بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی جبرهای باناخ

توسط:

مهسا اشرفی

استاد راهنما:

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

استاد مشاور:

دکتر محمود بیدخام

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به:

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما. رآ آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

تقدیر و سپاس

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه ی خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر فریدون حبیبیان دهکردی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی ارزنده ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محمود بیدخام که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را پذیرفتند کمال امتنان را دارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر محمدباقر قائمی و جناب آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی که داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر و سپاس را دارم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مهسا اشرفی

مهر ۱۳۹۳

چکیده

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این پایان‌نامه $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی و میانگین‌پذیری دوری تقریبی A را بررسی می‌کنیم. تحت برخی شرایط ضعیف روی A اینکه اگر دوگان دوم آن یعنی A^{**} ، $(۲n-۱)-$ میانگین‌پذیر ضعیف تقریبی باشد، آنگاه A نیز چنین است. یک نتیجه اصلی خواهد بود. همچنین نشان می‌دهیم اگر A ، $(n+۲)-$ میانگین‌پذیر ضعیف تقریبی باشد، آنگاه $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف تقریبی است. به‌علاوه رابطه‌ی بین خاصیت توسیع اثر تقریبی و میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی(دوری تقریبی) را نشان می‌دهیم. این پاسخی به سوال مطرح شده توسط قهرمانی و لوی در خصوص خواص موروثی مفاهیم میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی و میانگین‌پذیری دوری تقریبی است.

واژه‌های کلیدی:

جبر باناخ، مشتق درونی، میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی، $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی، میانگین‌پذیری دوری تقریبی، خاصیت توسیع اثر تقریبی

فهرست مطالب

فهرست علائم

پیشگفتار

مفهوم میانگین‌پذیری نخستین بار در سال ۱۹۰۴ میلادی در زمینه‌ی قضیه همگرایی یکنوا توسط لبگ[۱] و با طرح این سوال مطرح گردید:

آیا تابع مجموعه‌ای و به‌طور متناهی جمعی که تحت عمل گروه خاصی پایا باشد، وجود دارد؟

این سوال سرآغازی برای تعریف میانگین‌پذیری گروه‌ها بود. در سال ۱۹۲۹ فون نویمان[۲] رده‌ای از گروه‌های میانگین‌پذیر را معرفی کرد ولی مفهوم میانگین‌پذیری از سال ۱۹۴۰ میلادی به بعد به یکی از مفاهیم مهم آنالیز هارمونیک تبدیل گردید. مفهوم میانگین‌پذیری در زمینه‌ی گروه‌های توپولوژی اولین بار توسط دی[۳] تعریف شد. مفهوم میانگین‌پذیری جبرهای باناخ اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط جانسون[۴][۱۵] معرفی شد. او ثابت کرد که گروه به طور موضعی فشرده‌ی G میانگین‌پذیر است، اگر و تنها اگر برای هر $L^1(G)-$ دو مدول باناخ مانند E نخستین گروه کوهمولوژی هاشیلد با ضرایب در E^* بدیهی گردد. بعد از جانسون و با الهام از وی بید[۵]، کرتیس[۶] و دیلز[۷] [۱] میانگین‌پذیری ضعیف را برای جبرهای باناخ جابجایی معرفی و میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای برلینگ و لیپشیتز را بررسی کردند. جانسون در [۱۶] این مفهوم را به جبرهای ناجابجایی گسترش داد. سپس در [۱۷] این مفهوم را برای جبرهای دلخواه تعمیم یافت. گرونبک[۸] در [۱۴] ویژگی‌هایی از میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را بررسی کرد و به طور خاص نشان داد که جبرهای باناخ میانگین‌پذیر ضعیف اساسی هستند. او همچنین مفهوم میانگین‌پذیری دوری را ارائه کرد و خواص موروثی میانگین‌پذیری ضعیف و میانگین‌پذیری دوری و خاصیت توسیع اثر را بررسی کرد. دیلز، قهرمانی[۹] و گرونبک در [۴] مفهوم $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف که تعمیمی از میانگین‌پذیری ضعیف است را معرفی کردند و در حالت خاص نشان دادند که $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف $(n+2)-$ میانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد. مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی و میانگین‌پذیری ضعیف

[۱] lebeg

[۲] Von Neuman

[۳] Day

[۴] B.E.Jonson

[۵] Bade

[۶] Curtis

[۷] Dales

[۸] Gronbaek

[۹] Ghahramani

تقریبی توسط قهرمانی و لوی[1] در [۱۱] معرفی شده و به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است.

