دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل ـ جبری با روشهای نیمه تحلیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

پژوهشگر

سعیده علی آبادیان

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: علی‌آبادیان   نام: سعیده

عنوان: حل معادلات دیفرانسیل ـ جبری با روشهای نیمه تحلیلی

استاد راهنما: دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور: دکتر علی مس فروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۷۸

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل ـ جبری

چکیده

با توجه به آن‌که بسیاری از مسائل فیزیک با معادلات دیفرانسیل ـ جبری مدل‌بندی می‌شوند، شایسته است که بتوان برای این مسائل جواب‌هایی با دقت بالا یافت. در سال‌های اخیر روش‌های عددی برای حل این معادلات به‌کار گرفته شده است. اما این روش‌ها برای مسائل با اندیس پایین مناسب هستند و برای مسائل با اندیس بالا نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد، پس لازم است برای این مسائل جواب‌هایی با دقت بالا پیدا کرد. در این پایان‌نامه سعی داریم معادلات دیفرانسیل ـ جبری را با روش‌های نیمه‌تحلیلی حل کنیم. به این منظور ابتدا از روش کاهش اندیس برای معادلات دیفرانسیل ـ جبری استفاده نموده، سپس دستگاه حاصل را با روش‌های نیمه‌تحلیلی وردشی، آدومیان و اختلال هموتوپی حل می‌کنیم. روش وردشی دنباله‌ای از توابع را فراهم می‌سازد که به پاسخ دقیق مسئله همگرا است. روش آدومیان و روش اختلال هموتوپی سری نامتناهی تولید می‌کنند که به پاسخ دقیق مسئله همگرا است. نتایج عددی حاصل از مثال‌های مختلف معادلات دیفرانسیل‌ـ جبری اندیس بالا توانایی و مناسب بودن این روش‌ها را نشان می‌دهند.

تقدیم به همه ی کسانی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسرم به پاس گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

سعیده علی آبادیان
۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمه و کاهش اندیس

۱.۱ مقدمه

گاهی در رشته‌های علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و $\cdots$ ضرورت پیدا می‌کند که برای بیان مسئله معینی مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدل‌های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغییرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر می‌باشد

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = \circ,$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه n نامیده می‌شود که رابطه‌ای بین متغییر مستقل x و تابع $y(x)$ و n مشتق اول آن $(y', y'', \cdots, y^{(n)})$ است. حال اگر همین معادلات دارای شرایطی باشند یا به طرقی مختلف مقید شده باشند، آنگاه مدل ریاضی آنها علاوه بر معادلات دیفرانسیل، شامل معادلات جبری برای توصیف این قیدها است. به‌این دسته معادلات، معادلات دیفرانسیل ـ جبری می‌گویند. حالت کلی این معادلات به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = \circ \\ g(x, y, \cdots, y^{(n)}, z) = \circ. \end{cases} \tag{۱.۱}$$

۲.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۸۴ گی‌یر [۱] و پتزولد [۲]، کارایی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی را در حل معادلات دیفرانسیل‌ـ جبری، بررسی نموده و ثابت کردند که تمامی معادلات دیفرانسیل‌ـ جبری با اندیس

[۱] Gear
[۲] Petzold

نابیشتر از ۱ و معادلاتی با ضرایب ثابت و اندیس دلخواه، با روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی حل پذیرند.
در سال ۱۹۸۸ گی‌یر روشی را برای کاهش اندیس مسئله ارائه کرد. در این روش یک معادله دیفرانسیل- جبری با اندیس بالا، می‌تواند با تکرار مشتق‌گیری از معادلات قید، به یک معادله دیفرانسیل- جبری با اندیس ۱ یا به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود.
در سال ۱۹۹۶ آشر [۳] و لین [۴] روش منظم‌سازی دنباله‌ای را برای معدلات دیفرانسیل- جبری خطی با اندیس ۲ ارائه کردند.
در سال ۲۰۰۳ بابلیان [۵] و حسینی [۶] روشی را برای کاهش اندیس معادلات دیفرانسیل- جبری معرفی کردند و در سال ۲۰۱۰ قوتمند [۷] این روش را گسترش داد.

