فهرست مطالب

فصل ۱

جبر های باناخ

از آنجایی‌که شالوده این پایان‌نامه بر جبرهای باناخ استوار گردیده‌است، لذا شناخت این ساختارها اولین و اساسی‌ترین نیاز برای شروع کار می‌باشد. بنابراین در این فصل به معرفی جبرهای باناخ می‌پردازیم. در سرتاسر این پایان‌نامه $\mathbb{C}$ نشان‌دهنده میدان اعداد مختلط، و $\mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی می‌باشد. همچنین اکثر مطالب این فصل برگرفته از [۱۰، ۱۳] می‌باشد. لذا برای اجتناب از تکرار در متن، از ذکر آنها خودداری نموده‌ایم و تنها مراجع غیر از مراجع فوق‌الذکر در متن این فصل ذکر گردیده و در برخی موارد که لازم دانسته‌ایم، برای سهولت در دسترسی به منابع خواننده با استفاده از زیرنویس ارجاع داده شده.

۱.۱ معرفی جبر های باناخ

تعریف ۱.۱.۱. یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ فضایی‌برداری مانند $(\mathcal{A}, +)$ روی میدان $\mathbb{F}$ است، همراه با یک عمل دوتایی $(.)$ به نام ضرب به‌طوری‌که $(\mathcal{A}, .)$ نیم‌گروه بوده و دارای قوانین توزیع‌پذیری نسبت به جمع باشد، همچنین برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$،$a, b \in \mathcal{A}$ داشته‌باشیم:

$$\alpha(a.b) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

جبر $\mathcal{A}$ جابجایی است اگر $(\mathcal{A}, .)$ آبلی باشد.

جبر $\mathcal{A}$ یکانی (یکدار) نامیده می‌شود اگر شامل عنصری مانند ۱ باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{A}$ داشته‌باشیم:

$$۱.x = x.۱ = x$$

تعریف ۲.۱.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکانی باشد. آنگاه عنصر $x \in \mathcal{A}$ را وارون‌پذیر گویند هرگاه $x^{-۱} \in \mathcal{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$x.x^{-۱} = x^{-۱}.x = ۱$$

عنصری که وارون‌پذیر نباشد، وارون‌ناپذیرنامیده می‌شود.

جبر $\mathcal{A}$ رایک جبر بخشی می‌نامند اگر یکانی بوده و هر عنصر ناصفر آن وارون‌پذیر باشد.

تذکر ۱.۱. اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ جبر $\mathcal{A}$ به‌ترتیب یک جبر حقیقی یا یک جبر مختلط نامیده می‌شود. از این پس جبر $\mathcal{A}$ همواره یک جبر مختلط یکانی در نظر گرفته می‌شود مگر اینکه خلافش فرض شود.

تعریف ۳.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ را یک دامنه می‌نامند، اگر $\mathcal{A} \neq o$ و برای $a, b \in \mathcal{A}$ از تساوی رابطه $ab = o$ نتیجه بگیریم $a = o$ یا $b = o$. اگر یک جبر جابجایی دامنه هم باشد یک دامنه‌صحیح نامیده می‌شود.

در این مرحله با زیرجبرها آشنا خواهیم شد، چرا که در مواردی از این پایان‌نامه به آنها برخورد می‌کنیم. همچنین با شناخت زیرجبر می‌توان جبرهای جدیدی تولید کرده و در مطالعات خود آنها را مورد استفاده قرار داد.

تعریف ۴.۱.۱. زیر مجموعه $\mathcal{B}$ از جبر $\mathcal{A}$ را یک زیر جبر از آن می نامند اگر $\mathcal{B}$ نسبت به اعمال جبری روی $\mathcal{A}$ بسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱. اگر E یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه:

آ) برای نمایش $E \backslash \{o\}$ از $E^{\bullet}$ استفاده می کنیم.

ب)اگر S یک زیرمجموعه غیرتهی از E باشد آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{F}S = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{F}, x \in S\}$$

همچنین برای نمایش $\mathbb{F}\{x\}$ از $\mathbb{F}x$ استفاده می‌نماییم.

پ)اگر S زیرمجموعه‌ای از E باشد. آنگاه مجموعه تولیدشده خطی توسط S عبارت‌است از:

$$linS = lin_{\mathbb{F}}S = \{\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}, x_۱, ..., x_n \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $S \subseteq \mathcal{A}$ باشد آنگاه حاصل‌ضرب دکارتی n -تایی S را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S^{[n]} = \{a_۱...a_n : a_i \in S, i = ۱, ..., n\}$$

همچنین داریم:

$$S^n = linS^{[n]}$$

مجموعه S را ضربی می‌نامند هرگاه $S^{[۲]} \subseteq S$ باشد.

مثال ۱.۱.۱. اگر فرض کنیم $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ و $S = \mathbb{R}$ آنگاه $\mathbb{R}$ یک مجموعه ضربی است.

تذکر ۲.۱. اگر $S \subseteq \mathcal{A}$ باشد. آنگاه اشتراک تمام زیرجبرهای شامل S یک زیرجبر از $\mathcal{A}$ است، که زیرجبر تولید شده توسط S نامیده می‌شود و با نماد $alg_{\mathcal{A}}S$ یا به‌اختصار با نماد $algS$ نمایش داده می‌شودآ.

تعریف ۷.۱.۱. زیرجبر $\mathcal{B}$ از جبر یکانی $\mathcal{A}$ را یک زیرجبر یکانی می‌نامند. هرگاه عنصر همانی جبر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{B}$ نیز قرارداشته باشد.

