R(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | \exists\ x \in M\ :\ p = \mathrm{Ann}_R(x)\}$$

۱-۱-۲ نکته. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک Rـمدول باشد، در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}_R(M) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad M \neq \circ$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۳۵ از فصل ۹ در [25].$\square$

۱-۱-۳ قضیه. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک Rـمدول ناصفر باشد، در این‌صورت

$$Z_R(M) = \underset{p\in \mathrm{Ass}_R(M)}{U} p$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۱ از فصل ۶ قسمت (ii) در [22].□

۱-۱-۴ تعریف. فرض کنید I ایده‌الی سره از حلقه‌ی R باشد، $V(I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | I \subseteq p\}$$

۱-۱-۵ تعریف (Supp). فرض کنید M یک Rـمدول باشد، $\mathrm{Supp}_R(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | M_p \neq \circ\}$$

۱-۱-۶ لم. فرض کنید M یک Rـمدول باشد، در این‌صورت داریم:

۱) $\mathrm{Supp}_R(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | \exists\, x \in M : \mathrm{Ann}_R(x) \subseteq p\}$

۲) $M \neq \circ$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Supp}_R(M) \neq \emptyset$

۳) اگر $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق از Rـمدول‌ها باشد، آنگاه:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Supp}_R(M') \cup \mathrm{Supp}_R(M'')$$

۴) اگر M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

$$\mathrm{Supp}_R(M) = V(\mathrm{Ann}_R(M))$$

۵) اگر M یک Rـمدول با تولید متناهی و I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه

$$\mathrm{Supp}_R(\frac{M}{IM}) = V(I + \mathrm{Ann}_R(M)) = V(I) \cap V(\mathrm{Ann}_R(M))$$

برهان. رجوع شود به صفحه ۴۶ در [2].□

۱-۱-۷ قضیه. فرض کنید M یک Rـمدول باشد، آنگاه:

(۱) $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$

(۲) اگر R نوتری باشد، آنگاه $\min \mathrm{Supp}_R(M) = \min \mathrm{Ass}_R(M)$

برهان. رجوع شود به قضیه ۵ از فصل ۶ در [22].$\square$

۱-۱-۸ تعریف (ارتفاع یک ایده‌ال). فرض کنید p ایده‌ال اولی از R باشد، در این‌صورت ارتفاع p را با $ht(p)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ht(p) = \mathrm{Sup}\{n \in \mathbb{N}_\circ | p_\circ \subset \ldots \subset p_n = p \ , \ p_i \in \mathrm{Spec}(R)\}$$

برای ایده‌ال دلخواه I از R، ارتفاع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ht(I) = \inf\{ht(p) | p \in \min(I)\}$$

۱-۱-۹ تعریف (بعد حلقه). بعد حلقه R را با $\dim R$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim R := \mathrm{Sup}\{n | p_\circ \subset p_1 \subset \ \ldots \ \subset p_n \ ; \ p_i \in \mathrm{Spec}(R)\}$$

و اگر سوپریمم موجود نبود $\dim R = \infty$.

۱-۱-۱۰ تعریف (بعد کرول). فرض کنید M یک Rـمدول باشد، بعد کرول M را که با $\dim_R(M)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim_R(M) := \mathrm{Sup}\{\dim \frac{R}{p} | p \in \mathrm{Supp}_R(M)\}$$

۱-۱-۱۱ قضیه. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک Rـمدول متناهی مولد و $\dim_R(M) = \circ$ باشد، در این‌صورت M دارای طول متناهی است.

برهان. با توجه به این‌که $\mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \max(R)$ می‌باشد، اثبات واضح است.

