بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٧٨٥٤-٢٠٢١٧٥١

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش اتمی و مولکولی

آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در محیط متحرک

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مطلوب

مؤلف:

نوشین پیش بین

۱۳۸۹/۹/ ۲۹

تیر ماه ۱۳۸۹

۱۴۷۸۵۴

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

گروه فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: نوشین پیش بین

استاد راهنما: دکترمحمدرضا مطلوب

استاد مشاور:

داور ۱: دکترجعفرجهانپناه

داور ۲: دکترفریده شجاعی

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکترسید جلیل الدین فاطمی

دانشگاه شهید باهنر
کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه است.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم و دو خواهر مهربانم:

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

تشکر و قدردانی :

الهی وای بر من اگر دانشم رهزنم شود و کتابم حجابم.

شاکرم بر خداوندی که کرانه رحمتش را پایانی نیست و راه دانایی را فرا رویم نهاد و مرا از تاریکی جهل رهانید تا روشنایی علم را دریابم.

بر خود می دارم که از زحمات بی دریغ، تلاش های بی وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر مطلوب در راستای انجام این پروژه تشکر و قدردانی کنم. همچنین از داوران محترم جناب آقای دکتر جهانپناه و سرکار خانم دکتر شجاعی و نمای نده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر فاطمی که قبول زحمت فرمودند کمال تشکر را دارم.

و اما در به ثمر رساندن این دوره از زندگی نیز، همواره رهین منت انسان هایی شریف و آزاده همچون پدر و مادر عزیزتر از جان، دو خواهر مهربان و دوستان باوفایم هستم که همواره در تمام پستی ها و بلندی‌های زندگی، یار و یاور و همدم من بوده‌اند. زحماتشان را ارج می‌نهم و دستانشان را می‌بوسم.

چکیده

در این پایان نامه آهنگ واپاشی خود به خود اتم برانگیخته در محیط دی الکتریک ساکن و متحرک مورد بررسی قرار می گیرد . برای بیان آهنگ واپاشی اتم بر حسب تابع همبستگی پتانسیل برداری از قاعده ی طلایی فرمی استفاده می شود . پس از آن با کاربرد قضیه ی اتلاف- افت وخیز و فرمول کوبو قسمت موهومی تابع گرین پتانسیل برداری محاسبه می‌شود. این مسئله در محیط با ضریب شکست‌های منفی نیز مورد توجه قرار گرفته است.

کلید واژه: آهنگ واپاشی- تابع گرین پتانسیل برداری- دی الکتریک ساکن و متحرک

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

۱- مقدمه ۱

فصل دوم

۲-۱- تابع گرین فوتون در محیط مادی ۵

۲-۲- افت‌وخیز میدان الکترومغناطیسی ۱۰

۲-۳- افت‌وخیز میدان الکتریکی در محیط نامتناهی ۱۲

فصل سوم

۳-۱- محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در فضای تهی ۱۶

۳-۲- محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در دی‌الکتریک ساکن ۲۱

۳-۲-۱- محاسبه‌ی آهنگ واپاشی دو قطبی برانگیخته در محدوده‌ی کلاسیک ۲۴

۳-۲-۲- محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتمی برانگیخته در محدوده‌ی کوانتمی ۲۷

۳-۲-۲-۱- استخراج معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر تابع گرین ۲۸

۳-۲-۲-۲- به دست آوردن تابع گرین در فضای موقعیت ۳۰

۳-۲-۲-۳- به دست آوردن آهنگ واپاشی خود به خود با استفاده از تابع گری..... ۳۲

فصل چهارم

۴-۱- روابط ساختاری مینکوفسکی در محیطی متحرک و همسانگرد ۳۶

۴-۲- تانسور تابع گرین در محیط متحرک ۳۹

۴-۳- محاسبه‌ی تابع گرین اسکالر ۴۴

۴-۴- تابع گرین در فضای فرکانس ۵۱

۴-۵- محاسبه‌ی تانسور تابع گرین در فضای فرکانس ۵۲

۴-۶- محاسبه‌ی آهنگ واپاشی خود به خود در محیط متحرک ۵۴

فصل پنجم

بحث و نتیجه گیری ۵۹

منابع ۶۱

فصل اول:

مقدمه

یکی از پیشرفت‌های اخیر در اپتیک کوانتومی، مطالعه‌ی فرایندهایی چون گسیل خود به خود است که در فضای تهی یا در محیط مادی رخ می‌دهد. این فرایند منشأ بسیاری از نورهای اطراف ماست، به طوریکه بسیاری از پرتوهای خروجی از خورشید (به عنوان یک تابشگر جسم سیاه در دمای k ۶۰۰۰) مربوط به گسیل خود به خود است تا القایی.