اگرمجموعه تمام عناصر وارون‌پذیر $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ نمایش دهیم یک زیر جبر یکانی $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ را وارون-بسته گوییم، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{B}$ یک زیرجبر یکانی از یک جبر جابجایی یکانی $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه مجموعه زیر:

$$\mathfrak{B} = \{bc^{-۱} : b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{B} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\}$$

یک زیرجبر یکانی از $\mathcal{A}$ است که کوچکترین زیرجبر وارون-بسته $\mathcal{A}$ شامل $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود. این زیرجبر را بستار-وارون $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ می نامند.

جابجایی یکی از خواص مهم در جبرهاست، درصورت عدم وجود این خاصیت زیرمجموعه‌هایی از جبر مورد نظرکه دارای این خاصیت هستند مدنظر قرار خواهندگرفت. مرکز هر جبر زیرمجموعه‌ایست مفید که علاوه بر خاصیت جابجایی دارای خواص مهم دیگری نیز هست. تعریف مرکز جبر را در زیر ملاحظه نمایید.

تعریف ۹.۱.۱. مرکز $\mathcal{A}$ یا $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ مجموعه اعضایی از جبر $\mathcal{A}$ است که با تمام عناصر آن جابجا می‌شوند یعنی:

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} | y \in \mathcal{A} xy = yx\}$$

و همچنین $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ یک زیرجبر بسته جابجایی از $\mathcal{A}$ و شامل عضو یکه است.

مثال ۲.۱.۱. اگر $\mathcal{A}$ را جبر تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درآیه‌هایی از میدان $\mathbb{F}$ در نظر بگیریم یعنی:

$$\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{F}E_n$$

که E_n ماتریس همانی $M_n(\mathbb{F})$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. آنگاه $a \in \mathcal{A}$ را پوچ‌توان می‌نامند اگر برای یک $n \in \mathbb{N}$ داشته‌باشیم $a^n = o$. همچنین $S \subseteq \mathcal{A}$ را یک مجموعه پوچ‌گویند اگر هر $s \in S$ پوچ‌توان باشد.

مجموعه $S \subseteq \mathcal{A}$ را پوچ‌توان گوییم هرگاه برای یک $n \in \mathbb{N}$ داشته‌باشیم $S^{[n]} = \{o\}$. مجموعه عناصر پوچ‌توان $\mathcal{A}$ را با $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. اندیس عنصر پوچ‌توان $a \in \mathcal{A}$ کوچکترین $n \in \mathbb{N}$ است به‌طوری‌که $a^n = o$ و اندیس مجموعه پوچ‌توان S نیز کوچکترین $n \in \mathbb{N}$ است که به‌ازای آن $S^{[n]} = \{o\}$ باشد.

توجه ۳.۱. اگر $a, b \in \mathfrak{N}(\mathcal{A})$ باشند. در حالت کلی نمی‌توان گفت که $a + b, ab \in \mathfrak{N}(\mathcal{A})$ مگر اینکه داشته باشیم:

$$ab = ba$$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. آنگاه $a \in \mathcal{A}$ را خودتوان گویند هرگاه $a^۲ = a$ باشد. مجموعه عناصر خودتوان $\mathcal{A}$ را با $\mathfrak{I}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. همچنین یک خودتوان در $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ یک خودتوان مرکزی نامیده می‌شود.

تذکر ۴.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $p \in \mathfrak{J}(\mathcal{A})$ آنگاه p عضو همانی زیرجبر $p\mathcal{A}p$ از $\mathcal{A}$ است.

اکنون آماده‌ایم که به سمت تعریف جبرهای باناخ حرکت نموده و خواص مفیدی از آنان را معرفی کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ را نرم‌دار می نامند هرگاه یک فضای‌برداری نرم‌دار بوده و برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته‌باشیم:

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$$

جبر نرم‌دار $\mathcal{A}$ یکانی است اگریک همانی مانند $e_{\mathcal{A}}$ داشته‌باشد چنان‌که:

$$\|e_{\mathcal{A}}\| = ۱$$

تذکر ۵.۱. تعریف فوق نشان می‌دهد که ضرب در یک جبر نرم‌دار تابعی پیوسته است.

زیرا با فرض اینکه (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در $\mathcal{A}$ باشند به‌طوری‌که $x_n \longrightarrow x_o$ و $y_n \longrightarrow y_o$ باشد. دراین‌صورت از رابطه زیر:

$$\|x_n y_n - x_o y_o\| \leqslant \|y_o\| \|x_n - x_o\| + \|x_n\| \|y_n - y_o\|$$

نتیجه خواهد شد:

$$x_n y_n \longrightarrow x_o y_o$$

بنابراین عمل ضرب پیوسته است.

تعریف ۱۳.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ می‌نامند هرگاه یک جبر نرم‌دار بوده و تحت نرم خود کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی در آن تحت نرم مذکور همگرا به عضوی از $\mathcal{A}$ باشد.

توجه ۶.۱. وجود همانی در بحث ما اساسی است، بنابراین اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ غیریکانی باشد. می‌توانیم آن را در یک جبر باناخ یکانی بنشانیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه $\mathcal{A}^{\flat}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{A}^{\flat} = \mathbb{F} \times \mathcal{A} = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbb{F}, a \in \mathcal{A}\}$$

که همراه با ضرب زیر:

$$(\alpha,a)(\beta,b)=(\alpha,\alpha b+\beta a+ab) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{F}),(a,b\in\mathcal{A})$$

یک فضای خطی است. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathcal{A}^\sharp=\mathcal{A}$ اگر $\mathcal{A}$ یکانی، و $\mathcal{A}^\sharp=\mathcal{A}^\flat$ است اگر $\mathcal{A}$ غیر یکانی باشد.

