بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت کارشناسی ارشد ریاضی (جبر)

نیم‌میدان‌های سه‌تایی

توسط:

سمیّه حیدری

استاد راهنما:

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

استاد مشاور:

دکتر ناهید اشرفی

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به همه آنهایی که می خواهند بیشتر بدانند.

و تقدیم به پدر و مادر عزیزم

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

خدایا . . .[1]

به من زیستی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش بی‌منتها خدای را سزاست که انسان را آفرید و اسماء را به وی تعلیم نمود، به زیور علم و ادب بیاراست و به واسطه آن تاج لقد کرمنا بر تارک او نهاد، او این آیات نازل به رسول خاتم را اقراء آغاز نمود و قلم را دستمایه سوگند خویش قرار.

اکنون که با لطف خدای مهربان، مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در فرجام رسانیدن این پایان‌نامه از سرچشمه بذل ومعرفتشان بهره برده‌ام کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم و از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند، سپاس‌گزاری کنم.

همچنین از استاد راهنمای گرامی و ارجمندم جناب آقای دکتر بهمنی که در تمام مراحل پایان نامه با دقت و ژرف نگری، متانت، صبر و شکیبایی راهنماییم فرمودند خالصانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. بی‌شک بدون راهنمایی‌های ارزشمند و حمایت‌های ایشان، تکمیل این پایان‌نامه امکان‌پذیر نبود. از خداوند توانا، سلامت، سعادت و موفقیت روز افزون ایشان را خواستارم.

از سرکار خانم دکتر اشرفی استاد مشاور پایان‌نامه و نیز اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علی معدن‌شکاف و هم‌چنین سرکار خانم دکتر مهدیه حدادی که قبول زحمت نموده‌اند و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند کمال تشکر را دارم و از خدای مهربان سلامتی و توفیق ایشان را خواستارم.

حیدری

۱۳۹۲

چکیده

ابتدا به مفهوم نیم‌حلقه سه‌تایی که اولین بار توسط دوتّا [2] و کار [3] در [۷] بیان شده است، می‌پردازیم. گرچه مفهوم نیم‌حلقه سه‌تایی تعمیمی از نیم‌حلقه دوتایی است اما صرفاً تعمیم نیم‌حلقه دوتایی نیست زیرا مفاهیم خاصی مانند ایدال‌های جانبی موجودند که مشابهی در نیم‌حلقه دوتایی ندارند. مفهوم ایدال و $K-$ایدال نیم‌حلقه سه‌تایی بیان شده و نشان داده‌ایم که هر ایدالی لزوماً یک $K-$ایدال نیست. هم‌چنین، عنصر واحد در نیم‌حلقه سه‌تایی منحصر بفرد نیست. سپس مجموعه $\mathbb{Z}_{0}^{-}$ را به عنوان یک نیم‌حلقه سه‌تایی معرفی کرده و نشان داده‌ایم که نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_{0}^{-}$، نوتری است. علاوه بر این، مفاهیم و قضایای مربوط به ایدال‌های اول و نیم‌اول و ماکسیمال نیم‌حلقه‌های سه‌تایی را ذکر نموده و ارتباط بین ایدال‌های ($K-$ایدال‌های) اول، نیم‌اول و ماکسیمال نیم‌حلقه دوتایی $\mathbb{Z}_{0}^{+}$ و نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_{0}^{-}$ را بیان کردیم. پس از آن نیم‌حوزه صحیح سه‌تایی، نیم‌میدان سه‌تایی و ایدال منفرد در یک نیم‌حلقه سه‌تایی را معرفی کرده و هم‌چنین، مثال‌ها و قضایای مربوط به آن‌ها را بیان کرده‌ایم و سرانجام ثابت کرده‌ایم کلاس نیم‌حلقه‌های سه‌تایی نامنفرد (منفرد) نیم‌اول، موروثی است. این پایان نامه مبتنی بر [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] می‌باشد.

واژگان کلیدی:

ایدال؛ $K-$ایدال؛ ایدال راست اساسی؛ ایدال راست منفرد؛ نیم‌حلقه سه‌تایی پوچ؛ نیم‌حلقه سه‌تایی منفرد؛ نیم‌حلقه سه‌تایی نامنفرد؛ نیم‌مدول سه‌تایی؛ نیم‌میدان سه‌تایی؛ نیم‌یکریختی.

