بسم الله الرحمن الرحيم

فناوري و تحقيقات ، علوم وزارت
آذربايجان مدني شهيد دانشگاه

دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک – گرایش محاسبات کوانتومی

سنجهٔ هندسی متقارن و دینامیک ناسازگاری کوانتومی

استاد راهنما
دکتر اسفندیار فیضی

استاد مشاور
دکتر یحیی اکبری

پژوهشگر
مسعود ابوالفتحی‌یار

۱۳۹۱/۱۱
تبریز/ایران

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه

تاریخ صدور ۱۳۹۱/۱۱/۱۶-۱۵:۴۷

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
اداره کل تحصیلات تکمیلی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱

دفاع، روز **دوشنبه** تاریخ **۱۳۹۱/۱۱/۱۶**

۸۹۱۸۱۱۳۲۳

اعضای هیات داوران نسخه نهایی پایان نامه

دانشـــجو **آقای ابوالفتحی یار-مسعود**

تحت عنوان **سنجه هندسی متقارن و دینامیک ناسازگاری کوانتومی**

را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده ، پذیرش آن را جهت نیل به درجه **کارشناسی ارشدناپیوسته** مورد تایید قرار دادند .

اعضای هیات داوران :

	نام خانوادگی و نام	مرتبه علمی	
استاد راهنما	: **فیضی آقا کندی - اسفندیار**	**استادیار**	امضاء
استاد مشاور	: **اکبری - یحیی**	**استادیار**	امضاء
داور پایان نامه	: **فصیحی - محمد علی**	**مربی**	امضاء
نماینده تحصیلات تکمیلی	: **دارابی - فرهاد**	**استاد**	تاریخ و امضاء ۹۱/۱۱/۱۶

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

صورتجلسه نتیجه دفاع

تاریخ صدور ۱۳۹۱/۱۱/۱۶-۱۵:۴۶

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

اداره کل تحصیلات تکمیلی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱

دفاع، روز دوشنبه تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۱۶

طبق درخواست شماره ۲۶۰۰/۷۲۵۷ مورخ ۹۱/۱۱/۱۳ تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه

و مجوز شماره ۵۱۷/ح مورخ ۹۱/۱۱/۱۳ تحصیلات تکمیلی دانشگاه، جلسه

دانشجو آقای ابوالفتحی یار-مسعود به شماره دانشجویی ۸۹۱۸۱۱۳۲۳

در رشته فیزیک

تحت عنوان **سنجه هندسی متقارن و دینامیک ناسازگاری کوانتومی**

به ارزش واحد، در ساعت ۱۴:۰۰ مورخ ۱۳۹۱/۱۱/۱۶ در حضور هیات داوران مرکب از :

	نام خانوادگی و نام	مرتبه علمی		
استاد راهنما	: فیضی آقا کندی - اسفندیار	استادیار	امضاء	
استاد مشاور	: اکبری - یحیی	استادیار	امضاء	
داور پایان نامه	: فصیحی - محمد علی	مربی	امضاء	
نماینده تحصیلات تکمیلی	: دارابی - فرهاد	استاد	تاریخ و امضاء	۹۱/۱۱/۱۶

برگزار شد و با درجه عالی نمره نوزده و یک صحیح ارزشیابی گردید .

مدیر محترم گروه آموزشی

مهر و امضاء

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

مهر و امضاء

دانشکده علوم پایه

چکیده

طـی ایـن کـار، راهکارهـایی جهـت یـافتن سـنجه هندسـی متقـارنی بـرای همبسـتگی کوانتـومی ارائـه مـی-شـود کـه بصـورت فاصـله HS میـان حالـت معلـوم و حالـت منـزوی MICC (کـه از اثـر عملگـر تصـویر روی حالـت دوجزئـی حاصـل مـی شـود) تعریـف مـی شـود. همچنـین سیسـتم هـای دو کیـوبیتی بـا روش سـاده ای بهینـه خواهنـد شـد کـه از آن جملـه کـاهش بهینـه دوطرفـه بـه یکطرفـه اسـت و نیـز نتـایجی تحلیلی برای برخی از کلاس های ویژه ی حالت های دو-کیوبیتی ارائه خواهد شد.