$\mathcal{A}^\flat$ یک جبر یکانی روی $\mathbb{F}$ است وعنصر همانی آن $(۱,o)$ است. ما $\mathcal{A}$ را همانند یک زیرجبر از $\mathcal{A}^\flat$ در نظر می‌گیریم. توجه داشته‌باشید اگر $\mathcal{A}$ یکانی باشد آنگاه عنصر $(۱,o)$ با همانی e_A از $\mathcal{A}$ متفاوت است. جبر $\mathcal{A}^\sharp$ با الحاق یک همانی به $\mathcal{A}$ شکل گرفته‌است.

حال چند مثال از جبرهای باناخ را برای آشنایی مقدماتی خواننده با این ساختار ، بیان می‌کنیم.

مثال ۳.۱.۱. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی و با نرم قدرمطلق روی خود $\mathbb{R}$ به عنوان یک میدان ؛ یک جبر باناخ است. همچنین مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با نرم اقلیدسی روی میدان $\mathbb{R}$ یک جبر باناخ است.

مثال ۴.۱.۱. فضای عملگرهای‌خطی کراندار روی فضای نرم‌دار $\mathbb{X}$ یعنی $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ را با نرم عملگری یعنی:

$$\|T\|=sup\{\|Tx\|:\|x\|\leqslant ۱\}$$

در نظر بگیرید. چنانچه ضرب روی آن ترکیب عملگرها باشد. می‌توان نشان‌داد $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ یک جبر مختلط با همانی I (عملگر همانی) است .از طرفی اگر $T,S\in\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ باشند. آنگاه:

$$\|TS\|\leqslant\|T\|\|S\|$$

بنابراین $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ یک جبر باناخ غیرجابجایی است مگر در حالتی که $dim\mathbb{X}=۱$. زیرا در غیر اینصورت یعنی هنگامی‌که $dim\mathbb{X}=n$ و $n\geqslant ۲$ باشد، آنگاه هر $T\in\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ را می‌توان توسط یک ماتریس $n\times n$ نمایش داد که بوضوح می دانیم ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی نیست.

۲.۱ ایده‌آل‌ها ومدول‌ها

تعریف ۱.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باشد.یک زیرفضای خطی I از $\mathcal{A}$ یک ایده آل چپ است اگر $\mathcal{A}.I\subset I$ و یک ایده آل راست است اگر $I.\mathcal{A}\subset I$ باشد. I را یک ایده آل می‌نامیم اگر هم ایده‌آل راست و هم ایده‌آل چپ باشد،

یعنی داشته‌باشیم:

$$\mathcal{A}.I + I.\mathcal{A} \subset I.$$

به عنوان مثال $\mathcal{A}$ یک ایده‌آل از $\mathcal{A}^\flat$ است.

توجه ۷.۱. از این پس همواره ایده‌آل‌ها را دوطرفه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۲.۱. $\mathcal{A}$ و $\{o\}$ ایده‌آل‌های بدیهی $\mathcal{A}$ نامیده می‌شوند. همچنین ایده‌آل I از $\mathcal{A}$ یک ایده‌آل سره نامیده می‌شود اگر $I \neq \mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. ایده‌آل سره I از جبر $\mathcal{A}$ ماکسیمال نامیده می‌شود اگر مشمول در هیچ ایده‌آل سره دیگری نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. ایده‌آل I از جبر $\mathcal{A}$ را مینیمال گویند هرگاه برای هر ایده‌آل غیربدیهی مانند J که $J \subseteq I$ باشد، داشته‌باشیم $J = o$ یا $J = I$ باشد. به‌عبارت دیگر یک ایده‌آل مینیمال از جبر $\mathcal{A}$، کوچکترین عضو خانواده ایده‌آل‌های غیرصفر آن جبر است.

اکنون با توجه به اهمیت مدول‌ها و کاربردی که در بخش قضایای چگالی دارند تعریف و بعضی خواص مهم آن را ارائه می‌کنیم. اما در ابتدا نگاشت دوخطی را تعریف می‌نماییم.

تعریف ۵.۲.۱. اگر V, W و X فضاهای برداری روی یک میدان یکسان مانند $\mathbb{F}$ باشند. آنگاه نگاشت $B : V \times W \longrightarrow X$ که $(v,w) \mapsto B(v,w)$ یک نگاشت دوخطی نامیده می‌شود اگر برای هر $w \in W$ نگاشت $v \mapsto B(v,w)$ خطی باشد و به‌طور مشابه برای هر $v \in V$ نیز نگاشت $w \mapsto B(v,w)$ خطی باشد.

نگاشتهای دوخطی موجود در بحث ما از $\mathcal{A} \times E$ به E تعریف می‌شوند چنان‌که:

$$(a,x) \mapsto ax \qquad\qquad (a \in \mathcal{A}, x \in E)$$

همچنین در این حالت $\mathcal{A}$ یک جبر و E یک $\mathcal{A}$ -مدول است. اگر ثابت k وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in E$ و هر $a \in \mathcal{A}$ داشته‌باشیم:

$$\|ax\| \leqslant k\|a\|\|x\|$$

گوییم نگاشت دوخطی مذکور پیوسته است. همچنین با انتخاب نرم مناسب روی E معادل با نرم موجود می‌توان K را برابر ۱ قرار داد.

تعریف ۱.۲.۶. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد، آنگاه E یک باناخ $\mathcal{A}$ -مدول چپ نامیده می‌شود اگر یک نگاشت دو خطی پیوسته مانند $ax \mapsto (a,x)$ از $\mathcal{A} \times E$ به E وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که:

$$a_1(a_2x) = (a_1a_2)x \qquad (a_1, a_2 \in \mathcal{A}), (x \in E)$$

به طریق مشابه می‌توان باناخ $\mathcal{A}$ -مدول راست را هم تعریف کرد.

