وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

حاصلضرب دوپیچشی زیرخمینه های کشی-ریمان درخمینه های کاهلری موضعاً همدیس

استاد راهنما

دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر

محسن صفری

مهرماه ۱۳۹۰

تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

مادر مهربانم

و روح بلند پدر بزرگوارم

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید. و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است.

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی سپاس‌گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر رضا چاوش خاتمی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایش در راه کسب علم و دانش قدم بردارم و درود می‌فرستم بر وسعت روح پدر دلسوزم که در طول حیاتش راهنمایم بود و در نبودش، امیدوارم دعایش بدرقه‌ی راهم باشد و مثل همیشه آرزو می‌کنم، ای کاش در این لحظات کنارم بود تا بگویم هنوز به نبودنهایت عادت نکرده‌ام و بگویم که از تو سپاس‌گزارم، باشد که روزی مایه افتخار شما باشم.

محسن صفری

مهرماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

اخیراً هندسه دانان عصر حاضر زیرخمینه های کشی-ریمان حاصلضرب دو پیچشی [۱] در خمینه های موضعاً همدیس کاهلری [۲] را مطرح کرده اند و برخی نامساوی درباره اندازه فرم اساسی دوم و خمیدگی متوسط را بدست آورده اند[۴].

در این پایان نامه نامساوی دیگری از اندازه فرم اساسی دوم زیرخمینه های کشی-ریمان حاصلضرب دو پیچشی در خمینه موضعاً همدیس کاهلری را بدست می آوریم. پس از آن حالت تساوی از این نامساوی را بررسی می کنیم.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند آورده شده است.

در فصل دوم خمینه موضعاً همدیس کاهلری را معرفی کرده و یک التصاق خطی تاب آزاد (التصاق وایل) روی آن تعریف می کنیم. همچنین زیرخمینه های کشی-ریمان در خمینه های موضعاً همدیس کاهلری را مطالعه می کنیم و شرایط انتگرال پذیری توزیع پایای D و توزیع ناپایای $D^{\perp}$ را بررسی کرده و در واقع نشان می دهیم که توزیع $D^{\perp}$ انتگرال پذیر است و انتگرال پذیری توزیع پایای Dتحت یک شرط اضافی برقرار است.

در فصل سوم زیرخمینه های کشی-ریمان M در یک خمینه موضعاً همدیس کاهلری $\overline{M}$ مطالعه می شود به طوریکه M یک زیرخمینه کشی-ریمان به صورت حاصلضرب دو پیچشی $M =_f N^{\top} \times_b N^{\perp}$ می باشد که در آن $N^{\top}$ یک زیرخمینه هولومرفیک و $N^{\perp}$ یک زیرخمینه تماماً حقیقی واقع در خمینه موضعاً همدیس کاهلری $\overline{M}$ می باشند.

در فصل چهارم ابتدا یک نامساوی کلی از اندازه (نرم) فرم اساسی دوم زیرخمینه کشی-

[۱]Doubly warped product CR-submanifolds

[۲]Locally conformal Kahler manifold

ریمان حاصلضرب دو پیچشی $M =_f N^{\top} \times_b N^{\perp}$ در خمینه موضعاً همدیس کاهلری را بدست می آوریم و سپس نشان می دهیم اگر حالت تساوی در نامساوی بدست آمده برقرار شود در این صورت $N^{\top}$ و $N^{\perp}$ هر دو زیرخمینه های تماماً نافی در خمینه موضعاً همدیس کاهلری خواهند بود. در انتها با ارائه یک مثال شرایط نامساوی را در آن بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی: خمینه های موضعاً همدیس کاهلری، حاصلضرب دو پیچشی، زیرخمینه های کشی-ریمان.