بـرای ناسـازگاری نیـز طبـق مرجـع اعـلام شـده بـا روشـی مسـتقیما آن را بـرای هـر دو مثـال داده شـده حـل کـرده و در انتهـا دینامیـک همبسـتگی کوانتـومی و نیـز ناسـازگاری کوانتـومی را تحـت اثـر کانـال AD بررسـی کـرده و جنبـه هـای نـه چنـدان بـی اهمیـت مربـوط بـه همبسـتگی را ذکـر خـواهیم کـرد کـه از آن جمله

۱= همبستگی کوانتومی می تواند افزایش یابد ،

۲= همبستگی کوانتومی می تواند به طور ناگهانی تغییر کند.

و چنانچـه کـه گفتـه خواهـد شـد، همبسـتگی کوانتـومی مربـوط بـه محـیط هـا بـا صـفر شـروع شـده و افـزایش میابنـد و بطـور مجـانبی بـه مقـدار همبسـتگی کوانتـومی اولیـه ی سیسـتم هـا تبـدیل مـی شـوند. همچنـین ایـن دیـدگاه را بدسـت مـی آوریـم کـه اگـر مـی نـیمم فاصـله هیلبـرت- اشـمیت راجـع بـه MICC و یا بطور کلی راجع به CC باشد، سنجه‌ی ما یک سنجه‌ی جهت‌دار خواهد بود.

واژگان کلیدی : همبستگی کوانتومی، ناسازگاری کوانتومی، سنجه هندسی .

فـهـرست

فصل اول مقدمه و تاریخچه ۳

مقدمه ٤

تاریخچه ٥

فصل دوم مفاهیم بنیادی ۷

معرفی ناسازگاری کوانتومی ۸

دینامیک کوانتومی ۹

معرفی فاصله هندسی ۱۲

حالت کلاسیکی ۱۲

شباهت دو توزیع احتمال کلاسیکی ۱۳

حالت کوانتومی ۱٤

فصل سوم مفاهیم کاربردی ۲۲

مفهوم اندازه‌گیری و سنجه در مکانیک کوانتومی ۲۳

همبستگی و سنجه‌ی کوانتومی ۲۷

اندازه‌گیری مرتبط با اطلاعات ۲۷

تعریف ریاضی نرم هیلبرت-اشمیت ۳۲

کره بلوخ ۳۳

تریس و تریس جزئی ۳٤

انواع کانال ۳۹

کانال های میرا کننده دامنه (AD) ٤۰

کانال های میراکننده دامنه در دمای غیرصفر ٤٤

کانال بیت-برگردان ٤٥

کانال فاز-برگردان ٤۷

کانال واقطبش ٤۷

کانال میرا کننده فاز ٥۰

عملگر کراوس ٥۱

فصل چهارم مقایسه دینامیک سنجه هندسی با دینامیک ناسازگاری کوانتومی ٥٤

حالت MICC و سنجه هندسی ٥٦

ابزار و تعاریف مورد نیاز سنجه هندسی ٥۸

دانسیته هیلبرت-اشمیت ۵۸
کانال کوانتومی استفاده شده ٦٢
سنجه هندسی همبستگی کوانتومی ٦٦
ابزار و تعاریف مورد نیاز ناسازگاری کوانتومی ۷۹
ابزار و روش بدست آوردن ناسازگاری کوانتومی ۸۲
دینامیک همبستگی کوانتومی و ناسازگاری کوانتومی ۹۰
شرح مختصری از کل کار انجام شده ۹۵

فهرست نمودارها

نمودار ۱و۲ ..... ۹۲
نمودار ۳و٤ ..... ۹۳
نمودار ۵و٦ ..... ۹٤

فهرست اشکال

شکل ۱ ..... ۱۹
شکل ۲ ..... ۲۱
شکل ۳ ..... ۲۸
شکل ٤ ..... ۳۲
شکل ۵ ..... ٤۳
شکل ٦ ..... ٤٦
شکل ۷ ..... ٤۹
شکل ۸ ..... ۵۲

منابع **۹٦**

فصل اول

مقدمه و تاریخچه

فصل اول: مقدمه

۱-۱.مقدمه

طی چند سال اخیر ثابت شده است که کامپیوترهای کوانتومی به عنوان ابزاری قدرتمند برای محاسبات در کانون توجهات فیزیکدانان (چه نظری چه کاربردی) و مهندسان قرار گرفته است. توانایی کار این کامپیوترها طوری است که کامپیوتر های کلاسیکی از عهده آن برنمی‌آیند.