تذکر ۱.۸. از این پس برای راحتی به‌جای باناخ $\mathcal{A}$ -مدول به‌اختصار از لفظ $\mathcal{A}$ -مدول استفاده می‌نماییم.

تعریف ۱.۲.۷. فضای E یک $\mathcal{A}$ -دومدول نامیده می شود هرگاه هم $\mathcal{A}$ -مدول چپ و هم $\mathcal{A}$ -مدول راست باشد و همچنین داشته‌باشیم:

$$a(xb) = (ax)b \qquad (a, b \in \mathcal{A}, x \in E)$$

تعریف ۱.۲.۸. یک زیرفضای خطی F از $\mathcal{A}$ -مدول E زیر مدولی از E است اگر $\mathcal{A}.F \subset F$ باشد.

مثال ۱.۲.۱. اگر E یک $\mathcal{A}$ -مدول باشد. آنگاه برای هر $x \in E$ ، $\mathcal{A}.x = \mathcal{A}x$ یک زیر مدول از E است.

تعریف ۱.۲.۹. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و E یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ باشد.آنگاه E را غیربدیهی گویند، اگر $\mathcal{A}.E \neq \{o\}$ باشد. همچنین $\mathcal{A}$ -مدول چپ غیربدیهی E را ساده می‌نامند، اگر تنها زیرمدول‌های آن $\{o\}$ و E باشند.

تعریف ۱.۲.۱۰. ایده‌آل سره چپ I از جبر $\mathcal{A}$ را یک ایده‌آل چپ هنگی از $\mathcal{A}$ می‌نامیم اگر $u \in \mathcal{A}$ موجود باشد چنان‌که:

$$\mathcal{A}(e_{\mathcal{A}} - u) \subseteq I$$

و در این‌صورت u را یک همانی راست هنگی برای I می‌نامند.

همچنین ایده‌آل سره I از جبر $\mathcal{A}$ هنگی نامیده می‌شود اگر $u \in \mathcal{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$\mathcal{A}(e_{\mathcal{A}} - u) + (e_{\mathcal{A}} - u)\mathcal{A} \subseteq I$$

گزاره ۱.۲.۱. اگر M یک ایده‌آل ماکسیمال در جبر جابجایی $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه یا M هنگی است یا $\mathcal{A}^2 \subset M$ است.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر E و F فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. آنگاه مجموعه نگاشت‌های خطی از E به F را با $\mathcal{L}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. نماد $\mathcal{L}(E)$ را برای $\mathcal{L}(E,E)$ به‌کار خواهیم برد.
عملگر خطی $T \in \mathcal{L}(E,F)$ دارای رتبه ۱ است. اگر $dimT(E) = ۱$ بوده، و متناهی‌رتبه است اگر $dimT(E)$ متناهی باشد.

هر عملگر متناهی‌رتبه حاصل‌جمع تعداد متناهی از عملگرهای با رتبه۱ است. مجموعه عملگرهای متناهی‌رتبه $\mathcal{L}(E,F)$ را با $\mathcal{FL}(E,F)$ نمایش داده و همچنین مجموعه عملگرهای متناهی رتبه $\mathcal{L}(E)$ را با $\mathcal{FL}(E)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید E یک فضای‌خطی غیرصفر باشد. آنگاه E برای نگاشت $Tx \longrightarrow (T,x)$ از $\mathcal{L}(E) \times E$ به E که $\mathcal{L}(E)$ یک جبر اولیه است؛ $\mathcal{L}(E)$ -مدول چپ ساده می‌باشد.
در حالتی که E نامتناهی بعد است $\mathcal{FL}(E)$ یک ایده‌آل سره غیرصفر از $\mathcal{L}(E)$ است،پس $\{o\}$ ایده‌آل اولیه ماکسیمال نیست.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و E یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ(راست) باشد. آنگاه پوچ‌سازهای چپ و راست $S \subseteq E$ را چنین تعریف می‌نماییم:

$$S^{\perp} = \{a \in \mathcal{A} : a.S = o\} \qquad\qquad S^{\top} = \{a \in \mathcal{A} : S.a = o\}$$

همچنین اغلب نماد $x^{\perp}$ را برای نمایش $\{x\}^{\perp}$ به‌کار خواهیم‌برد.

گزاره ۲.۲.۱. [۱] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و E یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ ساده باشد و $x_o \in E^{\bullet}$ آنگاه داریم:

۱- $\mathcal{A}.x_o = E$

۲- ${x_o}^{\perp}$ یک ایده‌آل چپ هنگی ماکسیمال در $\mathcal{A}$ است.

اثبات. ۱-فرض کنید $x \in E$ آنگاه $\mathcal{A}.x$ یک زیرمدول از E است و بنابراین $\mathcal{A}.x = o$ یا $\mathcal{A}.x = E$ حال فرض کنیم $F = \{x \in E : \mathcal{A}.x = o\}$ آنگاه F یک زیرمدول از E است که $F \neq E$ زیرا $\mathcal{A}.E \neq o$ و بنابراین $F = o$.

می‌دانیم که $x_o \notin F$ بنابراین $\mathcal{A}.x_o = E$

[۱] صفحه۶۱گزاره ۱.۴.۲۹[۱۳]

۲-چون E یک مدول ساده است. بنابراین ${x_o}^{\perp}$ یک ایده‌آل چپ ماکسیمال است. اما بنابر(۱) **عنصر** $u \in \mathcal{A}$ موجود است چنان‌که $u.x_o = x_o$ لذا $\mathcal{A}(e_{\mathcal{A}} - u)x_o = o$ و درنتیجه $\mathcal{A}(e_{\mathcal{A}} - u) \subset {x_o}^{\perp}$ پس به‌وضوح u یک همانی هنگی راست برای ${x_o}^{\perp}$ است. یعنی حکم برقرار است.