پیشگفتار

یکی از مفاهیم مهم از نظر هندسی و فیزیکی، مفهوم فضاهای پیچشی است. به عنوان مثال برای یافتن فضای غیر تختی که دارای خمیدگی ریچی صفر است از حاصلضرب پیچشی کره در فضای اقلیدسی به نام فضای شوارتز شیلد استفاده می شود. در سال های اخیر بسیاری از هندسه دانان درباره فضاهای پیچشی و بخصوص در زمینه زیرخمینه های کشی-ریمان حاصلضرب پیچشی و دو پیچشی مطالعه کرده اند.
در سال ۱۹۷۸ بجانکو [۳] مفهوم زیرخمینه های کشی-ریمان را که تعمیم زیرخمینه های هولومرفیک و تماماً حقیقی در یک خمینه تقریباً هرمیتی بود معرفی کرد. بعد از این تعریف مقالات زیادی در این زمینه به وجود آمد.
زیرخمینه کشی-ریمان از یک خمینه موضعاً همدیس کاهلری را CR-حاصلضرب [۴] (حاصلضرب کشی-ریمان) گوئیم هرگاه به صورت حاصلضرب ریمانی یک زیرخمینه هولومرفیک و یک زیرخمینه تماماً حقیقی از خمینه موضعاً همدیس کاهلری باشد.
مفهوم CR-حاصلضرب در خمینه های کاهلری توسط چن [۵] در [۵] معرفی شد. بسیاری از نتایج جالب روی CR-حاصلضرب ها پس از آن نیز توسط مولف های دیگری ثابت شده اند.
در سال ۲۰۰۱ چن در [۷] و [۸] مفهوم CR-حاصلضرب پیچشی [۶] در خمینه های کاهلری را معرفی کرد.
نظریه CR-حاصلضرب و CR-حاصلضرب پیچشی به فضاهای زمینه دیگری مانند خمینه

[۳] A. Bejancu
[۴] CR-product
[۵] B. Y. Chen
[۶] CR-warped product

های موضعاً همدیس کاهلری ([۳]، [۴]) و یا خمینه های ساساکی [۷] ([۱۷]، [۱۸]) توسعه داده شد .

حاصلضرب پیچشی ابتدا توسط بیشاپ [۸]و اونیل [۹] در [۱] به منظور ساختن خمینه های ریمانی با انحنای برشی منفی تعریف شد. در حالت کلی خمینه حاصلضرب دو پیچشی را می توان به صورت تعمیم حاصلضرب پیچشی در نظر گرفت به طوریکه تنها تعداد اندکی مقاله درباره خمینه های ریمانی حاصلضرب دو پیچشی می توان یافت. در سال ۲۰۰۴ ماتسمتو [۱۰] مفهوم زیرخمینه های حاصلضرب دو پیچشی در یک خمینه ریمانی را معرفی کرد [۱۶].

در این پایان نامه دسته جدیدی از زیرخمینه های کشی-ریمان در خمینه های موضعاً همدیس کاهلری را مطالعه می کنیم یعنی آن دسته از زیرخمینه های کشی-ریمان که به صورت حاصلضرب دو پیچشی زیرخمینه های هولومرفیک و زیرخمینه های تماماً حقیقی می باشند.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه آورده شده است که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

در فصل دوم خمینه های موضعاً همدیس کاهلری و زیرخمینه های کشی-ریمان در چنین خمینه هایی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل سوم زیرخمینه های کشی-ریمان حاصلضرب دو پیچشی $M =_f N^\top \times_b N^\perp$ مطالعه شده است.

در فصل چهارم یک نامساوی کلی برای زیرخمینه های کشی-ریمان حاصلضرب دو پیچشی بیان شده است.

---

[۷] Sasakian manifolds
[۸] Bishop
[۹] O'Neill
[۱۰] K. Matsumoto

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ هندسه ریمانی

تعریف ۱.۱.۱. یک متر ریمانی روی خمینه هموار M عبارت است از یک $(۰, ۲)$ میدان تانسوری g به طوریکه متقارن $(g(X,Y) = g(Y,X))$ و مثبت معین $(X \neq ۰ \Rightarrow g(X,X) > ۰)$ باشد.
به عبارت دیگر $g \in \Gamma^{۰}_{۲}(M)$ به طور هموار به هر نقطه p از M یک ضرب اسکالر g_p روی فضای مماس $T_p(M)$ اختصاص می دهد.