این کامپیوترها متکی به برخی از اصول و قوانین کوانتومی همچون دامنه احتمال مختلط، تداخل کوانتومی، توازی کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی و یکانی بودن تحول کوانتومی هستند.

کامپیوترهای کلاسیکی ماشین هایی هستند که تعداد مشخصی از اطلاعات را خوانده و بصورت صفر و یک رمز گاری کرده پردازش مربوطه را اعمال کرده و در پایان خروجی پردازش را بصورت صفر و یک چاپ می کند.پردازش اطلاعات بصورت یک سلسله توابع پشت سر هم بروی یک رشته ورودی با طول معین انجام می شود که این توابع را اصطلاحا گیت می نامند.

ولی با گذشت زمان دانشمندان کامپیوتر و فیزیکدانان متوجه شدند که با پیشرفت تکنولوژی مدارهای موجود بروی تراشه ها بصورت اتمی خواهد شد(بطوریکه کاهش سایز با کاهش فاصله طی شده و در نتیجه با افزایش سرعت انتقال اطلاعات متناظر است) و در این صورت اثرات کوانتومی آشکار خواهند شد و فیزیک کلاسیک نمی تواند چنین سیستمی را توصیف کند.

ر.پ.فاینمن اولین کسی بود که اثرات مکانیک کوانتومی را بروی محاسبات بیان کرد.او معتقد بود که پدیده های کوانتومی نمی توانند بطور مؤثر روی کامپوترهای کلاسیکی شبیه سازی بشوند ونیز استدلال کرده بود که سیستم های کوانتومی برای شبیه سازی کردن سیستم های کوانتومی دیگر ،بسیار مجهزترند.

مکانیسم عملی کامپیوترهای کوانتومی نیز همانند کامپیوترهای کلاسیکی خود از سه بخش ورودی، محاسبات و خروجی تشکیل یافته اند.در بخش محاسباتی از روشهای محاسباتی درهم تنیدگی و یا روش های محاسباتی ناسازگاری کوانتومی استفاده می شود که ما در اینجا به روش های محاسباتی ناسازگاری کوانتومی خواهیم پرداخت.

۱-۲.تاریخچه

کامپیوترهای اولیه علاوه بر داشتن وزن زیاد ، حجم بسیار زیادی هم داشتند و برای نگهداری آنها یک ساختمان چند طبقه لازم بود.ولی با این وجود توانایی آنها هزاران بار کمتر از کامپیوترهای امروزی بود . با اختراع ترانزیستورهای نیمه هادی در سال ۱۹۵۹ که نسبت به لامپ های خلأ بسیار کوچکتر و به نحو چشمگیری کارآمدتر بودند، دیگر از لامپ های خلأ استفاده نشد و به ویژه آنکه ترانزیستورها پس از سال ها استفاده خراب هم نمی شدند. ولی مسأله به اینجا ختم نشد و با اختراع مدارهای مجتمع[۱](IC) که با ابعاد چند میلیمتری می توانستند هزاران ترانزیستور را در خود جای دهند، بازهم نسل جدید کامپیوترها کوچکتر و پیشرفته تر و البته سریع تر شد.