$\square$

مثال ۳.۲.۱. اگر E یک فضای خطی غیرصفر باشد. آنگاه $\mathcal{FL}(E)$ [۲] یک ایده‌آل مینیمال از $\mathcal{L}(E)$ است.

لم ۳.۲.۱. [۳] فرض کنید M یک ایده‌آل چپ مینیمال در $\mathcal{A}$ بوده و $u \in \mathcal{A}$ باشد. آنگاه یا $Mu = o$ یا اینکه Mu یک ایده‌آل مینیمال چپ از $\mathcal{A}$ است.

تذکر ۹.۱. یک ایده‌آل سره I از جبر $\mathcal{A}$ هنگی است اگروتنهااگر $\frac{\mathcal{A}}{I}$ یک جبر یکانی باشد.

توجه ۱۰.۱. اگر u یک همانی راست هنگی برای ایده‌آل چپ هنگی I باشد. آنگاه u شبه-وارون‌پذیر نیست. زیرا اگر فرض کنیم چنین نباشد پس $a \in \mathcal{A}$ موجود است چنان‌که $a \diamond u = o$ بنابراین $a + u - au = o$ پس خواهیم‌داشت:

$$u = -(a - au) \in I$$

در نتیجه $\mathcal{A} \subseteq I$ که متناقض با سره بودن I است.

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر I یک زیرفضای خطی از جبر $\mathcal{A}$ باشد، به‌طوری‌که

$$\mathcal{A}I = I\mathcal{A} = o$$

آنگاه I یک ایده‌آل از $\mathcal{A}$ است که ایده‌آل پوچساز $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید $\{I_\nu\}$ یک خانواده از ایده‌آل‌های چپ در یک جبر $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه $\bigcap I_\nu$ و $lin(\bigcup I_\nu)$ ایده‌آل‌های چپ $\mathcal{A}$ هستند.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید یک $\mathcal{A}$ جبر باشد، آنگاه $p \in \mathcal{A}$ را خودتوان می نامند اگر $p^۲ = p$ و هر خودتوان در $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ یک خودتوان مرکزی نامیده می‌شود. مجموعه خودتوان‌های $\mathcal{A}$ را با $\mathfrak{J}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$\mathfrak{E}(\mathcal{A}) = lin\mathfrak{J}(\mathcal{A})$$

[۲] صفحه۳۰ مثال۱.۳.۷ قسمت۵ [۱۳]

[۳] صفحه۱۵۵ لم۷ [۱۰]

گزاره ۴.۲.۱. اگر I و J ایده‌آل‌هایی در $\mathcal{A}$ باشند و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه:

۱- $I + J$ و IJ و I^n ایده‌آل‌هایی در $\mathcal{A}$ هستند.

۲-اگر $p \in \mathfrak{J}(\mathcal{A})$ آنگاه به‌وضوح $pIp = I \cap p\mathcal{A}p$.

اثبات. جهت یافتن اثبات (۱) خواننده را به قضیه ۲.۶ از [۳۰] ارجاع می‌دهیم. بنابراین کافیست اثبات (۲) را ارائه کنیم. فرض کنید $p \in \mathfrak{J}(\mathcal{A})$ بنابراین خواهیم‌داشت $p = p^2$ به‌وضوح $pIp \subseteq I \cap p\mathcal{A}p$ برقرار است. حال فرض کنیم $x \in I \cap p\mathcal{A}p$ پس $x \in p\mathcal{A}p$ بنابراین $a \in \mathcal{A}$ موجود است، چنان‌که $x = pap$ ولذا خواهیم داشت:

$$x = pap$$
$$= p^2ap^2$$
$$= p(pap)p$$

اما طبق فرض $pap = x \in I \cap p\mathcal{A}p$ لذا $pap \in I$ بنابراین $p(pap)p \in pIp$ و این بدان معنی است که $x \in pIp$ در نتیجه $I \cap p\mathcal{A}p \subseteq pIp$ و حکم برقرار است.

□

گزاره ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی و جابجایی باشد و $I \subset \mathcal{A}$ یک ایده‌آل سره از $\mathcal{A}$ باشد آنگاه:

۱-I شامل هیچ عنصر وارون‌پذیری نیست.

۲-$\bar{I}$ یک ایده‌آل سره از $\mathcal{A}$ است.

۳-I در یک ایده آل ماکسیمال قرار دارد.

۴-اگر I یک ایده آل ماکسیمال باشد آنگاه I بسته است.

اثبات. ۱-فرض کنیم چنین نباشد پس عنصر وارون‌پذیری مانند $b \in I$ موجود است. اگر a عنصر دل‌خواهی از $\mathcal{A}$ باشد خواهیم داشت:

$$a = a(b^{-1}b)$$
$$= (ab^{-1})b \in I$$

چون $\mathcal{A} \ni ab^{-1}$ است. بنابراین $I = \mathcal{A}$ که این امر متناقض با سره بودن I می‌باشد لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

۲-چون $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی است، پس برای هر ایده‌آل سره I از $\mathcal{A}$ داریم $I \cap \mathcal{G}_A = \emptyset$ زیرا اگر غیر از این باشد، عنصری مانند $a \in I \cap \mathcal{G}_A$ موجود است. پس برای هر $b \in \mathcal{A}$ داریم $b = ba^{-1}a \in I$ لذا $I = \mathcal{A}$ که با سره بودن I در تناقض است. اما طبق لم ۲.۱.۵ از [۱] داریم $\mathcal{G}_A$ در $\mathcal{A}$ باز است. بنابراین $\bar{I}$ بازهم یک ایده‌آل سره از $\mathcal{A}$ خواهد بود.