این پایان‌نامه حاصل تحقیق و بررسی بر روی میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی جبرهای باناخ است که در چهار فصل تنظیم و گردآوری شده است.

فصل اول در بردارنده‌ی مفاهیم و قضایای ابتدایی از آنالیز تابعی و جبرهای باناخ می‌باشد.

در فصل دوم مفهوم میانگین پذیری تقریبی و ضعیف تقریبی و رابطه‌ی بین آنها را بررسی می‌کنیم.

فصل سوم به بررسی مفهوم n-میانگین‌پذیری ضعیف تقریبی جبرهای باناخ اختصاص یافته است.

در فصل چهارم مفهوم میانگین‌پذیری دوری تقریبی و خواص موروثی میانگین‌پذیری دوری تقریبی و همچنین رابطه‌ی بین میانگین‌پذیری دوری تقریبی A و یکدار شده‌ی آن یعنی $A^\sharp$ را بررسی می‌کنیم.

---

[1] Loy

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و بعضی از قضیه‌ها که در فصل‌های بعد به کار می‌روند می‌پردازیم. تعاریف به منظور معرفی علائم و اصطلاحات و صورت قضیه‌ها برای رفع نیاز ازمراجعه به منابع مختلف بیان می‌شوند. اثبات قضیه‌های معروف اغلب به کتب مربوطه ارجاع داده شده است.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X و Y و Z فضاهای نرمدار بر میدان $\mathbb{K}$ باشند. نگاشت $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دو خطی گوییم هرگاه

الف) برای هر $y \in Y$، نگاشت $x \longrightarrow \varphi(x,y)$ خطی باشد.

ب) برای هر $x \in X$، نگاشت $y \longrightarrow \varphi(x,y)$ خطی باشد.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت دو خطی φ را کراندار گوییم هرگاه

$$\exists M > ۰ \; s.t \; \forall x \in X \; , \; \forall y \in Y \;\; ; \;\; \|\varphi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

نرم φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi\| = sup\{\|\varphi(x,y)\| \;\; ; \;\; \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}.$$

مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های دو خطی و کراندار از $X \times Y$ به توی Z را با $BL(X,Y;Z)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ رافشرده‌ی ضعیف گوییم هرگاه بستار گوی واحد، فشرده‌ی ضعیف باشد. فضای عملگرهای ضعیف فشرده از X به توی Y را با $W(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ را فضای باناخ گوییم هرگاه تحت متر القایی توسط نرم کامل باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید E و F دو فضای باناخ باشند. فضای همه عملگرهای خطی و کراندار از E به F را با $\mathcal{B}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{B}(E,F)$ همراه نرم عملگری داده شده با

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\|; x \in E, \|x\| \leq ۱\},$$

یک فضای باناخ است. درحالتی که $E = F$، $\mathcal{B}(E,F)$ را با $\mathcal{B}(E)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط $\mathbb{K}$ باشد. در این‌صورت عملگر خطی $T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ را تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. اگر X یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط $\mathbb{K}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی و کراندار روی X یعنی $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ را با X^* نمایش می‌دهیم آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه‌ی D را جهت‌دار گوییم اگر و تنها اگر رابطه‌ای مانند $\preceq$ روی D وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف) اگر $\beta \preceq \alpha$ و $\gamma \preceq \beta$، آنگاه $\gamma \preceq \alpha$.

ب) اگر $\beta \preceq \alpha$ و $\alpha \preceq \beta$ آنگاه $\alpha = \beta$.

ج) اگر $\alpha, \beta \in D$، آنگاه $\gamma \in D$ ی یافت شود به طوری‌که $\alpha \preceq \gamma$ و $\beta \preceq \gamma$.