وقتی اندازه ترانزیستورها به ابعاد اتمی نزدیک می شود، دیگر قوانین حاکم بر فیزیک کلاسیک بر رفتار اتم ها حاکم نیست.به طور مثال کسی نمی داند یک الکترون در زمان مشخصی دقیقا در کجا قرار دارد یا کسی نمی تواند به درستی تشخیص دهد که الکترون در یک سیم به کجا می رود. یعنی وقتی به ابعاد اتمی نزدیک می شویم، فیزیک کوانتومی رفتار اتم ها را توضیح می دهد و دیگر قوانین کلاسیکی کاربرد ندارد. در واقع کامپیوترهای نسل آینده با استفاده از فناوری های میکروسکوپی ذره ها کار می کنند.به طور مثال در مورد الکترون از خاصیت اسپین آنها استفاده می شود، در تابش از خاصیت پولاریزاسیون و به همین دلیل است که سرعت این کامپیوترها با کامپیوترهای امروزی قابل مقایسه نیست. بر اساس الگوریتم کوانتومی می توان با استفاده از کامپیوترهای کوانتومی یک عدد را با سرعت فوق العاده ای به مقسوم علیه های آن تجزیه کرد. اگر برای انجام عمل ریاضی مشابهی از کامپیوترهای فعلی استفاده کنیم، با افزودن هر رقم به عدد مورد نظر سرعت کامپیوتر برای حل مسئله به نصف کاهش می یابد.در کامپیوتر ها از یک دستور ساده گرفته تا یک سیستم عامل، همه در نهایت بصورت رشته هایی از صفر و یک در می آیند. این رشته ها می توانند روی هارد کامپیوتر شما یا دیسک فشرده و حتی موبایلتان ذخیره شود. کوچکترین واحد ذخیره اطلاعات بیت[۲] نام دارد که یک واحد مغناطیسی است که بسته به جهت مغناطیس می تواند صفر یا یک باشد.اما در کامپیوتر های کوانتومی وضعیت به شکل دیگری است یعنی صفر و یک ها جای خود را از میدان مغناطیسی به یک خصوصیت کوانتومی به نام "اسپین[۳] " می دهند.

اسپین را می توان به جهت چرخش یک ذره تشبیه کرد.مثلا بنا بر قوانین کوانتومی از دو الکترون در اتم هلیم، اگر یکی اسپین مثبت باشد دیگری حتما اسپین منفی است. در نتیجه می تواند ابزار بسیار مناسبی برای ذخیره سازی صفر و یک باشد.بنابراین در کامپیوترهای آینده به کوچکترین واحد ذخیره اطلاعات "کیوبیت[٤]

---

۱. Integrated Circuits
۲. Bit
۳. Spin
٤. Qubit

" می گویند. از همه مهمتر اینکه هر بیت در حالت کلاسیک خود در یک لحظه مشخص فقط می تواند یک حالت صفر یا یک داشته باشد.در صورتی که در کوانتوم، یک کیوبیت می تواند در یک زمان مشخص حاوی هردو حالت صفر و یک باشد.

در سال ۱۹۸۱ فیزیکدان آزمایشگاه Argonne National، اولین تئوری کاربردی نظریه کوانتومی در کامپیوترها را تحت عنوان "پل بنیوف[۵] " منتشر کرد که این ایده، تولید یک ماشین تورینگ[۶] کوانتومی بود.ماشین تورینگ به یک ماشین حالات متناهی اطلاق می شود که در آن با وقوع هر عبور یک نماد بروی نوار چاپ می شود.

به لحاظ تاریخی، فیزیکدان مشهور "ریچارد فاینمن[۷] " در زمره اولین افرادی بود که در سال ۱۹۸۲ با ارائه مدلی انتزاعی برای چگونگی محاسبات مبتنی بر اصول کوانتوم مکانیک،در جستجوی نوع جدیدی از نسل کامپیوترها که طبق اصول کوانتومی کار کنند،بود.زیرا که مکانیسم کامپیوترهای فعلی علارغم این همه پیشرفت، با کامپیوترهای ۵۰ سال قبل تفاوتی ندارد.

---

۵. Paul Benioff
۶. Turing machine
۷. Richard Phillips Feynman

فصل دوم

مفاهیم بنیادی

۲-۱.معرفی ناسازگاری کوانتومی[۸]

ناسازگاری کوانتومی یک اندازه گیری غیر کلاسیکی از همبستگی میان دو زیر سیستم در یک سیستم کوانتومی است و معین می کند که چه مقداری از یک سیستم می تواند مختل شود [٦].

ناسازگاری کوانتومی اولین بار توسط Zurek و Ollivier به عنوان سنجه ای برای همه همبستگی های غیر کلاسیکی معرفی شد که در بسیاری از زمینه های فیزیکی مورد استفاده قرار گرفت.از جمله کاربردهای آن در محاسبات کوانتومی با یک کیوبیت خالص، بازدهی کوانتومی چرخه کارنو، تعیین گذار فاز کوانتومی در دماهای محدود برای سیستم های فیزیکی معین و نیز بهینه سازی فرایند Search Grover با کارایی آزمایش NMR می‌باشد. دو نکته حائز اهمیت برای ناسازگاری کوانتومی این است که، در مطالعه ناسازگاری کوانتومی برای دینامیک اتلافی به صورت آزمایشگاهی و تئوری، به عنوان ابزار محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱].