۳-چون اجتماع هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های سره در $\mathcal{A}$ بازهم یک ایده‌آل سره از $\mathcal{A}$ است، لذا با استفاده از لم زرن حکم به‌وضوح برقرار است.

۴-اگر I یک ایده‌آل ماکسیمال در $\mathcal{A}$ باشد، با توجه به رابطه (۲) حکم برقرار خواهد بود. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید I یک ایده‌آل چپ از یک جبر $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه خارج‌قسمت I را چنین تعریف می‌کنیم:

$$I : \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : a\mathcal{A} \subset I\}$$

خارج‌قسمت یک ایده‌آل چپ هنگی ماکسیمال را یک ایده‌آل اولیه می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. ایده‌آل دو طرفه I از $\mathcal{A}$ اولیه چپ است. اگر برای یک $\mathcal{A}$-مدول چپ تحویل‌ناپذیر E داشته‌باشیم $I = \{a \in \mathcal{A} : a.E = \{o\}\}$. جبر $\mathcal{A}$ را اولیه گوییم اگر $\{o\}$ یک ایده‌آل اولیه آن باشد.

گزاره ۱.۲.۶. [۴] هر خارج‌قسمت $I : \mathcal{A}$ از یک ایده‌آل چپ I یک ایده‌آل در $\mathcal{A}$ است. خارج‌قسمت یک ایده‌آل چپ هنگی در مجموعه ایده‌آل‌های $\mathcal{A}$ که در I قرار دارند؛ ماکسیمال است.

تذکر ۱.۱۱. جبر $\mathcal{A}$ خود یک ایده‌آل اولیه نیست.

گزاره ۱.۲.۷. [۵] فرض کنید I یک ایده‌آل در یک جبر جابجایی A باشد.آنگاه شرایط زیر با هم معادلند.

۱-I یک ایده آل اولیه است.

۲-I یک ایده آل هنگی ماکسیمال است.

۳-$\frac{A}{I}$ یک میدان است.

[۴] صفحه۶۲ذیل تعریف۱.۴.۳۳[۱۳]

[۵] صفحه۶۳ گزاره۱.۴.۳۶[۱۳]

نتیجه ۱.۲.۸. از قسمت ۱ گزاره قبل نتیجه می‌شود که اگر I یک ایده‌آل سره در $\mathcal{A}$ باشد آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

۱- I یک ایده‌آل اولیه است.

۲- $\frac{\mathcal{A}}{I}$ یک جبر اولیه است.

۳- $\mathcal{A}$ -مدول چپ ساده E وجود دارد بطوریکه $I = E^{\perp}$.

۱.۳ مشتق‌ها و خودریختی‌ها

در این بخش می خواهیم نظریه جبرها را به مشتقات روی آنها توسعه دهیم تا علاوه بر معرفی مشتق‌ها روی جبرهای باناخ، به‌ویژه انواع خاصی از آنان مانند مشتق درونی،مشتق‌درونی تعمیم‌یافته و مشتق تعمیم‌یافته روی جبر های‌باناخ خواصی مفیدی از آنها را در اختیار خواننده قراردهیم تا ابزار اولیه برای ورود به مطلب را کسب نماید، از این‌رو در ابتدا به ارائه تعاریف می پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهایی روی $\mathbb{C}$ باشند آنگاه :

۱- $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ همریختی است اگر یک نگاشت خطی مختلط باشد که:

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \qquad\qquad (a_1, a_2 \in \mathcal{A})$$

۲- $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یک پادهمریختی گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_2)\varphi(a_1) \qquad\qquad (a_1, a_2 \in \mathcal{A})$$

تعریف ۱.۳.۲. اگر $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ بوده و E یک $\mathcal{A}$ -دومدول باشد. نگاشت خطی $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow E$ یک مشتق است اگر برای $a, b \in \mathcal{A}$ رابطه:

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

برقرارباشد. مجموعه تمام این مشتق‌ها که یک زیرفضای خطی $\mathcal{L}(\mathcal{A}, E)$ است، با $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, E)$ نمایش داده می شود.

توجه ۱.۱۲. ازاین پس ما مشتق‌ها را از یک جبرباناخ $\mathcal{A}$ به روی خودش تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. یک خودریختی روی یک جبر $\mathcal{A}$ یک یکریختی از $\mathcal{A}$ به‌توی خودش می‌باشد.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یکانی و $c \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ باشد. اگر قراردهیم α_c یک نگاشت از $\mathcal{A}$ به‌توی خودش باشد با این ضابطه که:

$$\alpha_c(a) = c^{-1}ac \qquad\qquad (a \in \mathcal{A})$$

آنگاه α_c به‌وضوح یک خودریختی روی $\mathcal{A}$ است.

یک خودریختی داخلی روی $\mathcal{A}$ برای $c \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ یک خودریختی به‌فرم α_c است.

تذکر ۱.۱۳. روشن است که اگر c در مرکز $\mathcal{A}$ قرار داشته‌باشد. آنگاه $\alpha_c = I$ خواهد بود. به‌ویژه اگر $\mathcal{A}$ یک جبر جابجایی باشد، آنگاه I تنها خودریختی داخلی روی آن خواهدبود. برعکس، اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکانی باشد چنان‌که تنها خودریختی داخلی آن I باشد. آنگاه $\mathcal{A}$ یک جبر جابجایی است.

