بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب

سید حسین اکبرزاده

استاد راهنما :

دکتر مهدی ایرانمنش

دیماه ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب سید حسین اکبرزاده دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض،گرایش آنالیز دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب تحت راهنمائی دکتر مهدی ایرانمنش متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یـا امتیـازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشـگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) اسـتفاده شـده اسـت ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

سپاس خداوندی را سزاست که از نسبت محیط به قطر دایره آگاه است.

(غیاث الدین جمشید کاشانی)

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر کامران شریفی که زحمت مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر احمد زیره و دکتر محمود بیدخام که داوری پایان‌نامه مرا بعهده داشتند کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سید حسین اکبرزاده

دیماه ۱۳۹۰

نام خانوادگی: اکبرزاده　　　　نام: سید حسین

عنوان پایان‌نامه: یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش

استاد مشاور: دکتر کامران شریفی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود　　　　دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۰　　　　تعداد صفحه: ۸۲

کلیدواژه‌ها: الگوریتم، بهترین تقریب، فضای توابع پیوسته، ابر صفحه

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی یک سری فرآیندهای پیاپی و تکراری که منجر به رسیدن بهترین تقریب می شود، می پردازیم. البته ما این فرآیندها را با نام "الگوریتمهایی برای یافتن بهترین تقریب" بکار می بریم. ابتدا به بیان الگوریتمهای می پردازیم که به وسیله آنها بتوان بهترین تقریب یک تابع دو متغیره و پیوسته را به صورت مجموع دو تابع یک متغیره و البته پیوسته یافت، سپس الگوریتمهایی در فضای هیلبرت و حاصل ضرب متناهی از فضاهای هیلبرت معرفی می کنیم تا ما را در یافتن تقریبی مناسب برای تمام نقاط فضا یاری کنند. در نهایت سعی داریم الگوریتمی برای بهترین تقریب مجموعه های بسته و محدب در فضای هیلبرت با استفاده از ابر صفحه ها ارائه دهیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

همانطور که می دانیم نظریه بهترین تقریب همواره اهمیت و کاربرد زیادی در مسایل ریاضی دارد. اما همیشه پیدا کردن بهترین تقریب کار آسانی نبود و همواره نمی توان یک روش کلی برای آن ارائه کرد. لذا در این پایان‌نامه سعی کردیم چند نمونه از الگوریتم هایی که ما را در رسیدن بهترین تقریب یاری میکنند، بیان کنیم.

در سال ۱۹۵۱ دیلبرتو [۱] و استراوس [۲] به بیان تقریب توابع چند متغیره به وسیله مجموعی از توابعی با تعداد متغیر کمتر پرداختند [۱۰] .

در سال ۱۹۷۹ فرانک داش[۳] و وون نیومن[۴] به بیان الگوریتمی با نام "الگوریتم متناوب[۵]" پرداختند [۶] که این الگوریتم به طور کلی در فضاهای باناخ بیان شده بود. اما لایت[۶] و چنی[۷] در سال ۱۹۸۰ از روش "الگوریتم متناوب " در آنچه که دیلبرتو و استراوس بیان کرده بودند، استفاده کردند و الگوریتمی متناوب برای توابع دو متغیره ارائه دادند[۱۲] که با آن می توان بهترین تقریب یک تابع پیوسته ی دو متغیره را به صورت مجموع دو تابع یک متغیره پیدا کرد که حاصل آن را می توان در بخش اول از فصل دوم با نام "الگوریتم دیلبرتو-استراوس" مشاهده نمود.