واپاشی خود به خود یک حالت برانگیخته، از برهم کنش بین اتم یا مولکول برانگیخته و حالت پایه‌ی میدان الکترومغناطیسی کوانتیزه شده ناشی می‌شود[۱]. اگر میدان رفتار کوانتومی نداشته باشد، پیش‌بینی‌های تئوری با نتایج تجربی در تضاد خواهند بود. با این حال برخی از جنبه‌های گسیل خود به خود می‌تواند به طور کلاسیک نیز شرح داده شود.

ترازهای انرژی اتم در فضای تهی به واسطه‌ی برهم‌کنش با میدان‌های کوانتومی خلأ دچار اختلال شده و می‌توان گفت که خواص تابشی اتم یا مولکول برانگیخته بدین طریق توجیه می‌شود. خواص تابشی اتم با دقت بالایی توسط الکترودینامیک کوانتومی قابل محاسبه است.

نظریه‌ی کوانتومی میدان الکترومغناطیسی خلأ توسط بورن[۱]، هایزنبرگ[۲] و جوردن[۳] در سال ۱۹۶۲ در یکی از مقاله‌های نظریه‌ی کوانتومی بررسی شده است. در این نظریه حالت خلأ یک حالت تهی نیست، بلکه حالت کوانتومی افت‌وخیز کننده است. به عبارت دیگر حالت خلأ، حالت پایه‌ای است که در آن به ازای همه‌ی مدهای (k,σ)، $n_{k,\sigma} = 0$ می‌باشد. در این حالت میدان الکتریکی و مغناطیسی مقادیر معین ندارند و حول مقدار میانگین صفر افت‌وخیز می‌کنند.

نظریه‌ی دیراک در زمینه‌ی گسیل و جذب خود به خود در سال ۱۹۲۷، اولین کاربرد نظریه‌ی کوانتومی تابش بود. فرایند گسیل و جذب خود به خود با خلق و فنای ذره روبروست و تا قبل از بیان این نظریه مکانیک کوانتومی قادر به توجیه خلق و فنای ذرات نبود. طبق این نظریه، نابودی فوتون در فرایند جذب متناظر با گذار فوتون به حالت خلأ

---

۱. Born
۲. Heisenberg
۳. jordan

و خلق فوتون در فرایند گسیل، متناظربا گذار فوتون از حالت خلأ به حالتی دیگر است. در سال ۱۹۷۷، وینبرگ[۴] نیز به اهمیت این نظریه پی برد.

فیزیکدانان معاصر برای توصیف فیزیکی پدیده‌ی گسیل خود به خود به مفاهیم میدان الکترومغناطیسی خلأ استناد می‌کردند. این دیدگاه توسط وایسکوف[۵] در سال ۱۹۳۵ و بعدها توسط ولتون[۶] در سال ۱۹۴۸ نیز مورد تأیید قرار گرفت. طبق نظر ولتون گسیل خود به خود ناشی از افت‌وخیز میدان خلأ است.

آهنگ واپاشی نه تنها خصوصیت تغییر ناپذیر اتم برانگیخته نیست، بلکه خصوصیات میدان الکترومغناطیسی افت‌وخیز کننده در خلأ را بازتاب می‌کند. در این راستا به منظور فهم بهتر ساختار منحصر به فرد حالت خلأ میدان الکترومغناطیسی، به بررسی آهنگ واپاشی اتم برانگیخته می‌پردازیم.

دو گام اساسی تا کنون در این زمینه برداشته شده است. یکی محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در محیط مادی با نادیده گرفتن اثرات میدان موضعی[۲]، که از دیدگاه نظری ساختار حالت خلأ میدان الکترومغناطیسی ماکروسکوپی را نشان می‌دهد و دیگری محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم متحرک در فضای تهی[۳]. نتیجه‌ی اولی از اهمیت بیشتری برخوردار است. چون در عمل اتم در فضای تهی نیست، بلکه در محیط مادی قرار دارد. مورد دوم در اپتیک اتمی مورد توجه می‌باشد و با نظریه نسبیت خاص سازگار است.