از خواص ناسازگاری کوانتومی می توان به ۱-غیر متقارن بودنش ،۲-همیشه مثبت بودنش ،۳-ثابت بودنش تحت تبدیلات موضعی یکانی اشاره کرد که تقریبا هرسه بخاطر ورود آنتروپی شرطی در تعریفاتش می باشد [۷].

البته در ناسازگاری کوانتومی بدست آوردن جواب های تحلیلی راحت نیست و از جمله راه های فرار از این

سختی ،سنجه هندسی ناسازگاری کوانتومی(GMQD)[۹] است که شبیه به همان سنجه هندسی درهم تنیدگی[۱۰] است که بصورت نزدیکترین فاصله میان حالت درنظر گرفته شده با حالتی که ناسازگاریش صفر است، تعریف می‌شود. در اصل دو تفسیر برای اندازه گیری هندسی ناسازگاری کوانتومی وجود دارد که در اولی از مفهوم روابط آنتروپی برای یک فاصله اندازه گیری همبستگی استفاده شده است ولی دومی با نرم هیلبرت-

---

۸. Quantum Discord

۹ . Geometric Measure Of Quantum Discord

۱۰- خاصیتی که اجازه میدهد کیوبیت هایی که از هم بطور باورنکردنی دورند، اندرکنشی با سرعت نامحدود (حتی بیشتر از سرعت نور) داشته باشند.

اشمیت[11] تعریف می‌شود که ناسازگاری مبتنی بر روابط آنتروپی بی فایده است زیرا که بیان تحلیلی آنها فقط برای حالت های کلاسیکی محدود شناخته شده است[۲,۳,۵,۶] .

در این مجموعه اندازه گیری متقارنی از همبستگی کوانتومی بر اساس بعد هیلبرت-اشمیت ارائه می شود و سعی شده است بهینه سازی هایی را اعمال کرده و بیاناتی تحلیلی برای برخی از حالت های ویژه بدست آورده شود.

۲-۲.دینامیک کوانتومی

در درس های مکانیک کوانتومی معمولا گفته می شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\psi>$ ، مطابق با معادله زیر در طول زمان تحول می یابد:

$$|\psi(t)>= U(t)|\psi(0)>$$

که در آن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی برهمکنش بدست می آید ، و البته این رابطه تا موقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالت خاص توصیف شود، در غیر اینصورت، یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نباشد، با یک ماتریس چگالی تعریف می شود. چنانچه در مکانیک آماری نیز مشاهده نمودیم معمولا گفته می شود که ماتریس چگالی مطابق با رابطه زیر متحول می شود:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t) \qquad (1).$$

این تحول زمانی ماتریس چگالی را تنها در یک حالت خاص بیان می کند و آن هنگامی است که برهمکنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و در اغلب موارد دیگر صحیح نیست. برای درک بهتر فرض کنید در لحظه صفر، حالت سیستم را با A نشان می دهیم و محیط آن را با B که به صورت زیراند:

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A \otimes \rho_B$$

حال اگر هامیلتونی سیستم به شکل زیر باشد:

---

۱۱. Hilbert–Schmidt

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B$$

در این صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده زیر خواهد بود:

$$U_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{AB}} = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B)t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t}$$

$$= U_A(t) \otimes U_B(t) \qquad (۲)$$

پس خواهیم داشت:

$$\rho_{AB}(t) = U_{AB}(t)\rho_{AB}(۰)U_{AB}^{\dagger}(t) = \big(U_A(t) \otimes U_B(t)\big)\rho_{AB}\left(U_A^{\dagger}(t) \otimes U_B^{\dagger}(t)\right)$$

$$= \left(U_A(t)\rho_A(۰)U_A^{\dagger}(t)\right) \otimes \left(U_B(t)\rho_B(۰)U_B^{\dagger}(t)\right) \qquad (۳)$$

در نتیجه ماتریس چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با:

$$\rho_A(t) = Tr_B\big(\rho_{AB}(t)\big) = U_A(t)\rho_A(۰)U_A^{\dagger}(t) \qquad (٤)$$

که همان معادله (۱) است. بنابراین ماتریس چگالی سیستم فقط وقتی به این صورت ساده متحول می شود که برهمکنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یا اینکه فوق العاده کوچک باشد.