معمولاً رابطه‌ی $\preceq$ را یک جهت روی D می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. هر تابع از مجموعه‌ی جهت‌دار شده‌ی D بتوی یک فضای توپولوژیک، یک تور نامیده می‌شود. اگر $x : D \longrightarrow X$ توری از مجموعه‌ی جهت‌دار شده‌ی D بتوی فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه برای راحتی کار این تور را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیک $(T.V.S)$ گوییم هرگاه

الف) تک نقطه‌ای‌ها بسته باشند.

ب) اعمال فضای برداری(عمل جمع و ضرب اسکالر) پیوسته باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید A یک فضای برداری توپولوژیک و A^* نقاط A را جدا کند. کوچکترین توپولوژی روی A که هر $\lambda \in A^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی A یا به اختصار w-توپولوژی روی A گوییم و با نماد $\sigma(A, A^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. ۲ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و X^* دوگان X باشد. برای هر $x \in X$، $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $\hat{x}$ خطی است. فرض کنید

$$\widehat{X} = \{\hat{x} \,;\, x \in X\}$$

اگر $\Lambda_۱ \neq \Lambda_۲$ پس $x \in X$ ای هست که $\Lambda_۱(x) \neq \Lambda_۲(x)$ یعنی $\hat{x}(\Lambda_۱) \neq \hat{x}(\Lambda_۲)$. پس $(X^*)'$ نقاط X^* را جدا می‌کند.

حال کوچکترین توپولوژی روی X^* که همه‌ی اعضای $(X^*)'$ روی آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف ستاره یا به اختصار w^*- توپولوژی روی X^* گوییم و با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. فضای هیلبرت H یک فضای ضرب داخلی که تحت نرم القا شده توسط ضرب داخلی کامل باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فضای همه‌ی عملگرهای خطی روی H را با $B(H)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. توپولوژی عملگری ضعیف روی $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$T_n \overset{WOT}{\longrightarrow} T$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in H$، $T_n x \overset{w}{\longrightarrow} Tx$ یعنی برای هر $y \in H$،

$$\langle y, T_n(x)\rangle \longrightarrow \langle y, T(x)\rangle.$$

قضیه ۱۶.۱.۱. (گلداشتاین[1]) فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. دراین صورت X در X^{**} با w^*- توپولوژی چگال است.

[1]Goldstine

برهان. به قضیه $A.۳.۲۹(i)$ از منبع [۳] مراجعه کنید.

قضیه ۱۷.۱.۱. (ماژور[۱]) فرض کنید E یک فضای باناخ و S مجموعه محدب در E باشد. در این‌صورت بستار S در $(E, \|.\|)$ و $(E, \sigma(E, E^*))$ یکسان هستند.

برهان. به قضیه $A.\ ۳.۲۹(ii)$ از منبع [۳] مراجعه کنید.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید X فضای باناخ، M زیر فضای X و نیز N زیر فضای X^* باشد. در این‌صورت قرار می‌دهیم

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* \ ; \ \forall x \in M \ \langle x^*, x\rangle = ۰\}.$$

و همچنین

$$^{\perp}N = \{x \in X \ ; \ \forall x^* \in N \ \langle x^*, x\rangle = \langle \hat{x}, x^*\rangle = ۰ \ \}.$$

واضح است که $^{\perp}N, M^{\perp}$ دو زیر فضا هستند. واضح است $M^{\perp} = \bigcap_{x\in M} \hat{x}^{-۱}(\{۰\})$ پس $M^{\perp}$ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره بسته است. همین‌طور $^{\perp}N = \bigcap_{x^*\in N} x^{*-۱}(\{۰\})$ و لذا $^{\perp}N$ با نرم بسته است.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و X^{**} دوگان دوم آن باشد. نگاشت $\iota : X \longrightarrow X^{**}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle \iota(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \qquad (x \in X, x^* \in X^*).$$

و ι را نشاننده‌ی کانونی می‌گوییم.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱. جبر A را یکدار گوییم هرگاه $e \in A$ موجود باشد که برای هر $x \in A$، $ex = x = xe$.