در نهایت ترکیب این دو نتیجه منجر به محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم متحرک در محیط مادی می‌شود.

آهنگ گسیل خود به خود با مقدار چشم داشتی تابع همبستگی فضایی عملگر میدان الکتریکی خلأ نسبت مستقیم دارد که این مقدار چشم داشتی معرف افت‌وخیز میدان الکتریکی خلأ است. از آنجا که تابع همبستگی میدان الکتریکی با قسمت موهومی تابع گرین رابطه دارد و تابع گرین در محیط‌های مختلف، متفاوت است، مقدار چشم داشتی تابع همبستگی فضایی متناسب با هندسه‌ی محیط می‌باشد.

---

۴. Weinberg
۵. Weiskopf
۶. Welton

با توجه به اینکه در محاسبه‌ی خواص تابشی اتم، با داشتن تابع گرین محیط مورد نظر نیازی به معلوم بودن شکل صریح عملگر پتانسیل برداری نیست، در بیشتر مواردی که تعیین تابع گرین امکان پذیر است، استفاده از روش تابع گرین در محاسبه‌ی خواص تابشی اتم ارجحیت دارد.

در این پایان نامه برآنیم تا به محاسبه‌ی آهنگ واپاشی خود به خود اتم برانگیخته در محیط مادی متحرک بپردازیم. بدین منظور ابتدا در فصل دوم خواص آماری میدان الکترومغناطیسی و افت‌وخیز آن در محیط مادی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان خواهیم داد که طبق قضیه‌ی اتلاف- افت‌وخیز[۷] تابع همبستگی پتانسیل برداری با قسمت موهومی تابع گرین رابطه‌ی مستقیم دارد.

در فصل سوم با استفاده از هامیلتونی برهم کنش میدان الکترومغناطیسی با اتم و کاربرد آن در قاعده‌ی طلایی فرمی، آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در فضای تهی را مورد مطالعه قرار داده و پس از آن با تعیین تابع گرین پتانسیل برداری در محیط ساکن و تفکیک قسمت موهومی از حقیقی آن و استفاده از قضیه‌ی FDT به محاسبه‌ی آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در محیط مادی و ساکن می‌پردازیم. در نهایت آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در محدوده‌ی کوانتومی و در تقریب دو قطبی الکتریکی را با آهنگ واپاشی دو قطبی الکتریکی در کلاسیک مقایسه می‌کنیم.

در فصل چهارم که هدف اصلی پایان نامه است، ابتدا تابع گرین پتانسیل برداری را در محیط متحرک تعیین کرده و با استفاده از قضیه‌ی FDT، آهنگ واپاشی اتم برانگیخته در محیط مادی متحرک را محاسبه می‌کنیم.

---

۷. Fluctuation- dissipation theorem

فصل دوم:

افت و خیز میدان الکترومغناطیسی

۲-۱- تابع گرین فوتون در محیط مادی

در ایـــن بخـــش بـــه مطالعـــه خـــواص آمـــاری میـــدان الکترومغناطیســـی در محـــیط مـــادی مـــی‌پـــردازیم. خـــواص آمـــاری تـــابش الکترومغناطیســـی در محـــیط مـــادی بوســـیله تـــابع گـــرین فوتـــون در آن محـــیط شـــرح داده مـــی شـــود. تـــابع گـــرین فوتـــون را مـــی‌تـــوان بـــر حســـب عملگرهای پتانسیل میدان الکترومغناطیسی بیان کرد.

پتانسـیل‌هـای میـدان الکترومغناطیسـی تشـکیل یـک ۴-بـردار $A^{\mu}=\left(A^{\circ},A\right)$ مـی دهنـد کـه در آن $A^{\circ}\equiv\Phi$ پتانسـیل اسـکالر و A پتانسـیل بـرداری اسـت. ایـن پتانسـیل‌هـا در الکترودینامیـک منحصر به فرد نیستند، بلکـه بـه پیمانـه انتخـاب شـده بستگی دارنـد و ایـن پیمانـه‌هـا هـیچ تـأثیری روی کمیـت‌هـای مشـاهده پـذیر ندارنـد. در تعیـین تـابع گـرین فوتـون نیـز پیمانـه را طـوری انتخاب می کنیم که پتانسیل نرده ای صفر شود:

$$A^{\circ}=\Phi=\circ \qquad (۱.۲)$$

بنـابراین میـدان تنهـا توسـط پتانسـیل بـرداری تعیـین مـی‌شـود. ایـن پیمانـه معمـولا بـرای مسـائلی کـه در آنهـا میـدان الکترومغناطیسـی بـا ذرات غیـر نسـبیتی بـرهم‌کـنش مـی کنـد، مناسـب است. در این پیمانـه تـابع گـرین یـک تانسـور سـه بعـدی از مرتبـه ۲ مـی باشـد و بـه صـورت زیـر تعریف می‌شود:

$$G_{ik}\left(X_{۱},X_{۲}\right)=i\left\langle T\hat{A}_{i}\left(X_{۱}\right)\hat{A}_{k}\left(X_{۲}\right)\right\rangle \qquad (۲.۲)$$

کـــه در آن $i,k=x,y,z$؛ براکـــت زاویـــه ای میـــانگین گیـــری روی توزیـــع گیـــبس بـــرای سیستم و T حاصلضرب ترتیب زمانی عملگرهاست.

از آنجـا کـه فوتـون‌هـا ذرات بـوزونی هسـتند، بـا جابجـا شـدن $\hat{A}_{i}$ و $\hat{A}_{k}$ توسـط عملگـر ترتیـب زمـانی، تغییـری در علامـت حاصلضـرب آنهـا رخ نمـی‌دهـد. عـلاوه بـر ایـن عملگرهـای $\hat{A}_{i}$ خود همیوغ هستند، بنابراین در (۲.۲) هیچ تمایزی بین $\hat{A}_{i}$ و $\hat{A}_{i}^{\dagger}$ وجود ندارد.

مفـاهیم اساسـی مربـوط بـه تـابع گـرین فوتـون بـا تـابع گـرین تـأخیری بـه صـورت زیـر بیـان می‌شود:

(۳.۲)

$$iG^R_{ik}(X_1,X_2)=\begin{cases}\left\langle \hat{A}_i(X_1)\hat{A}_k(X_2)-\hat{A}_k(X_2)\hat{A}_i(X_1)\right\rangle, & t_1>t_2,\\ 0 & t_1<t_2,\end{cases}$$

علامت منفی بین دو عبارت از آمار بوز- انیشتین نتیجه می شود.

برای یک سیستم بسته، تابع گرین وابسته به زمان‌های t_1 و t_2 تنها به اختلاف بین این دو زمان $(t=t_1-t_2)$ بستگی دارد. علاوه بر این، در یک محیط نا همگن مختصات $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ به صورت مستقل در تابع گرین ظاهر می شوند: $G^R_{ik}(t;\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$. بسط فوریه‌ی این تابع نسبت به زمان عبارت است از:

$$G^R_{ik}(\omega;\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}G^R_{ik}(t;\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,dt \qquad (۴.۲)$$

با توجه به اینکه متوسط گیری روی حجم کوچکی انجام می‌شود، بحث خود را به طول موج‌های بلند که درآن عددهای موجی فوتون در شرط $ka<<1$ (a فاصله بین اتمی است) صدق می‌کند، محدود می‌کنیم. در این محدوده‌ی فرکانسی تابع گرین فوتون می‌تواند بر حسب دیگر مشخصه‌های ماکروسکوپی محیط نظیر $\varepsilon(\omega)$[۱] و $\mu(\omega)$[۲] بیان شود.

در الکترودینامیک عملگر برهم کنش میدان الکترومغناطیسی با محیط به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{V}=-\int \hat{\boldsymbol{j}}.\hat{A}\,d^3x \qquad (۵.۲)$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{j}}$ عملگر چگالی جریان الکتریکی ذره های محیط است.

اگر سیستم تحت برهم کنش خارجی قرار گیرد، در هامیلتونی سیستم اختلال وارد می شود و در این حالت عملگر انرژی برهم کنشی ناشی از نیروهای اختلال $f_a(t)$ به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\hat{V}=-\sum_a f_a(t)\hat{x}_a \qquad (۶.۲)$$

---

۱ Permitivity .
۲ Permeabilityt

$\hat{x}_a$ عملگـر کمیـت ناپیوسـته x_a اسـت. مقـدار میـانگین $\bar{x}_a(t)$ تـابع خطـی از $f_a(t)$ است. برای مؤلفه‌های فوریه‌ای این کمیت‌ها، این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{x}_{a\omega} = \sum_b \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega} \qquad (۷.۲)$$