۳.۱ کاهش اندیس

هر معادله دیفرانسیل - جبری یک اندیس دارد. اندیس‌ها نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری دارند.

تعریف ۱.۳.۱. به تعداد مشتقات لازم به‌منظور تعیین منحصر به‌فرد y' بر حسب y و t اندیس معادلات دیفرانسیل- جبری می‌گویند.

برای مثال معادلات دیفرانسیل - جبری

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= y_1(t) + r_1(t), \\ 0 &= -y_2(t) + r_2(t), \end{aligned}$$

اندیس دو دارد. زیرا با مشتق‌گیری اول داریم:

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= y_1'(t) + r_1'(t), \\ 0 &= -y_2'(t) + r_2'(t), \end{aligned}$$

پس

$$y_2'(t) = r_2'(t), \quad \Rightarrow r_2'(t) = y_1(t) + r_1(t),$$

[۳] Asher
[۴] Lin
[۵] Babolian
[۶] Hosseini
[۷] Ghovatmand

و با مشتق‌گیری دوم داریم:

$$y_2''(t) = r_2''(t), \quad y_1'(t) = r_2''(t) - r_1'(t),$$

پس مسئله اندیس دو دارد.

بسیاری از مسائلی که با آنها روبه‌رو هستیم اغلب دارای اندیس بالایی می‌باشند و حل کردن این مسائل به‌سادگی امکان پذیر نیست. بنابراین لازم است با روش‌هایی اندیس این معادلات را کاهش داد.

برای توضیح این روش مسئله خطی یا خطی شده زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} X^{(m)} &= \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} + By + q, \\ 0 &= CX + r, \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که A_j، B و C توابع هموار از t روی $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$ هستند و $A_j(t) \in R^{n\times n}$ برای $j = 1\dots m$، $B(t) \in R^{n\times 1}$ و $C(t) \in R^{1\times n}$ برای $n \geq 2$ هستند و $C(t)B(t)$ برای هر t نامنفرد است. $q(t) \in R^n$ و $r(t) \in R$ عبارات ناهمگن هستند. می‌دانیم

$$CB(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i b_i)(t) \neq 0, \qquad \forall t \in [0, t_f],$$

بنابراین از نامنفرد بودن CB استفاده کرده و معادله (۲.۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(CB)^{-1} X^{(m)} - (CB)^{-1} \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - (CB)^{-1} By - (CB)^{-1} q = 0.$$

با ضرب کردن C داریم:

$$(CB)^{-1} C X^{(m)} - (CB)^{-1} C \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - (CB)^{-1} CBy - (CB)^{-1} Cq = 0.$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

$$(B)^{-1} X^{(m)} - (B)^{-1} \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - y - (B)^{-1} q = 0.$$

حال y را در معادله (۲.۱) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned} X^{(m)} &= \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} + B(CB)^{-1} C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - q] + q, \\ CX + r &= 0. \end{aligned}$$

پس

$$X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - B(CB)^{-1} C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - q] - q = 0,$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$[X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - q][I - B(CB)^{-1}C] = 0,$$

بنابراین

$$[I - B(CB)^{-1}C][X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - q] = 0, \tag{۳.۱}$$

$$CX + r = 0.$$

حال با استفاده از قضیه زیر دستگاه (۳.۱) به دستگاهی با n معادله و n مجهول با اندیس ۱ تغییر شکل خواهد داد.

قضیه ۲.۳.۱. *دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری (۲.۱) با اندیس $m+1$ و $n = 2$ هم‌ارز معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس m زیر است*

$$E_m X^m + E_{m-1} X^{m-1} + \cdots + E_1 X' + E_0 X = \hat{q}, \tag{۴.۱}$$

به‌طوری‌که

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_1 a_{21}^{(1)} - b_2 a_{11}^{(1)} & b_1 a_{22}^{(1)} - b_2 a_{12}^{(1)} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(2)} - b_1 a_{21}^{(2)} & b_1 a_{22}^{(2)} - b_2 a_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

$$E_{m-1} = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(m)} - b_1 a_{21}^{(m)} & b_1 a_{22}^{(m)} - b_2 a_{12}^{(m)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_m = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} b_2 q_1 - b_1 q_2 \\ -r \end{bmatrix}, \quad y = B(CB)^{-1}C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^{m} A_j X^{(j-1)} - q],$$