در سال ۱۹۸۴ وون گولیچک[۸] به بررسی الگوریتمهایی برای کوتاهترین مسیر در فضاهای توابع پرداخت [۷]. یکی از این الگوریتمهای او در فضای توابع دو متغیره را در بخش دوم از فصل دوم می بینیم که می توان گفت این الگوریتم یکی از قویترین

[۱] S.P.Diliberto
[۲] E.G.Straus
[۳] Frank R Deutsch
[۴] von Neumann
[۵] Alternating Algorithm
[۶] W.A.Light
[۷] E.W.Cheney
[۸] M. von Golitschek

الگوریتم هایی است که در این زمینه بیان شده و از آن می توان برای پیدا کردن فاصله یک نقطه از یک زیر مجموعه استفاده کرد.
در سال ۱۹۹۸ الگوریتمهایی موسوم به "گریدی[۹]" در فضاهای هیلبرت و باناخ ارائه شد، که می توان بعضی از آنها را در [۴] ، [۱۱] دید. در فصل سوم به بیان بعضی از این الگوریتم ها خواهیم پرداختیم .
که هدف ما در این فصل این است که هر $x \in H$ را بتوان به صورت $\sum a_i y_i$ تقریب زد بطوریکه a_i ضرایب حقیقی و y_i عضو H باشند. برای این منظور ابتدا الگوریتم ساده ای بیان نموده و سپس به بیان الگوریتم قویتری می پردازیم که حالت اول را هم شامل می شود. در [۴] می توان دید که سری فوریه و اتحاد پارسوال نیز از این الگوریتم نتیجه می شوند.
فرانک داش در [۵] به بررسی ابر صفحه ها و الگوریتمی که منجر به یافتن بهترین تقریب در فضای هیلبرت می شود، پرداخت که ما در فصل آخر این مطالب را بیان می کنیم.

[۹] Greedy

فصل ۱

پیشینه و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته و کراندار با قلمرو X را با $C(X)$ نشان می دهیم. به هر $f \in C(X)$ نرم سوپریمم آن یعنی

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

را مربوط می کنیم. چون f کراندار است پس $\|f\| < \infty$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X, Y دو زیر فضای ناتهی از یک فضای باناخ باشند. نگاشت $F : X \longrightarrow Y$ را انقباضی گوییم اگر

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\| \quad ; \quad \forall x \in X, y \in Y$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم U زیرفضای ناتهی از فضای باناخ X باشد در این صورت تعریف می کنیم:

$$U^{\perp} = \{\varphi \in X^*; \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

که در آن X^*، همان فضای دوگان X است.

تذکر ۴.۱.۱. فرض می کنیم که X یک فضای باناخ و X^* دوگان آن باشد. در [۲] می توان دید که X^* یک فضای نرمدار است و اگر f یک تابعک در X^* باشد آنگاه پیوسته و کراندار بودن آن معادل است. همچنین نرم f به صورت های معادل زیر بیان می گردد.

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و$K \subseteq X$ و $x \in X$ باشد. در این صورت فاصله x از مجموعه K را با $d(x,K)$ یا $dist(x,K)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر بیان می کنیم

$$d(x,K) = \inf\{\|x-y\| \ ; \ y \in K\}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد برای هر $K \subseteq X$ و $x \in X$ مجموعه ی بهترین تقریبهای x در K را با $P_K(x)$ نشان می دهیم و به صورت زیر بیان می کنیم

$$P_K(x) = \{y \in K; \|y-x\| = dist(x,K)\}$$

و $P_K : X \longrightarrow K$ را نگاشت تقریب می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. زیر مجموعه K از X را چبیشف [۱] گوییم اگر برای هر $x \in X$ دقیقا یک بهترین تقریب منحصر به فرد در K داشته باشد.

---
[۱] Chebyshev

در اینجا فرض می کنیم T, S دو فضای فشرده و هاسدورف باشند و $C(S), C(T)$ فضای توابع پیوسته روی S, T باشد. حال به نکات زیر توجه می کنیم.

تذکر ۸.۱.۱. اگر $f \in C(S)$ باشد، آنگاه $f(S)$ (مجموعه برد) فشرده و لذا بسته است در نتیجه دارای ماکزیمم و مینیمم است.

گزاره ۹.۱.۱. $C(S)$ بسته است.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای در $C(S)$ باشد به طوریکه همگرای یکنواخت به تابع f باشد . کافی است نشان دهیم $f \in C(S)$ ولی چون $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است پس f نیز پیوسته است در نتیجه $f \in C(S)$.