حال می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهمکنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم. اهمیت این موضوع بدان سبب است که در کامپیوترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سالهای آینده با آنها سروکار خواهیم داشت، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند اتم یا یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستمی برهمکنش‌های درون سیستم به همان اندازه مهم هستند که برهمکنش های بین سیستم و محیط مهمند.

برای اینکه دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در لحظه صفر سیستم در یک حالت $\rho_A(۰)$ و محیط در یک حالت خاص $|e>$ قرار دارد. تحت این شرایط ماتریس چگالی سیستم و محیط در لحظهٔ t برابر خواهد بود با:

$$\rho_A(t) = U(t)(\rho_{AB}(\cdot) \otimes |e><e|)U^{\dagger}(t)$$

که در آن U(t) عملگر تحول سیستم و محیط است . ماتریس چگالی سیستم با محاسبه رد جزئی[۱۲] روی محیط بدست می آید. در نتیجه بدست می آوریم:

$$\rho_A(t) = Tr_B\big(\rho_{AB}(t)\big)$$
$$= Tr_B\big(U(t)(\rho_{AB}(\cdot) \otimes |e><e|)U^{\dagger}(t)\ \big)$$

با کمی محاسبه می توان طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\rho_A(t) = \sum_m M_m \rho_A(\cdot) M_m\ ,$$

که در آن $M_m :=< m|U(t)|e >$ و $\{|m >\}$ پایه های متعامد یکه برای محیط هستند. دقت کنیم که M_m عملگر هایی هستند که روی سیستم اثر می کنند. M_m ها عملگرهای کراوس[۱۳] هستند که طبق تعریفشان (در ادامه ذکر خواهد شد) می‌توان ثابت کرد که $\sum_m M_m^{\dagger} M_m = \mathbb{I}$ که m همان بعد محیط است.

و به این ترتیب است که دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می آید.

۲-۳.معرفی فاصله هندسی

همیشه این احتمال وجود دارد که یک حالت کوانتومی پس از عبور از یک کانال کوانتومی دستخوش تغییر شود و به دلیل نوفه[۱۴] ای که در کانال است با احتمال اولیه‌اش تفاوت پیدا کند. ملاک خوب بودن برای یک کانال و کم بودن نوفهٔ آن این است که برای حالت های ارسالی و دریافتی، تفاوت کم و شباهت آنها زیاد باشد.

---

۱۲. Partial Trace
۱۳. Kraus Operators
۱۴. The Noise

۲-۳-۱.حالت کلاسیکی

فرض کنید که X یک متغیر تصادفی و p_x و q_x دو تابع احتمال مختلف برای یافتن مقدار x از یک متغیر تصادفی باشند. در این صورت فاصله بین این دو تابع توزیع که به آن فاصله کولموگورف[۱۵] نیز می گویند به طریق زیر تعریف می شود:

$$D(p,q) \coloneqq \frac{۱}{۲}\sum_x |p_x - q_x|. \qquad (۱)$$

که این فاصله در خواص بدیهی زیر صدق می کند:

$$D(p,q) = D(q,p)$$

$$D(p,r) \leq D(p,q) + D(q,r)$$

براحتی نیز معلوم می شود که فاصله بین دو تابع توزیع $(p, ۱-p)$ و $(q, ۱-q)$ برابر است با $|p-q|$.

وقتی که تفاوت دو تصویر را می خواهیم با هم مشخص کنیم معمولا سعی می کنیم که بگوئیم در چه نقاطی این دو تصویر با هم فرق دارند و سعی می‌کنیم که حداکثر این تفاوت ها را برشماریم. می توانیم دو تصویر را روی هم قرار دهیم و سطح آن ناحیه هایی را که تفاوت وجود دارد، به عنوان ملاکی از تفاوت این دو تصویر بکار ببریم.