و

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} \\ a_{21}^{(j)} & a_{22}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۵] آمده است. □

در مورد $n > 2$، برای تغییر شکل دستگاه فرامعین (۳.۱) به دستگاه رتبه‌کامل با اندیس m به یک شرط دیگر در مسئله (۲.۱) نیاز داریم. ماتریس $M_{n\times n}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M = \sum_{i=0}^{n} c_i b_i (I - B(CB)^{-1}C), \tag{۵.۱}$$

و lامین سطر و (l,s)امین عنصر از ماتریس M به‌صورت $M[l]$ و $M[l,s]$ مشخص می‌شود که در آن $s \leq n$ و $1 \leq l$.

قضیه ۱.۳.۳. *مسئله (۱.۲) برای $n > ۲$ را در نظر بگیرید، اگر*

$$\exists k; ۱ \leq k \leq n, \qquad c_k(t) \neq ۰, \qquad \forall t \in [۰, t_f], \tag{۱.۶}$$

آنگاه kامین سطر ماتریس $I - B(CB)^{-۱}C$ به‌دیگر سطرها وابسته است.

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است. □

حال اگر $\overline{M}$ با حذف کردن kامین سطر M بدست آید در این صورت دستگاه فرامعین (۱.۳) می‌تواند به دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری با n معادله و n مجهول زیرتبدیل شود

$$\begin{aligned} &\overline{M}[X^{(m)} - \sum_{j=۱}^{m} A_j X^{(j-۱)} - q] = ۰, \\ &CX + r = ۰. \end{aligned} \tag{۱.۷}$$

باید نشان دهیم دستگاه رتبه‌کامل است و اندیس یک دارد.

قضیه ۱.۳.۴. *اگر $F = \begin{bmatrix} \overline{M} \\ c \end{bmatrix}$ و k از (۱.۶) بدست آمده باشد، آنگاه*

$$|detF(t)| = |c_k(t)|| \sum_{i=۱}^{n} (c_i b_i)(t)|^{(n-۱)}, \qquad \forall t \in [۰, t_f].$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است. □

حال قضیه (۱.۳.۲) و (۱.۳.۳) و دستگاه (۱.۳) می‌توانند به دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری، با n معادله و n مجهول زیر تغییر شکل دهند

$$\begin{aligned} &\overline{M}[X^{(m)} - \sum_{j=۱}^{m} A_j X^{(j-۱)} - q] = ۰, \\ &CX + r = ۰, \end{aligned}$$

که

$$\begin{bmatrix} \overline{M} \\ ۰ \end{bmatrix} X^{(m)} + \begin{bmatrix} -\overline{M}A_m \\ ۰ \end{bmatrix} X^{(m-۱)} + \cdots + \begin{bmatrix} -\overline{M}A_۱ \\ c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \overline{M}q \\ -r \end{bmatrix},$$

یا

$$E_m X^{(m)} + E_{m-۱} X^{(m-۱)} + \cdots + E_۱ X' + E_۰ X = \hat{q}. \tag{۱.۸}$$

قضیه زیر اندیس m را به اندیس یک تبدیل می‌کند.

قضیه ۱.۳.۵. *دستگاه (۱.۸) با اندیس m هم‌ارز مسئله اندیس ۱ زیر است*

$$F_mX^{(m)} + F_{m-1}X^{(m-1)} + \cdots + F_1X' + F_0X = \hat{q}^{(m-1)}.$$

که

$$F_m = \begin{bmatrix} \overline{M} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} -\overline{M}A_{i+1} \\ \binom{m-1}{m-1-i} c^{(m-1-i)}(t) \end{bmatrix}, \qquad i = m-1, \cdots, 1, 0.$$

که $c^k(t)$ و $\hat{q}^k(t)$ مشتق‌های مرتبه kام هستند و $k = 0, 1, \cdots, n$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ضرایب دو جمله‌ای نیوتن هستند.