□

تذکر ۱۰.۱.۱. $C(S) \subseteq C(S \times T)$ چون اگر فرض کنیم $f \in C(S)$ در اینصورت می توان تابع $F \in C(S \times T)$ هم ارز آن در نظر گرفت بطوریکه $F(s,t) = f(s)$

تذکر ۱۱.۱.۱. $C(S), C(T)$ و همچنین $C(S) + C(T)$ زیر فضاهای محدب از فضای $C(S \times T)$ هستند.

تذکر ۱۲.۱.۱. فرض کنید $f \in C(S \times T)$ در این صورت$\max\limits_{s} f(s,t)$ یک تابع یک متغیره است چون مافقط اجازه تغییر یک متغیر، یعنی t را داریم.

تذکر ۱۳.۱.۱. می توانیم بنویسیم $\max\limits_{x} f(s,t) \simeq F(t)$ پس $F(t) \in C(T) \subseteq C(S \times T)$ بنابراین داریم :

$$\max_t(\max_s f(s,t)) = \max_t(F(t)) = \text{مقدار ثابت}$$

اکنون به قضیه هان - باناخ و نتایجی از آن می پردازیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضایی از X باشد و φ یک تابعک خطی پیوسته روی M باشد در این صورت $\psi \in X^*$ موجود است بطوریکه

$$1)\quad \varphi(m) = \psi(m) \qquad \forall m \in M$$

$$2)\quad \|\varphi\|_M = \|\psi\|_X$$

برهان. رجوع شود به ([9],1.7) □

گزاره ۱۵.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضای بسته از X و $x \in X$ باشد. همچنین فرض کنیم

$$dist(x, M) = d > 0$$

در اینصورت $\varphi \in X^*$ موجود است بطوریکه

$$1)\quad \varphi(m) = 0 \qquad \forall m \in M$$

$$2)\quad \|\varphi\| = 1$$

$$3)\quad \varphi(x) = d$$

برهان. فرض کنیم L زیر فضای تولید شده توسط M و x باشد. تابعک خطی φ را روی L برای هر $\alpha \in R$ و هر $m \in M$ دلخواه به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi(\alpha x + m) = \alpha d$$

واضح است که $\varphi(m) = 0$ و $\varphi(x) = d$. می دانیم

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(\alpha x+m)|}{\|\alpha x+m\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{\|\alpha x+m\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{|\alpha|.\|(x+\frac{m}{\alpha})\|} = \sup \frac{d}{\|(x+\frac{m}{\alpha})\|}$$

قرار می دهیم $m' = \frac{m}{\alpha}$ می دانیم $d = dist(x, M) = \inf\{\|x-y\|; y \in M\}$ پس $d \leq \|x+m'\|$ با قرار دادن در نامساوی بالا داریم:

$$\|\varphi\| \leq 1$$

همچنین اگر قرار دهیم $\alpha = \dfrac{1}{d}$ در اینصورت

$$\varphi(\alpha x+m) = \varphi(\frac{1}{d}x+m) = \frac{1}{d}d = 1$$

این نتیجه می دهد که $\|\varphi\| = 1$.

حال با استفاده از قضیه هان - باناخ می توان φ را روی X گسترش داد.

□

نتیجه ۱۶.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضای X و $x \in X$ باشد. در اینصورت داریم:

$$dist(x, M) = \sup\{\varphi(x) \ ; \ \varphi \in M^{\perp} \ , \|\varphi\| = 1\}$$