تعریف ۲.۱.۱. خمینه هموار M مجهز به متر ریمانی g را یک خمینه ریمانی گوئیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری روی خمینه هموار Mباشد و فرض کنید $\Gamma(E)$ فضای برش های هموار E باشد. یک التصاق در E عبارتست از نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

به طوریکه در شرایط زیر صدق می کند:

۱- نسبت به X ، $C^{\infty}(M)$ خطی است یعنی

$$\forall f \in C^{\infty}(M) \quad \nabla_{fX_۱+X_۲}Y = f\nabla_{X_۱}Y + \nabla_{X_۲}Y$$

۲- نسبت به Y ، $\mathbb{R}$ خطی است یعنی

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \nabla_X \alpha Y_۱ + Y_۲ = \alpha\nabla_X Y_۱ + \nabla_X Y_۲$$

۳- $\forall X, Y \in \chi(M), \quad \forall f \in C^{\infty}(M) \quad \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

تعریف ۴.۱.۱. یک التصاق آفین ∇ روی خمینه هموار M عبارت است از یک التصاق روی کلاف مماس $T(M)$ ؛ یعنی

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

به طوریکه در شرایط (۱)و (۲) و (۳) التصاق صدق می کند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار باشد. التصاق ∇ روی کلاف مماس $T(M)$ را یک التصاق تاب آزاد گوئیم هرگاه تانسور تاب

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

متحد با صفر باشد ؛ یعنی $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. بنابراین التصاق تاب آزاد یک التصاق متقارن نیز است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار و ∇ یک التصاق تاب آزاد روی کلاف مماس $T(M)$ باشد. خمینه هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد ∇ را یک خمینه آفین گوئیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متر $\langle , \rangle$ باشد. یک التصاق منحصر به فرد ∇ روی M وجود دارد به طوریکه

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad \text{(متقارن)}$$
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M) \qquad \text{(سازگاری با متر)}$$

این التصاق را التصاق ریمانی یا التصاق لوی سیویتا می نامیم و از فرمولی به نام فرمول کوزول بدست می آید:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Y Z, X\rangle &= Y\langle Z, X\rangle + Z\langle X, Y\rangle - X\langle Y, Z\rangle \\ &\quad - \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle \end{aligned}$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی همراه با التصاق لوی سیویتا ∇ باشد. در این صورت تانسور انحنای ریمانی R به صورت زیر تعریف می شود:

$$R : \chi(M)^{3} \to \chi(M)$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

به وضوح R یک $(1,3)$ میدان تانسوری روی M می باشد و اگر $x, y \in T_pM$ باشد عملگر خطی

$$R_{xy} : T_pM \to T_pM$$
$$z \to R_{xy}z$$

را عملگر خمیدگی می نامیم به طوریکه در تقارن های زیر صدق می کند:

۱- $R_{xy} = -R_{yx}$

۲- $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$ (اتحاد اول بیانچی)

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار و π یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس T_pM باشد به طوریکه π توسط میدان های برداری X, Y تولید می شود در این صورت انحنای برشی M نسبت به π در نقطه p عبارت است از:

$$K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^{2}}$$

به وضوح انحنای برشی مستقل از انتخاب پایه های $\{X, Y\}$ است.

تبصره ۱.۱.۱. *فرض کنید M یک خمینه ریمانی با بعد n و $p \in M$ باشد. همچنین فرض کنید π یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس T_pM و $\overline{U}$ یک همسایگی از صفر طوری باشد که exp_p یک دیفئومرفیسم از $\overline{U}$ به $exp_p(\overline{U})$ باشد. قرار می دهیم*

$$S_\pi := exp_p(\overline{U} \cap \pi)$$

به طوریکه S_π یک زیرخمینه ۲-بعدی از M شامل نقطه p بوده و به آن برش مسطح مشخص شده توسط π گفته می شود. S_π مجموعه تمام ژئودزیک هایی است که بردار های مماس آن در π قرار دارد. در واقع انحنای برشی نسبت به صفحه π همان انحنای (خمیدگی) گاوسی رویه S_π نسبت به متر القا شده از M می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۰. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی و M یک زیرخمینه آن باشد. در این صورت التصاق قائم M به صورت زیر تعریف می شود :

$$\nabla^{\perp} : \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)^{\perp}$$
$$\nabla^{\perp}_X Z = nor\overline{\nabla}_X Z \quad X \in \chi(M), Z \in \chi(M)^{\perp}$$