تعریف ۲.۲.۱. هرگاه نرمی روی جبر A موجود باشد، که برای هر $a, b \in A$

$$\|(ab)\| \le \|a\|\|b\|.$$

[۱] Mazur

در این‌صورت جبر A را جبر نرمدار گوییم. اگر نرم یاد شده کامل باشد A را جبر باناخ گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. در این‌صورت $A^\flat$ فضای $A \times \mathbb{K}$ همراه با اعمال تعریف شده‌ی ؛

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha),$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + x\beta + \alpha y, \alpha\beta).$$

برای هر $x, y \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ یک فضای برداری است. با تعریف $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$ ، این فضا یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{K}$ است.

تذکر ۴.۲.۱. می‌توان نشان داد که نگاشت $a \longrightarrow (a, ۰)$ یک یکریختی طولپا از A به روی زیر جبری از $A^\sharp$ است. لذا A را می‌توان به عنوان ایده‌آلی از $A^\sharp$ در نظر گرفت. عضو واحد $A^\sharp$ یعنی $(۰, ۱)$ را با e_A نشان می‌دهیم. در حالتی که A یکدار نباشد عضو (x, α) از جبر $A^\sharp = A^\flat$ به صورت $x + \alpha e_A$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر

$$(x, \alpha) = (x, ۰) + (۰, \alpha) = (x, ۰) + \alpha(۰, ۱) = (x, ۰) + \alpha e_A = x + \alpha e_A.$$

اگر A یکدار باشد $A = A^\sharp$ و اگر A یکدار نباشد $A^\sharp = A^\flat$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. در این‌صورت مرکز جبری A را با $Z(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(A) = \{a \in A : ab = ba \quad \forall b \in A\}.$$

جبرهای باناخی وجود دارند که همانی ندارند و در عوض شامل توری هستند که مشابه همانی عمل می‌کند. این تور به واحد تقریبی معروف است. در اینجا به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید A یک جبر نرم‌دار باشد. تور $(e_\alpha)_{\alpha \in D}$ در A را یک واحد تقریبی چپ (راست) برای A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$،

$$e_\alpha a \longrightarrow a \quad (a e_\alpha \longrightarrow a).$$

تور $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را یک واحد تقریبی برای A گوییم هرگاه $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک واحد تقریبی چپ و راست برای A باشد. واحد تقریبی $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را کراندار گوییم هرگاه عدد ثابت و مثبت k موجود باشد که برای هر $\alpha\in D$،

$$\|e_\alpha\| \leq k.$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. تابعک خطی τ روی A را یک اثر گوییم هرگاه

$$\tau(ab)=\tau(ba) \quad (a,b\in A).$$

تعریف ۸.۲.۱. اگر A یک جبر مختلط و $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی باشد، آنگاه φ را همریختی مختلط گوییم هرگاه

$$\varphi \neq ۰ \quad , \quad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \quad (x,y\in A).$$

تعریف ۹.۲.۱. اگر A یک جبر روی میدان اعدادحقیقی یا مختلط $\mathbb{K}$ باشد، آنگاه هر همریختی غیر صفر از A به $\mathbb{K}$ را یک مشخصه(کاراکتر) روی A می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام مشخصه‌های روی A را فضای مشخصه A نامیده و با Φ_A نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۰.۲.۱. اگر φ یک مشخصه روی جبر باناخ A باشد، آنگاه φ پیوسته است و $\|\varphi\| \leq ۱$. در این حالت اگر A یکدار باشد، آنگاه $\varphi(۱)=۱$.

برهان. به گزاره‌ی ۱۶.۳ از منبع[۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. نگاشت $* : A \longrightarrow A$ ، یک برگشت روی A است، اگر برای هر $x,y\in A$ و هر $\alpha\in\mathbb{C}$

الف) $(x+y)^*=x^*+y^*$.

ب) $(xy)^*=y^*x^*$.

ج) $(\alpha x)^*=\overline{\alpha}x^*$.