۱-۱-۱۲ نکته. فرض کنید M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد و I ایده‌الی از حلقه R باشد که $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$، آنگاه: $\dim_R(M) = \dim_{\frac{R}{I}}(M)$

برهان. واضح است که

$$V(\mathrm{Ann}_{\frac{R}{I}}(M)) = \{\frac{p}{I} | p \in V(\mathrm{Ann}_R(M))\}$$

لذا با توجه به ۱ـ۱ـ۶ قسمت (۴)، داریم:

$$\mathrm{Supp}_{\frac{R}{I}}(M) = \{\frac{p}{I} | p \in \mathrm{Supp}_R(M)\}$$

بنابراین $\dim_R(M) = \dim_{\frac{R}{I}}(M)$.$\square$

۱-۱-۱۳ نتیجه. فرض کنید M یک Rـمدول با تولید متناهی و I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه:

$$\dim_R(\frac{M}{IM}) \leq \dim_R(\frac{R}{I})$$

برهان. با توجه به نکته قبل داریم:

$$\dim_R(\frac{M}{IM}) = \dim_{\frac{R}{I}}(\frac{M}{IM}) \leq \dim \frac{R}{I} = \dim_R(\frac{R}{I}). \qquad \square$$

۱-۱-۱۴ تعریف. فرض کنید M یک Rـمدول باشد

۱) $x_1, \ldots, x_r \in R$ را یک Mـرشته منظم ضعیف گوئیم، هرگاه $x_1 \notin Z_R(M)$ و برای هر $i = 2, \ldots, n$، $x_i \notin Z_R(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M})$.

۲) Mـرشته منظم ضعیف $x_1, \ldots, x_r$ را یک Mـرشته منظم گوئیم، هرگاه $M \neq (x_1, \ldots, x_r)M$.

۱-۱-۱۵ تعریف. فرض کنید R حلقه نوتری و M یک Rـمدول باشد و فرض کنید I ایده‌ال سره از R و $IM \neq M$، آنگاه $x_1, \ldots, x_r \in I$ را یک Mـرشته منظم ماکسیمال در I گوئیم هرگاه

$$I \subset Z_R(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_r)M})$$

۱-۱-۱۶ تعریف (ایده‌ال تقاطع کامل). ایده‌ال I از حلقه موضعی و نوتری R را تقاطع کامل گوئیم، هرگاه توسط یک Rـرشته منظم تولید شود.

۱-۱-۱۷ قضیه. فرض کنید I ایده‌الی سره از حلقه نوتری R باشد و I توسط Rـرشته منظم به طول n تولید شود، در این‌صورت $ht\ I = n$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۳۲ در [20] و قضیه ۵ از فصل ۱۳ در [21].$\square$

۱-۱-۱۸ تعریف (حلقه‌ی موضعی منظم). حلقه‌ی موضعی و نوتری (R, m) را منظم گوئیم هرگاه:

$$\dim\ R = \dim_{\frac{R}{m}}(\frac{m}{m^2})$$

یعنی $\dim\ R = \mu(m)$.

۱-۱-۱۹ تعریف (depth). فرض کنید (R, m) حلقه موضعی و نوتری باشد و M یک Rـمدول متناهی مولد باشد، در این‌صورت $\mathrm{depth}_R(M)$ را طول Mـرشته منظم ماکسیمال در m تعریف می‌کنیم.

۱-۱-۲۰ لم. فرض کنید (R, m) حلقه موضعی و نوتری باشد، برای هر Rـمدول M عبارات زیر معادلند:

۱) $\operatorname{depth}_R (M) = 0$

۲) $\operatorname{Hom}_R(\frac{R}{m}, M) \neq 0$

۳) $m \in \operatorname{Ass}_R(M)$

اگر M متناهی مولد باشد، آنگاه عبارت بعدی با بقیه معادل است

۴) $Z_R(M) = m$

برهان. رجوع شود به قضیه ۳ از فصل ۲۷ در [15].□

۱-۱-۲۱ تعریف (grade). فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌الی از R و M یک Rـمدول باشد، طول Mـرشته منظم ماکسیمال در I را با نماد $\operatorname{grade}_R(I, M)$ نشان می‌دهیم و طول Rـرشته منظم ماکسیمال در I را با نماد $\operatorname{grade}_R(I)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۲۲ تعریف (مدول کوهن‌ـمکالی). فرض کنید (R, m) حلقه‌ی موضعی و M، Rـمدول متناهی مولد باشد. گوییم M مدول کوهن‌ـمکالی است هرگاه $\operatorname{depth}_R(M) = \dim_R(M)$.