به طوریکه $\overline{\nabla}$ التصاق ریمانی $\overline{M}$ می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی و M یک زیرخمینه آن باشد. انحنای قائم $R^{\perp}$ زیر خمینه M در خمینه $\overline{M}$ عبارت است از :

$$R^{\perp} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)^{\perp}$$
$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ باشد و M یک زیرخمینه $\overline{M}$ باشد. در این صورت نگاشت :

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$$
$$h(X,Y) = nor\overline{\nabla}_X Y \quad \forall X,Y \in \chi(M)$$

را فرم اساسی دوم (یا تانسور شکل) M می نامیم به طوریکه h دو خطی و متقارن است.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید M یک زیرخمینه از خمینه $(\overline{M},\overline{g})$باشد. عملگر شکل A_ξ زیرخمینه M متناظر با میدان برداری قائم واحد ξ در خمینه $\overline{M}$ یک $(۱,۱)$ میدان تانسوری روی M می باشد به طوریکه :

$$g(A_\xi X, Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi)$$

به وضوح A_ξ یک عملگر خطی و متقارن است.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید M یک خمینه ریمانی باشد و $\gamma : I \to M$یک خم روی M باشد. خم γ را یک ژئودزیک گوئیم هرگاه میدان برداری γ' در طول γ موازی باشد ؛ یعنی $\nabla_{\gamma'}\gamma' = ۰$. یا به طورهم ارز، ژئودزیک ها خم های با شتاب صفر می باشند : $\gamma'' = ۰$.

تعریف ۱۵.۱.۱. زیرخمینه M در خمینه $\overline{M}$ را یک زیرخمینه تماماً ژئودزیک $\overline{M}$ گوئیم هرگاه هر ژئودزیک M یک ژئودزیک $\overline{M}$ نیز باشد. یا به طور معادل

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید M یک زیرخمینه از خمینه $\overline{M}$ باشد. زیر خمینه M در $\overline{M}$ تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر فرم اساسی دوم h متحد با صفر باشد.*

نتیجه ۱.۱.۱. *زیرخمینه M در خمینه $\overline{M}$ تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر به ازای هر میدان برداری قائم ξ داشته باشیم $A_\xi = ۰$.*

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید M زیرخمینه ای از خمینه $\overline{M}$ باشد. نقطه $p \in M$را نافی گوئیم اگر بردار قائم $z \in T_p(M)^\perp$ چنان موجود باشد به طوریکه

$$h(v,w) = g(v,w)z \quad \forall v,w \in T_pM$$

در این صورت zرا بردار خمیدگی قائم M ، در نقطه p می نامیم.
زیرخمینه M را یک زیر خمینه تماماً نافی گوئیم هرگاه هر نقطه از M نافی باشد. در این صورت میدان برداری قائم Z چنان موجود است که:

$$h(V,W) = g(V,W)Z$$

به ازای تمام میدان های برداری مماس V, W.
در این صورت میدان برداری Zرا میدان برداری خمیدگی قائم M می نامیم. یا به طور معادل

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید M یک زیرخمینه n -بعدی از خمینه $(n+p)$ -بعدی $\overline{M}$ باشد. در این صورت زیرخمینه M در خمینه $\overline{M}$ تماماً نافی است هرگاه برای $a = ۱, \cdots, p$

$$A_a X = \rho_a X \quad \forall X \in T(M)$$

به طوریکه A_a عملگر شکل متناظر با میدان برداری قائم واحد ξ_a می باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید M, N دو خمینه هموار باشند و فرض کنید $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. اگر $s \geqslant ۱$ و $T \in \Gamma^{\circ}_s(N)$ آنگاه $\phi^* T \in \Gamma^{\circ}_s(M)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$p \in M,\ \forall v_i \in T_pM \quad (\phi^*T)_p(v_1, \cdots, v_s) = T_{\phi_p}(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s)$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید M, N دو خمینه هموار باشند و فرض کنید $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. میدان های برداری هموار X روی M و Y روی N، ϕ-وابسته هستند هرگاه

$$d\phi(X_p) = Y_{\phi p} \qquad \forall\, p \in M$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متر g_M و N یک خمینه ریمانی با متر g_N باشد. اگر π و σ به ترتیب نگاشت های تصویر طبیعی از $M \times N$ به M و N باشند قرار می دهیم

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$$

در این صورت g به وضوح یک متر روی $M \times N$ تعریف می کند. بنابراین $M \times N$ یک خمینه ریمانی با متر g می باشد که آن را خمینه حاصلضرب ریمانی گوئیم.