کـه در نبـود اخـتلال $\bar{x}_a = ۰$ مـی باشـد. ضـریب α_{ab} در ایـن روابـط پـذیرفتاری تعمـیم یافتـه‌ی سیسـتم نامیـده مـی شـود. اگـر دو کمیـت x_a و x_b تحـت وارونـی زمـان رفتـار یکسـانی داشـته باشـند و نیـز سیسـیتم مغناطیسـی نباشـد (نـه سـاختار مغناطیسـی داشـته باشـد و نـه اینکـه در میـدان مغناطیسـی قـرار گرفتـه باشـد)، آنگـاه α_{ab} نسبت بـه شـاخص هـای هـای a و b متقارن خواهد بود.

بـا توجـه بـه اینکـه در اینجـا کمیـت‌هـای f_a و x_a تـابعی از مختصـات $\boldsymbol{r}$ مربـوط بـه یـک نقطه در سیستم می‌باشند، عملگر برهم کنشی $\hat{V}$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{V} = -\sum_a \int f_a(t,\boldsymbol{r}) \hat{x}_a(t,\boldsymbol{r}) d^۳r, \qquad (۸.۲)$$

و نیز رابطه‌ی بین مقدار میانگین $\bar{x}_a$ و نیروی f_a عبارت است از:

$$\bar{x}_{a\omega}(\boldsymbol{r}) = \sum_b \int \alpha_{ab}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') f_{b\omega}(\boldsymbol{r}') d^۳r' \qquad (۹.۲)$$

اکنـون پـذیرفتاری تعمـیم یافتـه تـابعی از مختصـات دو نقطـه درسیسـتم مـی‌باشـد و تقـارن آنهـا به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\alpha_{ab}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \alpha_{ba}(\omega;\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) \qquad (۱۰.۲)$$

طبـق فرمـول کوبـو[۳]، پـذیرفتاری تعمـیم یافتـه مـی‌توانـد بـر حسـب مقـدار میـانگین جابجـایی عملگرهای هایزنبرگ $\hat{x}_a(t,r)$ نوشته شود [۴]:

(۱۱.۲)

$$\alpha_{ab}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{-i}{۲\pi} \int_۰^\infty e^{i\omega t} \left\langle \hat{x}_a(t,\boldsymbol{r}) \hat{x}_b(۰,\boldsymbol{r}') - \hat{x}_b(۰,\boldsymbol{r}') \hat{x}_a(t,\boldsymbol{r}) \right\rangle dt.$$

---

۳. Kubo

اکنون مؤلفه‌های بردار جریان $\boldsymbol{J}$ را همانند نیروهای اختلالی f_a در نظر می‌گیریم، در این صورت با مقایسه‌ی رابطه های (۵.۲) و (۸.۲) مشاهده می‌شود که کمیت‌های x_a متناظر با مؤلفه‌های پتانسیل برداری $\boldsymbol{A}$ هستند و نیز مقایسه‌ی رابطه‌ی (۱۱.۲) با تعاریف (۳.۲) و (۴.۲) نشان می دهد که پذیرفتاری تعمیم یافته $\alpha_{ab}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ همانند مؤلفه‌های تانسور $G^R_{ik}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ می باشد.

با توجه به رابطه‌ی (۱۰.۲)، در محیط غیر مغناطیسی داریم:

$$G^R_{ik}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G^R_{ki}(\omega;\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) \qquad (۱۲.۲)$$

و در نهایت طبق رابطه‌ی (۹.۲) برای پتانسیل برداری داریم:

$$\bar{A}_{ij}(\boldsymbol{r}) = \int G^R_{ik}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\, j_{kj}(\boldsymbol{r}')\, d^3r'. \qquad (۱۳.۲)$$

مقدار میانگین $\bar{\boldsymbol{A}}$ دقیقا پتانسیل برداری میدان الکترومغناطیسی ماکروسکوپی در محیط است.

می‌دانیم که میدان الکترومغناطیسی ماکروسکوپی ناشی از جریان کلاسیک $\boldsymbol{j}$ به شکل زیر در معادله‌ی ماکسول صدق می کند:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{j}(\omega) - i\omega \boldsymbol{D}(\omega) \qquad (۱۴.۲)$$

که در آن $\boldsymbol{D}$ القای الکتریکی است و در محیط ناهمسانگرد $D_{ij} = (\varepsilon_0\, \varepsilon(\omega))_{ik} E_{kj}$؛ اگر محیط ناهمگن هم باشد تانسور گذردهی تابعی از مختصات نیز می شود، یعنی $D_{ij} = (\varepsilon_0\, \varepsilon(\omega,\boldsymbol{r}))_{ik} E_{kj}$.