۱-۱-۲۳ قضیه. هر حلقه موضعی منظم، کوهن‌ـمکالی است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۰ از بخش ۱ از فصل ۳ در [3].□

۱-۱-۲۴ تعریف (ایده‌ال تک‌جمله‌ای). فرض کنید $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K باشد. ایده‌ال I از R را ایده‌ال تک‌جمله‌ای گویند، هرگاه یک مجموعه مولد متشکل از تک جمله‌ای‌های $X^a = X_1^{a_1} X_2^{a_2} \ldots X_n^{a_n}$ را داشته باشد.

۱-۱-۲۵ قضیه. فرض کنید R حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان دلخواه باشد و فرض کنید مجموعه تک‌جمله‌ای $\{u_1, \ldots, u_m\}$ یک مجموعه مولد ایده‌ال تک‌جمله‌ای I در R باشد، در این‌صورت تک‌جمله‌ای u عضو I است اگر و تنها اگر یک تک‌جمله‌ای w در R موجود باشد که $u = wu_i$ برای یک $i = 1, \ldots, m$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۵ از بخش ۱ از فصل ۱ در [17].□

۱-۱-۲۶ قضیه. هر ایده‌ال تک‌جمله‌ای یک مجموعه مولد متشکل از تک‌جمله‌ای‌ها دارد و این مجموعه را با نماد $G(I)$ نشان می‌دهند.

برهان. رجوع شود به گزاره ۶ از بخش ۱ از فصل ۱ در [17].□

۱-۱-۲۷ نکته. واضح است که مجموع و حاصل‌ضرب دو ایده‌ال تک‌جمله‌ای نیز ایده‌ال تک‌جمله‌ای است و برای ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای I و J داریم:

$$G(I+J) \subset G(I) \cup G(J) \quad , \quad G(IJ) \subset G(I)G(J)$$

۱-۱-۲۸ تعریف (ک.م.م و ب.م.م دو تک‌جمله‌ای). فرض کنید $X^{\alpha} = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ و $X^{\beta} = X_1^{\beta_1} \ldots X_n^{\beta_n}$ تک‌جمله‌ای‌هایی از حلقه $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ باشند،

۱) کوچکترین مضرب مشترک X^{α} و X^{β} را با نماد $\mathrm{LCM}(X^{\alpha}, X^{\beta})$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{LCM}(X^{\alpha}, X^{\beta}) = X_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \ldots X_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$$

۲) بزرگترین مقسوم علیه مشترک X^{α} و X^{β} را با نماد $\mathrm{GCD}(X^{\alpha}, X^{\beta})$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{GCD}(X^{\alpha}, X^{\beta}) = X_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \ldots X_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}$$

۱-۱-۲۹ قضیه. فرض کنید I و J ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای از حلقه $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ باشند، آنگاه $I \cap J$ یک ایده‌ال تک‌جمله‌ای است و $\{\mathrm{LCM}(u,v) : \ u \in G(I), v \in G(J)\}$ یک مجموعه مولد $I \cap J$ می‌باشد.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱ از بخش ۲ از فصل ۱ در [17].□

۱-۱-۳۰ تعریف. فرض کنید I و J دو ایده‌ال از حلقه $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ باشند، تعریف می‌کنیم:

$$I : J = \{f \in R | fg \in I \ , \ \forall g \in J\}$$

۱-۱-۳۱ قضیه. فرض کنید I و J ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای باشند، آنگاه $I : J$ نیز یک ایده‌ال تک جمله‌ای است، به‌علاوه $I : J = \bigcap_{v \in G(J)} I : (v)$ و

$$\{\frac{u}{\mathrm{GCD}(u,v)} | u \in G(I)\},$$

یک مجموعه مولد $I : (v)$ می‌باشد.

برهان. رجوع شود به گزاره ۲ از بخش ۲ از فصل ۱ در [17].□

۱-۲ مفاهیم و قضایای مقدماتی از جبر همولوژی

۱-۲-۱ تعریف (nـاُمین مدول همولوژی). یک همبافت نزولی از Rـمدول‌ها، یک دنباله از Rـهمریختی‌های

$$K_\bullet : \ldots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

است به طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. برای هر همبافت نزولی $K_\bullet$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$B_n(K_\bullet) := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \quad , \quad Z_n(K_\bullet) := \ker\ \partial_n$$