لم ۱.۱.۱. *فضای $T_{(p,q)}(M \times N)$ به صورت مجموع مستقیم زیرفضاهای $T_{(p,q)}M$ و $T_{(p,q)}N$ است ؛ یعنی هر عضو از $T_{(p,q)}(M \times N)$ دارای نمایش منحصر به فرد به صورت $x + z$ است به طوریکه $x \in T_{(p,q)}M$ و $z \in T_{(p,q)}N$.*

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید M, N دو خمینه هموار باشند و $M \times N$ خمینه حاصلضرب ریمانی باشد و فرض کنید π و σ به ترتیب نگاشت های تصویر طبیعی از $M \times N$ به M و N باشند. اگر $x \in T_p(M)$ و $q \in N$ در این صورت ترفیع x به (p, q) که با $\overline{x}$نشان می دهیم یک بردار منحصر به فرد در $T_{(p,q)}(M)$ است به طوریکه $d\pi(\overline{x}) = x$.
اگر $X \in \chi(M)$در این صورت ترفیع X به $M \times N$ میدان برداری $\overline{X}$ می باشد به طوریکه مقدار آن در هر (p, q) ترفیع X_p به (p, q) است. به عبارتی $d\pi(\overline{X}_{(p,q)}) = X_p$.
بنابراین ترفیع X به $M \times N$ یک میدان برداری منحصر به فرد از $\chi(M \times N)$است به طوریکه با X، π- وابسته است و با میدان برداری صفر روی N، σ-وابسته می باشد.
مجموعه تمام چنین ترفیع های افقی [1] $\overline{X}$ را با $\Gamma(M)$نشان می دهیم. به همین ترتیب می توان ترفیع میدان های برداری روی N (ترفیع عمودی) [2] را با استفاده از نگاشت σ تعریف کرد.

[1] Horizontal lifts
[2] Vertical lifts

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار و ω یک k-فرم دیفرانسیل پذیر روی M باشد. ω را روی M بسته گوئیم هرگاه $d\omega = 0$ باشد و نیز ω را روی M دقیق گوئیم هرگاه یک $(k-1)$-فرم دیفرانسیل پذیر η روی M وجود داشته باشد به طوریکه $\omega = d\eta$ باشد.
بنابراین $d \circ d = 0$ نتیجه می دهد که هر فرم دقیق بسته است.

۱-فرم ω روی خمینه هموار M را دقیق گوئیم هرگاه تابع $f \in C^{\infty}(M)$ موجود باشد به طوریکه $\omega = df$.

لم ۲.۱.۱. *(لم پوانکاره)*
فرض کنید M یک خمینه هموار و $\omega \in \Omega^k(M)$، $(k \geqq 1)$ به طوریکه $d\omega = 0$ در این صورت به ازای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی مانند U در M و یک $(k-1)$-فرم α روی U موجود است به طوریکه

$$\omega|_U = d\alpha$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی هموار باشد و $A \in \Gamma^r_s(M)$. در این صورت عمل پایین بر یک اندیس [3] به صورت زیر تعریف می شود

$$\downarrow^a_b : \Gamma^r_s(M) \to \Gamma^{r-1}_{s+1}(M)$$
$$(\downarrow^a_b A)(\theta^1, \cdots, \theta^{r-1}, X_1, \cdots, X_{s+1}) =$$
$$A(\theta^1, \cdots, X^*_b, \cdots, \theta^{r-1}, X_1, \cdots, X_{b-1}, X_{b+1}, \cdots, X_{s+1})$$

به طوریکه X^*_b، ۱-فرم به طور متریک هم ارز با میدان برداری X_b است و در مکان aام در بین ۱-فرم ها قرار می گیرد.
به طریق مشابه عمل بالا بر یک اندیس [4] نیز تعریف می شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متریک $\langle , \rangle$ باشد و فرض کنید $f \in C^{\infty}(M)$ یک تابع هموار روی M باشد. گرادیان تابع f به صورت میدان برداری به طور متریک هم ارز با $df \in \chi^*(M)$ تعریف می شود ؛ یعنی به ازای هر میدان برداری مماس X :

$$\langle gradf, X \rangle = df(X) = Xf$$

[3] Lowering an index
[4] Raising an index

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید Vو W میدان های برداری هموار روی خمینه هموار M باشند. براکت لی Vو W عبارت است از عملگر $[V, W]_p : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$[V, W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