با انتخاب پیمانه ای برای پتانسیل‌ها به شکل (۱.۲) داریم:

$$\boldsymbol{B}(\omega) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\omega)\ ;\ \boldsymbol{E}(\omega) = i\omega\, \boldsymbol{A}(\omega) \qquad (۱۵.۲)$$

که در آن $\boldsymbol{B}$ القای مغناطیسی است و رابطه‌ی آن با H به صورت $B_{ij} = (\mu_0\, \mu)_{ik} H_{kj}$ می‌باشد.

با توجه به روابط بالا، پتانسیل برداری در معادله زیر صدق می کند:

(۱۶.۲)

$$\left[\nabla_{im}\times((\mu_{\cdot}\,\mu)^{-1}{}_{mn}\nabla_{nk}\times)-\omega^{2}(\varepsilon_{\cdot}\,\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r}))_{ik}\right]A_{kj}=j_{ij}$$

با جایگزین کردن A_{ij} از (۱۳.۲)، رابطه‌ی فوق برحسب G^{R}_{ik} به صورت زیر در می‌آید:

(۱۷.۲)

$$\left[\nabla_{im}\times((\mu_{\cdot}\,\mu)^{-1}{}_{mn}\nabla_{nl}\times)-\omega^{2}(\varepsilon_{\cdot}\,\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r})_{il}\right]G^{R}_{lk}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\hbar\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

این معادله برای محیط‌های همسانگرد که در آنها تانسورهای ε_{ik} و μ_{ik} به کمیت‌های نرده ای تبدیل می شوند، به طور قابل ملاحظه ای ساده تر است.

با قرار دادن $(\varepsilon_{\cdot}\,\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r}))_{ik}=\varepsilon_{\cdot}\,\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r})\delta_{ik}$ و $(\mu=1),(\mu\mu_{\cdot})^{-1}{}_{ik}=\mu_{\cdot}^{-1}\delta_{ik}$، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

(۱۸.۲)

$$\left[\mu_{\cdot}^{-1}(\frac{\partial^{2}}{\partial x_{i}\partial x_{l}}-\nabla^{2}\delta_{il})-\delta_{il}\,\omega^{2}\varepsilon_{\cdot}\,\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r})\right]G^{R}_{lk}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\hbar\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

تابع گرین تأخیری در محیط ناهمگن با حل معادله‌ی دیفرانسیلی فوق به دست می آید و مؤلفه‌های تانسور G^{R}_{ik} باید شرایط مرزی را در فصل مشترک محیط‌های مختلف ارضا کنند. این شرایط مرزی به گونه ای است که مؤلفه‌های مماسی E و H پیوسته باشند. قابل توجه است که شرایط مرزی تنها نسبت به مختصات $\boldsymbol{r}$ وشاخص l از تابع $G^{R}_{lk}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ اعمال می‌شوند. چون متغیر $\boldsymbol{r}'$ و شاخص k فقط به عنوان یک پارامتر عمل می کنند.

از آنجا که $\mathbf{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}$، تأثیر بردار $\mathbf{E}$ به صورت $-\frac{\partial G^{R}_{lk}(t;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial t}$ و یا به شکل مؤلفه‌ی فوریه‌ای زیر می باشد:

$$i\omega\,G^{R}_{lk}(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \qquad (۱۹.۲)$$

به طور مشابه برای بردار $\boldsymbol{H}$ با فرض (μ=۱) داریم:

$$\mu_{\cdot}^{-1}\nabla_{li}\times G_{ik}\left(\omega;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) \qquad (۲۰.۲)$$

در محیط نامتناهی همگن تابع G_{ik}^{R} فقط به اختلاف $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ بستگی دارد. در این محیط تبدیل فوریه‌ی معادله‌ی دیفرانسیلی (۱۸.۲) نسبت به $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ به صورت زیر در می آید:

$$\frac{۱}{\hbar}\left[\mu_{\cdot}^{-۱}(k_ik_l-\delta_{il}k^{۲})+\delta_{il}\,\omega^{۲}\varepsilon_{\cdot}\varepsilon(\omega)\right]G_{lk}^{R}(\omega,\boldsymbol{K})=\delta_{ik}. \qquad (۲۱.۲)$$