برهان. فرض کنیم $d = dist(x, M)$ و $A = \{\varphi(x) \ ; \ \varphi \in M^{\perp} \ , \|\varphi\| = 1\}$ ، طبق گزاره قبل $\varphi(x) \in A$ موجود است بطوریکه $\varphi(x) = d$. بنابراین داریم :

$$d \leq \sup A$$

برعکس. نشان می دهیم $d \geq \sup A$ برای این منظور کافی است نشان دهیم d کران بالا برای A است یعنی برای هر $\varphi(x) \in A$ ، $d \geq \varphi(x)$ فرض کنیم اینگونه نباشد پس $\varphi(x) \in A$ موجود است بطوریکه $d < \varphi(x)$ پس $m \in M$ موجود است بطوریکه

$$\varphi(x) > \|x-m\|$$

و چون φ روی M صفر است، نتیجه می گیریم

$$\varphi(x-m) > \|x-m\|$$

و این بدان معنی است که $\|\varphi\| > 1$ اما این تناقض است چون $\|\varphi\| = 1$ بنابراین $d = \sup A$. □

قضیه ۱.۱.۱۷. اگر X, Y دو فضای باناخ باشند و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ پیوسته، خطی و پوشا باشد. در این صورت عدد حقیقی و مثبت a موجود است بطوریکه

$$a\|x\| \leq \|\Lambda x\| \quad \forall x \in X$$

برهان. رجوع شود به [۱۳] صفحه ۴۹ □

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم X, Y دو فضای باناخ باشند و X^*, Y^* دوگان آنها باشند همچنین $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. در این صورت نگاشت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ را با ضابطه $T^*y^* = y^*T$ را الحاق T گوییم.

قضیه ۱.۱.۱۹. اگر X, Y دو فضای باناخ باشند و X^*, Y^* دوگان آنها باشند و $L : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد و $L^* : Y^* \longrightarrow X^*$ الحاق L با برد بسته باشد، آنگاه برد L نیز بسته است.

برهان. رجوع شود به [۸] صفحه ۴۸۸-۴۷۸ □

قضیه ۱.۱.۲۰. فرض کنید U, V دو زیر فضای باناخ و بسته باشند در اینصورت موارد زیر معادلند

$U + V(i)$ بسته است.

(ii) ثابت c موجود است بطوریکه برای هر $w \in U + V$ که دارای نمایش به صورت $w = u + v$ است و $u \in U, v \in V$ داریم

$$\|u\| + \|v\| \leqslant c\|u + v\|$$

(iii) $\quad U^{\perp} + V^{\perp} = (U \bigcap V)^{\perp}$

(iv) $\quad U^{\perp} + V^{\perp}$ بسته است.

برهان. $(i) \longleftarrow (ii)$ ابتدا نرم روی $U \times V$ را به صورت $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$ تعریف می کنیم.

نگاشت خطی $L : U \times V \longrightarrow U + V$ با ضابطه $L(u, v) = u + v$ یک نگاشت پیوسته و پوشاست چون $U + V$ بسته است پس تام است در نتیجه یک فضای باناخ است. طبق قضیه ۱.۱.۱۷ عدد حقیقی و مثبت c موجود است که

$$\|(u, v)\| \leq c\|u + v\|$$

در نتیجه

$$\|u\| + \|v\| \leq c\|u + v\|$$

$(ii) \longleftarrow (iii)$ اولا واضح است که $U^{\perp} + V^{\perp} \subset (U \cap V)^{\perp}$

زیرا اگر $\varphi + \psi \in U^{\perp} + V^{\perp}$ بطوریکه $\varphi \in U^{\perp}$ و $\psi \in V^{\perp}$ در این صورت $\psi(V) = 0$ پس $\psi(U \cap V) = 0$ پس $\psi \in (U \cap V)^{\perp}$ به همین ترتیب $\varphi \in (U \cap V)^{\perp}$.

برعکس. فرض کنیم $\varphi \in (U \cap V)^{\perp}$ نشان می دهیم $\varphi \in U^{\perp} + V^{\perp}$.