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۵] آمده است. □

نتیجه ۱.۳.۶. *دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری $(m+1)$ اندیس (۱.۲) با $n = 2$ هم‌ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس ۱ زیر است*

$$\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^{(m)} + \begin{bmatrix} b_2a_{11}^{(m)} - b_1a_{21}^{(m)} & b_1a_{22}^{(m)} - b_2a_{12}^{(m)} \\ \binom{m-1}{0} c_1(t) & \binom{m-1}{0} c_2(t) \end{bmatrix} X^{(m-1)} + \cdots$$
$$+ \begin{bmatrix} b_2a_{11}^{(1)} - b_1a_{21}^{(1)} & b_1a_{22}^{(1)} - b_2a_{12}^{(1)} \\ \binom{m-1}{m-1} c_1^{(m-1)}(t) & \binom{m-1}{m-1} c_2^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} X = \hat{q}(t)^{(m-1)}.$$

برای سادگی قضیه (۱.۳.۲) را برای مسئله اندیس ۲ با $n = 2$ و $k = 1$ به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۷. *دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس ۲ مسئله (۱.۲) را با $n = 2$ ملاحظه کنید. دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس ۲، هم‌ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس ۱ زیر است*

$$E_1X' + E_0X = \hat{q}, \tag{۱.۹}$$

که

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_1a_{21} - b_2a_{11} & b_1a_{22} - b_2a_{21} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{bmatrix} b_2q_1 - b_1q_2 \\ -r \end{bmatrix},$$

$$Y = (CB)^{-1}C[X' - AX - q]. \tag{۱.۱۰}$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است. □

و همچنین قضیه (۱.۳.۵) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

قضیه ۸.۳.۱. *دستگاه (۲.۱) با اندیس ۲، $n=3$ و $k=2$ را در نظر بگیرید. این مسئله هم‌ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل ـ جبری اندیس ۱ به‌صورت زیر است*

$$\begin{bmatrix} \overline{M} \\ 0 \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} -\overline{M}A \\ C \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \overline{M}q \\ -r \end{bmatrix}, \tag{۱۱.۱}$$

که

$$M = \begin{bmatrix} b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31} & b_{12}b_{31} - b_{11}b_{32} & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{bmatrix}_{1\times 3},$$

و

$$Y = (CB)^{-1}C[X' - AX - q].$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است. □

۴.۱ مثال‌ها

مثال ۱.۴.۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1'' = -vx_1' + (v - \frac{1}{2-t})x_1 + (2-t)vy + q_1(t), & 0 \le t \le 1, \\ x_2'' = x_2' + \frac{v}{2-t}x_1' + \frac{v-1}{2-t}x_1 - x_2 + (v-1)y + q_2(t), \\ 0 = (t+2)x_1 + (t^2-4)x_2 + r(t), \end{cases}$$

و

$$q(t) = \begin{bmatrix} (\frac{t-3+vt-2v}{t-2})e^t \\ (\frac{t-2+v}{t-2})e^t \end{bmatrix}, \qquad r(t) = -(t^2+t-2)e^t,$$

که مقادیر اولیه $x_1(0) = x_2(0) = 1$ و جواب‌های واقعی $x_1 = e^t$، $x_2 = e^t$ و $y = \frac{-e^t}{t-2}$ و $v = 100$ می‌باشند.

مسئله اندیس ۳ دارد. حال با استفاده از نتیجه (۶.۳.۱) آن را به دستگاهی با اندیس ۱ تبدیل می‌کنیم. پس داریم:

$$E_2X'' + E_1X' + E_0X = \hat{q}',$$

که

$$E_2 = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2a_{11}^{(2)} - b_1a_{21}^{(2)} & b_1a_{22}^{(2)} - b_2a_{12}^{(2)} \\ \binom{1}{0} c_1(t) & \binom{1}{0} c_2(t) \end{bmatrix},$$