۲-۳-۲.شباهت[۱۶] دو توزیع احتمال کلاسیکی

برای دو تابع توزیع احتمال می توان یک معیار شباهت نیز بصورت زیر تعریف کرد:

۱۵.Andrey Kolmogorov
۱۶. Fidelity

$$F(p,q) \coloneqq \sum_x \sqrt{p_x q_x} \qquad (۳)$$

از نظر ریاضی این معیار چیزی نیست جز ضرب داخلی دو بردار یکهٔ زیر

$$|\tilde{p}> = (\sqrt{p_۱}\sqrt{p_۲}, \dots, \sqrt{p_n})$$
$$|\tilde{q}> = (\sqrt{q_۱}\sqrt{q_۲}, \dots, \sqrt{q_n})$$

یعنی:

$$F(p,q) = \langle\tilde{p}|\tilde{q}\rangle \qquad (٤)$$

۲-۳-۳.حالت کوانتومی[۱۷]

دو حالت کوانتومی ρ و σ را در نظر بگیرید. می خواهیم معیاری برای فاصله میان این دو حالت کوانتومی بدست بیاوریم و یا تعریف کنیم. این معیار نبایستی فقط خواص ریاضی جالبی داشته باشد بلکه می بایست از نظر مفهومی و عملی نیز معنای روشنی داشته باشد. فاصله ای که برای دو حالت کوانتومی درنظر خواهیم گرفت به دو صورت زیر می باشند:

الف)فاصلهٔ رد[۱۸] ب) مشابهت یا فیدلتی

۲-۳-۳-۱. فاصله رد:

۱۷. Quantum State
۱۸. Trace Distance

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2} Tr|\rho - \sigma|,$$

این تعریف، خواص مورد انتظار را برآورده می کند. دقت داشته باشیم که اگر ماتریس های ρ و σ با هم جابجا بشوند، در اینصورت هر دو ماتریس در یک پایه قطری خواهند شد و در نتیجه:

$$\rho = \sum_i r_i |i><i|$$

$$\sigma = \sum_i s_i |i><i|$$

در این صورت:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\, Tr\left|\sum_i (r_i - s_i)|i><i|\right| = D(r_i, s_i) \qquad (٥)$$

بنابراین فاصله بین دو حالت همان فاصله بین دو توزیع احتمالاتی خواهد شد که از ویژه مقدارهای آنها بدست می‌آید. برای دو حالت زیر :

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}.\vec{\sigma}) \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{s}.\vec{\sigma})$$

در کره بلوخ داریم:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}|\vec{r} - \vec{s}| \qquad (٦)$$

اثبات:

$$\rho = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ + r_۳ & r_۱ - ir_۲ \\ r_۱ + ir_۲ & ۱ - r_۳ \end{bmatrix} \ , \ \sigma = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ + s_۳ & s_۱ - is_۲ \\ s_۱ + is_۲ & ۱ - s_۳ \end{bmatrix}$$

$$|\rho - \sigma| = \frac{۱}{۲}|\vec{r} - \vec{s}|$$

و مشاهده می شود که D واقعا خواص یک فاصله را دارد به این معنی که :

$$D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$$

$$D(\rho, \gamma) \leq D(\rho, \sigma) + D(\sigma, \gamma)$$

$$D(\rho, \sigma) = ۰ \ \leftrightarrow \ \ \rho = \sigma$$

در خاصیت آخری از $D(\rho, \sigma) = ۰$ نتیجه می گیریم که $\mathrm{Tr}\,|\rho - \sigma| = ۰$. از آنجا که $|\rho - \sigma|$ یک ماتریس مثبت است لذا صفر بودن رد آن به این معنی است که همه ویژه مقدارهای آن برابر با صفر و در نتیجه خود آن مساوی با صفر است.، یعنی $|\rho - \sigma| = ۰$. اما صفر بودن قدرمطلق یک ماتریس به معنای صفر بودن خود آن است. همچنین واضح است که این فاصله تحت تبدیلات یکانی مقدار خود را حفظ می کند، یعنی:

$$D\left(U\rho U^{\dagger}, U\sigma U^{\dagger}\right) = D(\rho, \sigma) \qquad (۷)$$

مهمتر از همه این است که این فاصله از نظر عملی معنایی کاملا مشابه با فاصله کلاسیک دارد. این خاصیت در قضیه زیر بیان شده است ;

قضیه: اگر یک عملگر تصویرگر[۱۹] را با P نشان دهیم ،آنگاه:

$$D(\rho, \sigma) = \ max_P Tr\left(P(\rho - \sigma)\right) \qquad (۸)$$

۱۹. Projective Operator