ψ را روی $U + V$ اینگونه تعریف می کنیم که برای هر $w \in U + V$ که $w = u + v$، با شرایط $u \in U, v \in V$ و $\|u\| + \|v\| \leq c\|w\|$ داشته باشیم

$$\psi(w) = \psi(u+v) = \varphi(v)$$

اولا ψ خوش تعریف است زیرا اگر $w = u' + v'$ آنگاه $u' - u = v - v'$ بنابراین $v - v' \in U \cap V$ چون $\varphi \in (U \cap V)^{\perp}$ پس $\varphi(v - v') = 0$ بنابراین $\varphi(v) = \varphi(v')$
ثانیا φ پیوسته است زیرا

$$|\psi(w)| = |\varphi(v)| \leq \|\varphi\| \ \|v\| \leq c\|\varphi\| \ \|w\|$$

حال طبق قضیه هان-باناخ $\theta \in X^*$ موجود است که $\theta|_{(U+V)} = \psi$ بعلاوه $\theta \in U^{\perp}$ زیرا

$$\theta(u) = \psi(u) = \psi(u+0) = \varphi(0) = 0$$

همچنین اگر $v \in V$ باشد آنگاه

$$(\varphi - \theta)(v) = \varphi(v) - \psi(v) = \varphi(v) - \psi(0+v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

$$\varphi - \theta \in V^{\perp}$$

و چون $\varphi = \theta + (\varphi - \theta)$ پس $\varphi \in U^{\perp} + V^{\perp}$

$(iii) \longleftarrow (iv)$ فرض کنیم K زیر مجموعه ای از X باشد. نشان می دهیم $K^{\perp}$ بسته است.

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای در $K^{\perp}$ و همگرا به عنصری مانند $g \in X^*$ باشد. بدین ترتیب برای هر $n \in N$ داریم

$$f_n(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

و چون این دنباله همگرا به g بود، پس خواهیم داشت

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

که این بسته بودن $K^{\perp}$ را نشان می دهد. بدین ترتیب $(U \cap V)^{\perp}$ بسته است و بنابه فرض نتیجه می گیریم $U^{\perp} + V^{\perp}$ نیز بسته است.

$(iv) \longleftarrow (i)$ نگاشت خطی $L : U \longrightarrow X/V$ را با ضابطه $L(u) = u + V$ تعریف می کنیم همچنین نگاشتهای خارج قسمتی

$$Q : X \longrightarrow X/V$$

$$Q' : X^* \longrightarrow X^*/U^{\perp}$$

را تعریف می کنیم.

نگاشت $A : (X/V)^* \longrightarrow V^{\perp}$ را در نظر گرفته و فرض کنیم $\psi \in (X/V)^*$. حال $A\psi$ را بگونه ای تعریف می کنیم که $A\psi \in V^{\perp}$ باشد.

برای هر $x \in X$ تعریف می کنیم $(A\psi)(x) = \psi(x + V)$

و فرض می کنیم $B : X^*/U^{\perp} \longrightarrow U^*$ با ضابطه $B(\varphi + U^{\perp}) = \varphi|_U$ تعریف شده باشد و می نویسیم $L^* = BQ'A$ پس

$$L^* : (X/V)^* \longrightarrow U^*$$

فرض کنیم $\varphi \in (X/V)^*$ در این صورت با توجه به ضابطه L^* خواهیم داشت

$$L^*(\varphi) = (A\varphi)|_U$$

و چنانچه رابطه فوق را روی هر $u \in U$ تاثیر دهیم، داریم

$$L^*\varphi(u) = (A\varphi)|_U(u) = \varphi(u + V)$$

همچنین داریم

$$\varphi L(u) = \varphi(u + V) \qquad \forall u \in U$$

که نتیجه می گیریم $L^*\varphi = \varphi L$. پس L^* الحاق L می باشد. از طرفی برد L^* ، $B(U^\perp + V^\perp)$ می باشد.

زیرا $V^\perp \subset X^*$ پس $Q'(V^\perp) = V^\perp + U^\perp$ اما می دانیم $U^\perp + V^\perp$ بسته است پس $B(U^\perp + V^\perp)$ در U^* بسته است اما طبق قضیه ۱.۱.۱۹ برد L نیز بسته است اما برد L که همان $U + V$ است در X/V بسته است.

با توجه به نگاشت خارج قسمتی Q ، $U + V$ در X بسته است. $\square$