و

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_2a_{11}^{(1)} - b_1a_{21}^{(1)} & b_1a_{22}^{(1)} - b_2a_{12}^{(1)} \\ \binom{1}{1} c_1'(t) & \binom{1}{1} c_2'(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{bmatrix} b_2q_1 - b_1q_2 \\ -r \end{bmatrix},$$

با توجه به صورت مسئله در می‌یابیم که

$$A_1 = \begin{bmatrix} v - \frac{1}{2-t} & 0 \\ \frac{v-1}{2-t} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -v & 0 \\ \frac{v}{2-t} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (2-t)v \\ v-1 \end{bmatrix},$$

و

$$C^T = \begin{bmatrix} t+۲ \\ t^۲-۴ \end{bmatrix}.$$

حال با جایگذاری در روابط بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} v-۱ & v(t-۲) \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱'' \\ x_۲'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v-۲v^۲ & (۲-t)v \\ t+۲ & t^۲-۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱' \\ x_۲' \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{۱-v}{۲-t} & (t-۲)v \\ ۱ & ۲t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۲-t)\frac{t-۲+v}{t-۲} - (v-۱)\frac{t-۳+vt-۲v}{t-۲} \\ ۲t+۱ \end{bmatrix}.$$

مثال ۲.۴.۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_۱'' = x_۱ - x_۲ - \cos(t), & ۰ \leq t \leq ۱, \\ x_۲'' = x_۲ + y - \sin(t), \\ ۰ = x_۱ + x_۲ - e^t - e^t \sin(t), \end{cases}$$

که مقادیر اولیه $x_۱(۰) = ۱$، $x_۲(۰) = ۰$ و جواب‌های واقعی $x_۱ = \cos(t)$، $x_۲ = \sin(t)$ و $y = e^t \cos(t)$ می‌باشند.

مسئله اندیس ۲ دارد. حال با استفاده از قضیه (۷.۳.۱) آن را به دستگاهی با اندیس ۱ تبدیل می‌کنیم. پس داریم:

$$E_۱ X' + E_۰ X = \hat{q},$$

که

$$E_۱ = \begin{bmatrix} b_۲ & -b_۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad E_۰ = \begin{bmatrix} b_۱ a_{۲۱} - b_۲ a_{۱۱} & b_۱ a_{۲۲} - b_۲ a_{۲۱} \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix},$$

و

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} b_۲ q_۱ - b_۱ q_۲ \\ -r \end{bmatrix},$$

با توجه به صورت مسئله در می‌یابیم که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix},$$

و

$$q(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad r(t) = -(e^t + e^t \sin(t)),$$

حال با جایگذاری در روابط بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱' \\ x_۲' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ e^t + e^t \sin(t) \end{bmatrix}.$$

فصل ۲
روش تکرار وردشی

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی و توضیح یک روش تکراری به‌نام روش تکرار وردشی که یک روش نیمه‌تحلیلی است، می‌پردازیم. این روش یک دنباله از توابع ایجاد می‌کند که به سری جواب دقیق مسئله همگرا است. در ادامه از این روش برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل ـ جبری استفاده می‌کنیم. بنابراین ابتدا از روش کاهش اندیس ارائه شده در فصل قبل استفاده کرده و دستگاه بدست آمده را با روش تکرار وردشی حل می‌کنیم.

۲.۲ مبانی روش تکرار وردشی

روش تکرار وردشی می‌تواند به‌آسانی و با دقت بالا برای حل دسته وسیعی از مسئله‌های خطی و غیر خطی به‌کار رود و جواب آنها به‌طور تقریبی و با سرعت همگرایی بالا، به جواب دقیق تعیین شود. این روش یک اصلاح از روش ضریب لاگرانژ پشنهاد شده توسط اینکاتی [۱] می‌باشد. در این روش دستگاه غیر خطی عمومی

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t), \qquad (۱.۲)$$

را در نظر می‌گیریم که L عملگر خطی و N عملگر غیر خطی و $g(t)$ یک تابع پیوسته است. تابع اصلاح‌گر

$$u_{n+۱}(t) = u_n(t) + \int_{۰}^{t} \lambda \left\{ L u_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s) \right\} \mathrm{d}s, \qquad (۲.۲)$$