و nـاُمین مدول همولوژی همبافت را تعریف می‌کنیم:

$$H_n(K_\bullet) := \frac{Z_n(K_\bullet)}{B_n(K_\bullet)}$$

۱-۲-۲ تعریف (nـاُمین مدول کوهمولوژی). یک همبافت صعودی از Rـمدول‌ها، یک دنباله از Rـهمریختی‌های

$$K^\bullet : \ldots \longrightarrow K^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n \xrightarrow{\partial^n} K^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

است به طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$. برای هر همبافت صعودی $K^\bullet$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$B^n(K^\bullet) := \mathrm{Im}\ \partial^{n-1} \quad , \quad Z^n(K^\bullet) := \ker\ \partial^n$$

و nـاُمین مدول کوهمولوژی همبافت را تعریف می‌کنیم:

$$H^n(K^\bullet) := \frac{Z^n(K^\bullet)}{B^n(K^\bullet)}$$

۱-۲-۳ تعریف (تحلیل پروژکتیو). فرض کنید M یک Rـمدول باشد، منظور از یک تحلیل پروژکتیو برای M، دنباله

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

از Rـمدول‌ها و Rـهمریختی‌ها همراه با Rـهمریختی $M \xrightarrow{d_0} P_0$ است به‌طوری‌که اولاً P_iها پروژکتیو بوده و ثانیاً دنباله زیر دقیق باشد:

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

یعنی برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ داشته باشیم: $\mathrm{Im}\ d_{i+1} = \ker d_i$.

۱-۲-۴ تعریف (تحلیل آزاد). تعریف تحلیل آزاد مشابه تعریف تحلیل پروژکتیو است، با این تفاوت که P_iها، Rـمدول‌های آزادند.

۱-۲-۵ تعریف (بعد پرژوکتیو). بعد پروژکتیو Rـمدول M را که با $pd_R(M)$ نشان می‌دهیم برابر است با کمترین $n \geq 0$ به طوری که یک تحلیل پروژکتیو به‌فرم $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ برای M موجود باشد، در صورتی‌که چنین nای موجود نباشد، قرارداد می‌کنیم $pd_R(M) = \infty$.

۱-۲-۶ قضیه. اگر M یک Rـمدول متناهی مولد روی حلقه موضعی منظم R باشد، آنگاه $pd_R(M)$ متناهی است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۳ از فصل ۳۰ در [15].□

۱-۲-۷ تعریف (تحلیل انژکتیو). فرض کنید M یک Rـمدول باشد. منظور از یک تحلیل انژکتیو برای M دنباله‌ای مانند $\ldots \xrightarrow{\partial^n} E^n \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^1 \xrightarrow{\partial^0} E^0 \longrightarrow 0$ از Rـمدول‌ها و Rـهمریختی‌ها همراه با Rـهمریختی $E^0 \xrightarrow{\partial^{-1}} M$ است به‌طوری‌که E^iها انژکتیو بوده و دنباله زیر دقیق باشد:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial^{-1}} E^0 \xrightarrow{\partial^0} E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \xrightarrow{\partial^n} E^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

یعنی برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ داشته باشیم: $\mathrm{Im}\ \partial^{i-1} = \ker\ \partial^i$.

۱-۲-۸ تعریف (بعد انژکتیو). بعد انژکتیو Rـمدول M را که با $id_R(M)$ نشان می‌دهیم برابر است با کمترین $n \geq 0$، به‌طوری‌که یک تحلیل انژکتیو به‌فرم $0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$ برای M موجود باشد. در صورتی‌که چنین nای موجود نباشد، قرارداد می‌کنیم $id_R(M) = \infty$.

۱-۲-۹ تعریف (Ext). فرض کنید M و N دو Rـمدول باشند و فرض کنید

$$P_\bullet : \ldots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} \ldots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \longrightarrow ۰$$

یک تحلیل پروژکتیو برای M باشد، با تاثیر فانکتور پادرود $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ بر تحلیل بالا، همبافت زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N): \quad & ۰ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_۰, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_۱, ۱N)} \mathrm{Hom}_R(P_۱, N) \\ & \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_i, ۱_N)} \mathrm{Hom}_R(P_i, N) \longrightarrow \ldots\end{aligned}$$

که $\mathrm{Hom}(d_i, ۱_N)$، Rـهمریختی القا شده توسط d_i است به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $f \in \mathrm{Hom}_R(P_{i-۱}, N)$ به‌صورت زیر عمل می‌کند:

$$\mathrm{Hom}(d_i, ۱_N)_{(f)} = fod_i$$

$\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = H^i(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N)) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(d_{i+۱}, ۱_N))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(d_i, ۱_N))}$$

۱-۲-۱۰ قضیه. برای دو Rـمدول دلخواه M و N، تعریف $\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ بستگی به انتخاب تحلیل پروژکتیو M ندارد و برای هر $i > pd_R(M)$، $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = ۰$.