با حل این معادله‌ی دیفرانسیلی تانسور $G_{ik}^{R}(\omega,\boldsymbol{K})$ به دست می آید:

$$G_{ik}^{R}(\omega,\boldsymbol{K})=\frac{\hbar\varepsilon_{\cdot}}{\omega^{۲}\varepsilon(\omega)-c^{۲}k^{۲}}\left[\delta_{ik}-\frac{c^{۲}k_ik_k}{\omega^{۲}\varepsilon(\omega)}\right] \qquad (۲۲.۲)$$

۲-۲- افت‌وخیز میدان الکترومغناطیسی

افت‌وخیز میدان الکترومغناطیسی می تواند به طور مستقیم از فرمول کلی قضیه‌ی (FDT) به دست آید [۴]. طبق این فرمول برای مجموعه‌ای ناپیوسته از کمیت‌های افت‌وخیز کننده x_a، توزیع فضایی افت‌وخیزها برحسب پذیرفتاری تعمیم یافته‌ی $\alpha_{ab}(\omega)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(x_ax_b)_{\omega}=\frac{i\hbar}{۲\pi}(\alpha_{ba}^{*}-\alpha_{ab})\coth(\hbar\omega/۲T) \qquad (۲۳.۲)$$

که در آن $(x_ax_b)_{\omega}$ مؤلفه‌ای از بسط فوریه تابع بستگی زیر نسبت به زمان است:

$$\phi_{ab}(t)=\frac{۱}{۲}\left\langle\hat{x}_a(t)\hat{x}_b(\cdot)+\hat{x}_b(\cdot)\hat{x}_a(t)\right\rangle \qquad (۲۴.۲)$$

$\hat{x}_a(t)$ عملگر هایزنبرگ کمیت x_a است.

اگر کمیت های x_a و x_b تابعی از مختصات یک نقطه در سیستم باشند، آنگاه رابطه‌ی (۲۳.۲) به صورت زیر در می‌آید:

(۲۵.۲)

$$(x_a^{(1)}x_b^{(2)})_\omega = \frac{i\hbar}{2\pi}\coth(\hbar\omega/2T)\left[\alpha^*_{ba}(\omega;r_2,r_1)-\alpha_{ab}(\omega;r_1,r_2)\right]$$

که شاخص‌های ۱و۲ نشان دهنده‌ی مقادیر در نقاط r_1 و r_2 هستند. همانطور که در بخش قبل نشان داده شد، کمیت‌های x_a متناظر با مؤلفه‌های پتانسیل برداری $A(r)$ و نیز پذیرفتاری تعمیم یافته متناظر با مؤلفه‌های تانسور $G^R_{ik}(\omega;r_1,r_2)$ هستند. بنابراین داریم:

(۲۶.۲)

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega = -\frac{i\hbar}{2\pi}\coth(\hbar\omega/2T)\left\{G^R_{ik}(\omega;r_1,r_2)-\left[G^R_{ki}(\omega;r_2,r_1)\right]^*\right\}$$

اگر $\phi^A_{ik}(t_1,r_1;t_2,r_2)$ تابع بستگی افت‌وخیز پتانسیل برداری باشد، رابطه‌ی (۲۶.۲) مؤلفه‌ای از بسط فوریه این تابع نسبت به $t=t_1-t_2$ است.

از آنجایی که میدان الکتریکی به شکل $\mathbf{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}$ با پتانسیل برداری رابطه دارد؛ تابع بستگی متناظر برای مؤلفه‌های $\mathbf{E}$ می‌شود:

$$\phi^E_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\phi^A_{ik} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^A_{ik}, \qquad (۲۷.۲)$$

و یا به شکل مؤلفه های فوریه ای:

$$(E_i^{(1)}E_k^{(2)})_\omega = \omega^2(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega \qquad (۲۸.۲)$$

به طور مشابه چون $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ داریم:

$$(B_i^{(1)}B_k^{(2)})_\omega = \nabla^{(1)}_{il}\times\nabla^{(2)}_{km}\times(A_l^{(1)}A_m^{(2)})_\omega, \qquad (۲۹.۲)$$

$$(E_i^{(1)}B_k^{(2)})_\omega = i\omega\nabla^{(2)}_{km}\times(A_i^{(1)}A_m^{(2)})_\omega. \qquad (۳۰.۲)$$