اگر نگاشت همانی I تنها خودریختی داخلی $\mathcal{A}$ بوده و c یک عنصر وارون‌پذیر از آن باشد، آنگاه طبق مثال قبل α_c یک خوریختی داخلی از $\mathcal{A}$ است. همچنین طبق فرض $\alpha_c = I$ خواهدبود بنابراین $c \in \mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ است، پس هر عنصر وارون‌پذیر $\mathcal{A}$ در مرکز آن قرار دارد. ازطرفی طبق قضیه اساسی جبرهای باناخ می‌دانیم هر عنصر از یک جبر باناخ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از عناصر وارون‌پذیرش نوشت. لذا جبر $\mathcal{A}$ جابجایی است.

گزاره ۱.۳.۱. فرض کنید d یک مشتق پیوسته روی یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه $exp\ d$ یک خودریختی پیوسته روی $\mathcal{A}$ است.

توجه ۱.۱۴. توجه نمایید که $exp\ d$ چنین تعریف شده:

$$exp\ d(a) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n a$$

مثال ۱.۳.۲. اگر $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ و E یک $\mathcal{A}$ -دومدول باشد و $x \in E$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ قرارمی دهیم:

$$\delta_x(a) = ax - xa$$

پس برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}
\delta_x(ab) &= (ab)x - x(ab) \\
&= (ab)x - a(xb) + a(xb) - x(ab) \\
&= a(bx - xb) + (ax - xa)b \\
&= a\delta_x(b) + \delta_x(a)b
\end{aligned}$$

بنابراین δ_x یک مشتق است.

تذکر ۱.۱۵. مشتق‌هایی که به فرم فوق تعریف می شوند، مشتق‌درونی(داخلی) مهیا شده توسط x نامیده می‌شوند.

با توجه به تذکر قبل مشتق‌درونی را می توان چنین تعریف نمود. اگر $a \in \mathcal{A}$ عنصر معینی از جبر $\mathcal{A}$ باشد. برای هر $b \in \mathcal{A}$ قرار می‌دهیم:

$$\delta_a(b) = ab - ba$$

که یک مشتق‌درونی روی $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۴. مجموعه تمام مشتقات‌درونی از $\mathcal{A}$ به E را با $\mathcal{N}^1(\mathcal{A}, E)$ نمایش می دهیم، که یک زیرفضای خطی از $\mathcal{Z}^1(\mathcal{A}, E)$ است.

گزاره ۱.۳.۲. هسته هر مشتق از $\mathcal{A}$ به E یک زیر جبر از $\mathcal{A}$ است.

توجه ۱.۱۶. مشتق‌هایی که درونی نباشند برونی(خارجی) نامیده می‌شوند.

در سال ۱۹۸۵ حدس‌های زیر توسط $Kaplanski$ بیان شدند، حدس اول بیان می‌کند که، هر مشتق روی یک C^* -جبر پیوسته است و مضمون حدس دوم نیزچنین است که، هر مشتق روی یک جبرباناخ نیم‌ساده پیوسته است. $Sakai$ حدس اول را اثبات نمود. حدس دوم نیز توسط $Johnson$ و $Sinclair$ اثبات شد. [۲]

قضیه ۱.۳.۳. (Johnson-Sinclair) [۴] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ نیم‌ساده و d یک مشتق روی آن باشد. آنگاه d پیوسته است.

مثال ۱.۳.۳. مشتق δ_x تعریف شده در این بخش یا همان مشتق‌درونی مهیا شده توسط x کراندار است.

توجه ۱.۱۷. هر مشتق‌درونی $\delta_a = [., a]$ روی جبر $\mathcal{A}$ یک جابجاگر است.

اگر جبر $\mathcal{A}$ جابجایی باشد آنگاه برای هر $b \in \mathcal{A}$ خواهیم داشت:

$$\delta_a(b) = [b, a] = ab - ba = o$$

بنابراین در یک جبر باناخ جابجایی هیچ مشتق‌درونی غیرصفری وجود ندارد.

گزاره ۱.۳.۴. [۴] فرض کنید d یک مشتق روی یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه با این قرارداد که $a^o = I$ جایی‌که I عضو همانی (۱) است، شرایط زیر برقرار خواهد بود:

۱-(قانون لایب‌نیتز)برای $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathcal{A}$ باشند. آنگاه $d^n(ab) = \sum_{r=o}^{n} \binom{n}{r}[d^{n-r}(a)d^r(b)]$.

۲-اگر $n - ۱ \in \mathbb{N}$ آنگاه $d(a^n) = na^{n-۱}$ اگروفقط اگر $ad(a) = d(a)a$.

۳-اگر $n \in \mathbb{N}$ و $d^۲(a) = o$، آنگاه $d^n(a^n) = n!(d(a))^n$.

اثبات. اثبات‌های مربوط به (۱)و(۲) را می توانید در [۸] بیابید. پس اکنون اثبات (۳) را ارائه می‌نماییم.

فرض کنید $d^۲(a) = o$ آنگاه اثبات را با استفاده از استقراء انجام می‌دهیم، اما در ابتدا توجه داشته‌باشید که

$$\begin{aligned} d(d(a))^k &= d[d(a)d(a)...d(a)] \\ &= \sum_{i=o}^{k-۱}(d(a))^i d^۲(a)(d(a))^{k-۱-i} \\ &= o \end{aligned}$$

یعنی برای هر k داریم:

$$d(d(a))^k = o \qquad (۱.۱)$$

اگر $n = ۱$ فرض شود چیزی برای اثبات وجود ندارد. بنابراین برای $n = ۲$ داریم:

$$\begin{aligned} d^{۲}(a^{۲}) &= d(d(a^{۲})) \\ &= d(ad(a) + d(a)a) \\ &= d(ad(a)) + d(d(a)a) \\ &= ad^{۲}(a) + (d(a))^{۲} + (d(a))^{۲} + d^{۲}(a)a \\ &= ۲d(a)^{۲} \\ &= ۲!d(a)^{۲} \end{aligned}$$