د) $(x^*)^*=x^{**}$.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. یک ضربگر چپ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L : A \longrightarrow A$$

$$L(ab) = L(a)b \quad (a, b \in A).$$

به همین صورت ضربگر راست به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R : A \longrightarrow A$$

$$R(ab) = aR(b) \quad (a, b \in A).$$

یک ضربگر یک جفت (L, R) است که L و R به ترتیب ضربگرهای چپ و راست روی A هستند و

$$aL(b) = R(a)b \quad (a, b \in A).$$

مجموعه‌ی ضربگرهای چپ، ضربگرهای راست و ضربگرهای روی A را به ترتیب با $\mathcal{M}_l(A)$ و $\mathcal{M}_r(A)$ و $\mathcal{M}(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۲.۱۳. فرض کنید A یک جبر باشد. در این‌صورت عملگرهای چپ و راست که به صورت زیر تعریف می شوند، نمونه‌ای از ضربگر چپ و راست هستند. $(a, b, x, y \in A)$

$$L_x : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto xa$$

$$R_y : A \longrightarrow A$$

$$b \longmapsto by$$

$$L_x(ab) = x(ab) = (xa)b = L_x(a)b,$$

$$R_y(ab) = (ab)y = a(by) = aR_y(b).$$

همچنین عملگرهای چپ و راست یک جفت ضربگر هستند.

$$aL_x(b) = a(xb) = (ax)b = R_x(a)b.$$

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید A یک جبر باشد. ایده‌آل چپ I از جبر A یک زیر فضای I از A است به طوری‌که $AI \subset I$.

ایده‌آل راست A و ایده‌آل دو طرفه نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

ایده آل I را سره گوییم هرگاه $I \neq A$ و I را ماکزیمال گوییم هرگاه I ایده‌آل سره هیچ ایده‌آل سره A نباشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد، آنگاه اشتراک همه ی ایده‌آل های ماکزیمال A را با $rad(A)$ نمایش می‌دهیم و رادیکال A گوییم.
اگر $rad(A) = ۰$ ، آنگاه A را نیم ساده گوییم.

۳.۱ مدول های باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک $A-$ مدول چپ، یک فضای خطی E روی $\mathbb{K}$ همراه با یک نگاشت $a.x \longrightarrow (a, x)$ از $A \times E \longrightarrow E$ است به طوری‌که

الف) نگاشت فوق نسبت به هر دو متغیر خطی باشد.

ب) برای هر $a, b \in A$ و $x \in E$

$$a.(b.x) = (ab).x.$$

به طور مشابه $A-$ مدول راست تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. یک $A-$ دو مدول یک فضای خطی E است که هم یک $A-$ مدول راست و هم یک $A-$ مدول چپ بوده و نیز برای هر $a, b \in A$ و $x \in E$

$$(a.x).b = a.(x.b).$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید A یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{K}$ و E یک زیر فضای خطی نرمدار روی $\mathbb{K}$ باشد. E را یک $A-$ مدول چپ نرمدار گوییم هرگاه E یک $A-$ مدول چپ بوده و همچنین در رابطه زیر صدق کند: عدد ثابت مثبت K موجود باشد به طوری‌که

$$\|a.x\| \leq K\|a\|\|x\| \quad (a \in A, x \in E).$$

به طور مشابه $A-$ مدول راست نرمدار نیز تعریف می‌شود.
همچنین یک $A-$ دو مدول نرمدار یک $A-$ دو مدول است که هم $A-$ مدول چپ نرمدار و هم $A-$ مدول راست نرمدار باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید A یک جبر یکدار با همانی e باشد. $A-$ مدول چپ E را یکانی گوییم هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $e.x = x$.