معرفی می‌شود که λ ضریب لاگرانژ، u_n، nامین تقریب جواب و $\tilde{u}_n$ متغییر محدود است، به‌عبارت دیگر $\delta\tilde{u}_n = ۰$. در این روش برای یافتن جواب ابتدا ضریب لاگرانژ λ باید طوری انتخاب شود که تابع اصلاح‌گر

[۱] Inokuti

پایا باشد. یعنی $\delta u_{n+1}(u_n(t),t)=0$. پس با استفاده از هر تابع اولیه انتخاب شده u_0 و ضریب لاگرانژ محاسبه شده λ، تقریب‌های متوالی u_n برای $n\geq 0$ بدست می‌آید. حال با حدگیری از این دنباله بدست آمده یعنی $\lim_{n\to\infty}u_n$، جواب u بدست می‌آید. برای مسئله خطی، جواب دقیق می‌تواند تنها با یک گام تکرار حاصل شود، چون ضریب لاگرانژ به‌طور دقیق مشخص می‌شود. برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید

$$u''+\omega^2u(t)=F(u,u',u''),$$

تابع اصلاح‌گر آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_0^t\lambda\left\{u_n''(s)+\omega^2u_n(s)-\tilde{F}(u,u',u'')\right\}\mathrm{d}s.$$

توجه کنید که $\delta u_n(0)=0$ پس

$$\delta u_{n+1}(t)=\delta u_n(t)+\delta\int_0^t\lambda(s)\left\{u_n''(s)+\omega^2u_n(s)-\tilde{F}(s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$=\delta u_n(t)+\lambda(s)\delta u_n'(s)|_{s=t}-\frac{\partial\lambda}{\partial s}\delta u_n(s)|_{s=t}+\int_0^t\left\{\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}+\omega^2\lambda(s)\right\}\delta u_n(s)\mathrm{d}s$$

$$=(1-\frac{\partial\lambda}{\partial s})\delta u_n(s)|_{s=t}+\lambda(s)\delta u_n'(s)|_{s=t}+\int_0^t\left\{\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}+\omega^2\lambda(s)\right\}\delta u_n(s)\mathrm{d}s=0.$$

با استفاده از شرط پایداری داریم:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}+\omega^2\lambda(t,s)=0,\\ 1-\frac{\partial\lambda(t,s)}{\partial s}|_{s=t}=0,\\ \lambda(t,s)|_{s=t}=0,\end{cases}$$

ضریب لاگرانژ $\lambda=\frac{1}{\omega}\sin\omega(s-t)$ است. در نتیجه فرمول تکراری زیر را بدست می‌آوریم

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_0^t\frac{1}{\omega}\sin\omega(s-t)\left\{u_n''(s)+\omega^2u_n(s)-\tilde{F}(u,u',u'')\right\}\mathrm{d}s.$$

با فرض $u_0(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ با ثابت‌های مناسب c_1 و c_2 تقریب اولیه به‌صورت زیر است

$$u_1(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t-\frac{1}{\omega}\int f(s)\sin\omega(s-t)\mathrm{d}s,$$

که حل عمومی مسئله می‌باشد.

توجه داریم که هرچه ضریب لاگرانژ با دقت بالاتری انتخاب شود، همگرایی جواب تقریبی به جواب واقعی سریع‌تر رخ می‌دهد. برای مثال سیستم خطی $u''(t)+\omega u(t)$ را در نظر بگیرید، تابع اصلاح‌گر آن به‌صورت زیر است

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_0^t\lambda\left\{u_n''(s)+\omega\tilde{u}_n(s)\right\}\mathrm{d}s.$$

اینجا $\tilde{u}_n$ متغییر محدود است. شرط پایداری را برای تابع اصلاح‌گر بالا به‌کار برده و $\lambda=s-t$ بدست می‌آوریم، بنابراین فرمول تکراری زیر بدست می‌آید

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_0^t(s-t)\left\{u_n''(s)+\omega\tilde{u}_n(s)\right\}\mathrm{d}s.$$