تعریف ۲۶.۱.۱. یک کنج روی خمینه M در نقطه p عبارت است از یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس $T_p(M)$. اگر M، n-بعدی باشد در این صورت n تا میدان برداری دو به دو متعامد یکه $E_1, \cdots, E_n$ را یک میدان کنجی می نامیم که به هر نقطه از خمینه یک کنج اختصاص می دهد.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید M یک زیرخمینه n- بعدی از خمینه $(n+p)$-بعدی $\overline{M}$ باشد. در این صورت میدان برداری خمیدگی متوسط H ، زیر خمینه M به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

به طوریکه $e_1, \cdots, e_n$ یک کنج روی M در نقطه p می باشد.
اندازه$|H|$ ، میدان برداری خمیدگی متوسط Hرا خمیدگی متوسط زیرخمینه M گوئیم.

به طور معادل اگر برای $a = 1, \cdots, p$، ξ_a میدان های برداری قائم متعامد یکه به M و A_a عملگر شکل متناظر با ξ_a باشد در این صورت میدان برداری خمیدگی متوسط H به صورت زیر می شود:

$$H = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{p} (trace A_a)\xi_a$$

تعریف ۲۸.۱.۱. نقطه $x \in M$ را نقطه مینیمال M گوئیم هرگاه میدان برداری خمیدگی متوسط H در نقطه $x \in M$ متحد با صفر باشد. اگر H روی M متحد با صفر باشد در این صورت M را یک زیرخمینه مینیمال می نامیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار باشد و نیز فرض کنید g و $\overline{g}$ دو متر ریمانی روی M باشند. دو متر g و $\overline{g}$ را همدیس گوئیم هرگاه تابع مثبت $\mu : M \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر دو میدان برداری مماس X و Y داشته باشیم:

$$\overline{g}(X,Y) = \mu g(X,Y)$$

فرض کنید ∇ و $\overline{\nabla}$ التصاق های ریمانی متناظر با متر های gو $\overline{g}$ باشند. در این صورت داریم:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$$

به طوریکه

$$S(X,Y) = \frac{۱}{۲\mu}\Big\{(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X,Y)grad\mu\Big\}.$$

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید Mو N خمینه های ریمانی به ترتیب با تانسور مترهای g_Mو g_Nباشند. یک ایزومتری از M به N یک دیفئومرفیسم $\phi : M \to N$ می باشد به طوریکه حافظ متر است ؛ یعنی

$$\phi^*(g_N) = g_M.$$

۲.۱ خمینه های انتگرالی و برگ بندی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید Mیک خمینه هموار و فرض کنید V یک میدان برداری هموار روی M باشد. یک خم انتگرالی V عبارت است از یک خم هموار $\gamma : I \to M$ تعریف شده روی بازه باز $I \subset \mathbb{R}$به طوریکه

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \qquad \text{به ازای هر } t \in I$$

به عبارت دیگر بردار مماس به γ در هر نقطه مساوی با مقدار Vدر آن نقطه است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه هموار باشد. در این صورت توزیع k-بعدی D روی خمینه $\overline{M}$ عبارت است از یک نگاشت D که به هر نقطه $p \in \overline{M}$ یک زیر فضای k-بعدی D_pاز $T_p(\overline{M})$ (فضای مماس بر $\overline{M}$ در نقطه p) را نسبت می دهد.
D را مشتق پذیر گوئیم چنانچه به ازای هر $p \in \overline{M}$ یک همسایگی U با k میدان برداری مستقل خطی $X_k, \cdots, X_۱$ روی U ، وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $q \in U$ $\{X_{۱q}, \cdots, X_{kq}\}$یک پایه برای D_q باشد.
حال فرض کنید M یک زیرخمینه از خمینه $\overline{M}$ باشد در این صورت M را یک خمینه انتگرال توزیع D (خمینه انتگرالی) گوئیم هرگاه به ازای هر $p \in M$