به طور مشابه $A-$ مدول راست یکانی و $A-$ دو مدول یکانی نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید A یک جبر و E یک $A-$ دو مدول باشد. در این‌صورت E را متقارن گوییم هرگاه

$$a \cdot x = x \cdot a \quad (a \in A, x \in E).$$

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. یک $A-$ مدول چپ E را غیریکدار گوییم هرگاه $A \cdot E = E$ و یک $A-$ دو مدول E را غیر یکدار گوییم هرگاه $A \cdot E \cdot A = E$.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید F یک $A-$ مدول چپ و E زیر فضای خطی از F باشد. E زیر مدول چپ F است هرگاه $A \cdot E \subset E$. به همین ترتیب زیرمدول راست تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد، E را یک $A-$ مدول چپ باناخ گوییم هرگاه E یک $A-$ مدول چپ بوده و $k > 0$ موجود باشد به طوری‌که

$$\|a.x\| \leq k\|a\|\|x\| \ \ (\forall a \in A, x \in E).$$

به طور مشابه $A-$ مدول راست باناخ و $A-$ دو مدول باناخ تعریف می‌شوند.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید A یک جبر و E و F، $A-$ مدول‌های چپ باشند. نگاشت $T : E \longrightarrow F$ را یک همریختی $A-$ مدولی چپ نامیم هرگاه

$$T(a.x) = a.T(x) \ \ (a \in A, x \in E).$$

به طور مشابه همریختی $A-$ مدولی راست نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید A یک جبر و E و F، $A-$ دو مدول باشند. نگاشت $T : E \longrightarrow F$ یک همریختی $A-$ دو مدولی نامیم هرگاه یک همریختی $A-$ مدولی چپ و یک همریختی $A-$ مدولی راست باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید A و B جبرهایی از عملگرها در $B(H)$، E یک $A-$ چپ و $B-$ راست زیر مدول از $B(H)$ باشد. نگاشت $\phi : E \longrightarrow B(H)$ را یک نگاشت مدولی گوییم هرگاه

$$\phi(aeb) = a\phi(e)b \quad (a \in A, b \in B, e \in E).$$

تذکر ۱۲.۳.۱. اگر E و F، $A-$ مدول‌های چپ باناخ باشند، آنگاه زیر فضایی از $\mathcal{B}(E,F)$ که شامل همریختی‌های $A-$ مدولی چپ کراندار است را با $_A\mathcal{B}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه $\mathcal{B}_A(E,F)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنید E و F دو فضای باناخ و نگاشت خطی $T: E \longrightarrow F$ پوشا باشد. در این‌صورت T را یک یکریختی طولپا گوییم هرگاه

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad (x \in E).$$

در این حالت E و F را به طور طولپا یکریخت می‌نامیم.

گزاره ۱۴.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی، E یک $A-$ دو مدول باناخ و $\lambda \in E^*$ باشد. در این‌صورت عنصر $R_\lambda \in {}_A\mathcal{B}(E,A^*)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\langle a, R_\lambda x\rangle = \langle a.x, \lambda\rangle \quad (a \in A, x \in E).$$

برهان. به گزاره ۶.۶.۲ از منبع [۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک $A-$ دو مدول باناخ باشد. اگر $a \in A$، $x \in E$ و $\lambda \in E^*$، آنگاه E^* با اعمال تعریف شده زیر

$$\langle a.\lambda, x\rangle = \langle \lambda, x.a\rangle. \text{ و } \langle \lambda.a, x\rangle = \langle \lambda, a.x\rangle$$

یک $A-$ دو مدول باناخ است.

در حالت خاص اگر $E = A$، آنگاه A^* یک $A-$ دو مدول باناخ است که آن را $A-$ دو مدول دوگان می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت برای هر n طبیعی $n-$ امین فضای دوگان A یعنی $A^{(n)}$ با عمل‌های زیر یک $A-$ دو مدول باناخ است.

$$\langle u, \Lambda.a\rangle = \langle a.u, \Lambda\rangle \ \ , \ \ \langle u, a.\Lambda\rangle = \langle u.a, \Lambda\rangle \quad (\Lambda \in A^{(n)}, u \in A^{(n-۱)}, a \in A).$$

تذکر ۱۷.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. A^{**} دوگان دوم جبر باناخ A است که خود یک A^*- دو مدول باناخ است.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنید E و F فضاهای باناخ و $T \in \mathcal{B}(E,F)$, $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ را با ضابطه‌ی $\langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$ تعریف می‌کنیم. T^* را الحاق T گوییم.

تعریف ۱۹.۳.۱. جبر باناخ A را اساسی گوییم هرگاه $\overline{A^۲} = A$.