برهان. مشابه قضیه ۱۱ از فصل ۶ در [24] و رجوع کنید به قضیه ۶ از فصل ۱۷ در [15].$\square$

۱-۲-۱۱ قضیه. فرض کنید R نوتری و N یک Rـمدول دلخواه و S یک مجموعه بسته ضربی باشد، در این‌صورت برای هر Rـمدول متناهی مولد M ایزومورفیسم زیر وجود دارد:

$$S^{-۱}\,\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{S^{-۱}R}(S^{-۱}M, S^{-۱}N)$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲۷ از فصل ۱۸ در [15].$\square$

۱-۲-۱۲ لم. فرض کنید M و N دو Rـمدول دلخواه باشند، داریم:

$$\mathrm{Ext}^۰_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۵ از فصل ۱۶ در [15].$\square$

۱-۲-۱۳ تعریف (تعریف depth در حالت کلی). فرض کنید (R,m) حلقه‌ی موضعی و نوتری و M یک Rـمدول دلخواه باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{depth}_R(M)=\inf\{n\in\mathbb{N}_0 \,|\, \operatorname{Ext}_R^n(\frac{R}{m},M)\neq 0\}$$

۱-۲-۱۴ تعریف (Tor). فرض کنید M و N دو Rـمدول دلخواه باشند و فرض کنید

$$P_\bullet:\ldots\longrightarrow P_n\xrightarrow{d_n}\ldots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\longrightarrow 0$$

یک تحلیل پروژکتیو برای M باشد، با تاثیر فانکتور هموردِ $-\underset{R}{\otimes}N$ بر تحلیل بالا، همبافت زیر را داریم:

$$P_\bullet\underset{R}{\otimes}N:\ldots\longrightarrow P_n\underset{R}{\otimes}N\xrightarrow{d_n\otimes 1_N}\ldots\longrightarrow P_1\underset{R}{\otimes}N\xrightarrow{d_1\otimes 1_N}P_0\underset{R}{\otimes}N\longrightarrow 0$$

$\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{Tor}_i^R(M,N):=H_i(P_\bullet\underset{R}{\otimes}N)=\frac{\ker(d_i\otimes 1_N)}{\operatorname{Im}(d_{i+1}\otimes 1_N)}$$

۱-۲-۱۵ قضیه. برای دو Rـمدول دلخواه M و N، تعریف $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ بستگی به انتخاب تحلیل پروژکتیو برای M ندارد و برای هر $i>pd_R(M)$، $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)=0$.

برهان. مشابه قضیه ۱۱ از فصل ۶ در [24] و برای قسمت دوم رجوع کنید به قضیه ۶ از فصل ۲۲ در [15].□

۱-۲-۱۶ لم. فرض کنید M و N دو Rـمدول دلخواه باشند، داریم:

$$\operatorname{Tor}_0^R(M,N)\cong M\underset{R}{\otimes}N$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۲ از فصل ۲۱ در [15].□

۱-۲-۱۷ قضیه. فرض کنید M و N دو Rـمدول دلخواه باشند، در این‌صورت برای هر i داریم:

$$S^{-1}\operatorname{Tor}_i^R(M,N)=\operatorname{Tor}_i^{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N)$$

برهان. رجوع شود به تمرین ۷ از بخش ۷ در [22].□

۱-۲-۱۸ قضیه. فرض کنید R حلقه نوتری و M و N دو Rـمدول متناهی مولد باشند به‌طوری‌که $pd(M)<\infty$، در این‌صورت اگر $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)=0$ آنگاه برای هر $j>i$؛ $\operatorname{Tor}_j^R(M,N)=0$.