که برای $n = ۲$ حکم برقرار است. فرض کنید که رابطه برای $n = k - ۱$ درست باشد یعنی:

$$d^{k-۱}(a^{k-۱}) = (k-۱)!(d(a))^{k-۱}$$

آنگاه توجه نمایید که:

$$\begin{aligned} d^{k}(a^{k-۱}) &= d(d^{k-۱}(a^{k-۱})) \\ &= d[(k-۱)!(d(a))^{k-۱}] \\ &= o \end{aligned}$$

واین نشان می دهد که:

$$d^{k}(a^{k-۱}) = o$$

که این رابطه در ادامه اثبات مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

به هر صورت با فرض $n = k$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d^{k}(a^{k}) &= d^{k}(a^{k-۱}a) \\ &= \sum_{r=o}^{k} \binom{k}{r} (d^{k-r}(a^{k-۱})) \qquad (*) \end{aligned}$$

$$(*) = d^k(a^{k-1})a + k(d^{k-1}(a^{k-1}))(da) + \binom{k}{2}(d^{k-2}(a^{k-1}))(d^2(a)) + ... + a^{k-1}(d^k(a))$$

$$= kd^{k-1}(a^{k-1})(d(a))$$

$$= k(k-1)!(d(a))^{k-1}d(a)$$

$$= k!(d(a))^k$$

بنابر این فرمول مورد بحث برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. $\square$

حال با هدف آشنایی با مشتق‌های غیرکراندار (ناپیوسته) مثال‌هایی از این‌گونه مشتق ارائه می‌نماییم .

مثال ۴.۳.۱. [۸] [6] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی با همانی ۱ بوده و $a \in \mathcal{A}$ یک عنصر غیر جبری از آن باشد، و این به آن معنی است که دنباله $1, a, a^2, ...$ از توان های حسابی a مستقل خطی باشد. همچنین فرض کنید $\|a\| = 1$ باشد و $\mathcal{B}$ یک زیر جبر از $\mathcal{A}$ باشد که توسط ۱ و a تولید می‌شود. مشتق $d : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(\alpha_o + \alpha_1 a + ... + \alpha_n a^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 a + ... + n\alpha_n a^{n-1}$$

که برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $\alpha_i \in \mathbb{C}$. این مشتق که به صورت فوق تعریف شده یک مشتق ناپیوسته (غیر کراندار) روی $\mathcal{B}$ است.

مثال ۵.۳.۱. [۸] [7] فرض کنید $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{N}$ رابطه $e_i \in \mathcal{B}$ برقرار باشد در حالی که e_i ها خودتوان‌های دوبه‌دو متعامد هستند. فرض کنید $r \in \mathcal{B}$ موجود باشد. چنان‌که $r^2 = o$ و برای هر $j \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $e_j r = re_j = o$. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را چنین می سازیم که کامل‌شده تمام حاصل‌جمع‌های متناهی به صورت $\lambda r + \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ باشد، چنانکه $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n$ اسکالر های دلخواه هستند. برای این ساختار ضرب اسکالر را این‌گونه تعریف می کنیم که اگر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $a = \lambda r + \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \mathcal{A}$ آنگاه

$$\alpha a = \alpha\lambda r + \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j\alpha)e_j$$

[6] صفحه۲۱ مثال۲.۱.۲

[7] صفحه۲۲ مثال۲.۱.۳

که $\alpha\lambda \in \mathbb{C}$ و $\alpha\lambda_j \in \mathbb{C}$. (البته در این تعریف برای سادگی فرض کرده‌ایم اگر $i > n$ آنگاه $\lambda_i = o$ باشد).

اکنون برای تعریف جمع چنین عمل می کنیم که اگر $a = \lambda r + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ و $b = \mu r + \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$ اعضای $\mathcal{A}$ باشند و $m \geq n$ آنگاه:

$$a + b = (\lambda + \mu)r + \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j + \mu_j)e_j$$

که به وضوح این حاصل‌جمع نیز در $\mathcal{A}$ قرار دارد.

ضرب را نیز چنین تعریف می نماییم که برای a و b موجود در تعریف داریم:

$$ab = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j e_j = or + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j e_j$$

که بوضوح $ab \in \mathcal{A}$ ودر نهایت نرم روی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \|a\| &= \|\lambda r + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| \\ &= max\{(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}, |\lambda - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j|\} \end{aligned}$$

با توجه به اعمال تعریف شده می توان دید که $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ است.

همچنین نشان داده شده که $\mathcal{A}$ یک رادیکال به صورت $\mathbb{C}r$ دارد و همچنین یک ایده آل غیر بسته I دارد چنان‌که:

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}r \oplus I$$

اکنون مشتق d را روی جبر باناخ $\mathcal{A}$ چنین تعریف می کنیم :

$$d(a + \lambda r) = \lambda r$$

جایی‌که $a \in I$ و $\lambda \in \mathbb{C}$.و در این صورت چنین مشتقی یک مشتق غیرکراندار روی جبر $\mathcal{A}$ است.

گزاره ۵.۳.۱. [8] فرض کنید d یک مشتق کراندار روی یک جبر $\mathcal{A}$ باشد و e یک عنصر خودتوان در $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱-داریم $ed(e)e = o$

۲-اگر $ed(e) = (de)e$ آنگاه $d(e) = o$

۳-اگر $\mathcal{A}$ یک عنصر همانی ۱ داشته باشد. آنگاه $d(1) = o$

[8] فصل۲ بخش ۱۸ صفحه۸۷[۱۰]