[2] T. K. Dutta

[3] S. Kar

فهرست مطالب

فهرست علائم

ایدال اصلی تولید شده توسط a .... $\langle a \rangle$

ایدال چپ اصلی تولید شده توسط عنصر a .... $\langle a \rangle_l$

ایدال راست منفرد از نیم‌حلقه سه‌تایی S .... $Z(S)$

پوچساز راست m در S .... $r_S(m)$

معکوس تابع γ .... $\overleftarrow{\gamma}$

حاصل‌ضرب خانواده‌ای از نیم‌حلقه‌های سه‌تایی .... $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$

زیرنیم‌مدول سه‌تایی منفرد از $S-$نیم‌مدول سه‌تایی راست M .... $Z_S(M)$

$K-$بستار A .... $\overline{A}$

مجموع مستقیم خانواده‌ای از نیم‌حلقه‌های سه‌تایی .... $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$

مجموعه همه کلاس‌های هم‌نهشتی حاصل از I روی S .... S/I یا S/ρ_I

مجموعه ماتریس‌های مربعی $n \times n$ روی نیم‌حلقه سه‌تایی S .... $M_n(S)$

مقدمه

مفهوم نیم‌گروه‌های سه‌تایی، اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط لهمر [۴] در [۲۰] مطرح شد. پس از آن مفهوم حلقه سه‌تایی توسط لیستر [۵] در سال ۱۹۷۱ بیان گردید. حلقه سه‌تایی عبارت است از یک گروه آبلی جمعی که تحت ضرب سه‌گانه بسته بوده و دارای خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری چپ (راست و جانبی) باشد. برای مطالعه بیشتر ویژگی‌های حلقه‌های سه‌تایی به [۲۱] مراجعه شود.

مفهوم نیم‌حلقه‌های سه‌تایی توسط دوتّا [۶] و کار [۷] در سال ۲۰۰۳ مطرح گردید. در واقع نیم‌حلقه‌های سه‌تایی به عنوان تعمیمی از حلقه‌های سه‌تایی مطرح شده توسط لیستر و نیم‌حلقه‌های دوتایی بیان شده است. قابل ذکر است که نیم‌حلقه‌های سه‌تایی دارای مفاهیم جدیدی هستند هم‌چون ایدال‌های جانبی و عنصر دوواحد که در نیم‌حلقه‌های دوتایی قابل تعریف نیستند.

نظریه ایدال‌های نیم‌حلقه $\mathbb{Z}^+$ توسط آلن [۸] و دال [۹] در سال ۱۹۷۳ مطرح شد. آن‌ها در [۱] ایدال‌های $\mathbb{Z}^+$ را معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را مطرح نموده و نشان دادند که نیم‌حلقه $\mathbb{Z}^+$ نوتری است. در سال ۲۰۱۱ این مفاهیم توسط کار به نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_0^-$ تعمیم داده شد. هم‌چنین، مفهوم حلقه قویاً اول و ویژگی این چنین حلقه‌هایی توسط هندلمن [۱۰] و لاورنس [۱۱] در سال ۱۹۷۵ مطرح شد.

---

[۴] D. L. Lehmer

[۵] W. G. Lister

[۶] T. K. Dutta

[۷] S. Kar

[۸] P. J. Allen

[۹] L. Dale

[۱۰] Handelman

[۱۱] Lawrence

دوتّا و داس [۱۲] برخی از ویژگی‌های نیم‌حلقه‌های قویاً اول (راست) را در سال ۲۰۱۰ بیان نمودند. پس از آن کار، سیرکار [۱۳] و مندال [۱۴] این مفاهیم را به نیم‌حلقه‌های سه‌تایی تعمیم دادند.

در سال ۱۹۹۵ فرّیرو [۱۵] و پوسزیلوسکی [۱۶] ویژگی حلقه‌های منفرد و نامنفرد را در [۱۴] مطرح نمودند. سپس دوتّا، کار و مندال نیم‌حلقه‌های سه‌تایی منفرد و نامنفرد را در سال ۲۰۱۲ مطرح کردند. هم‌چنین، چادهاری [۱۷] و اینگاله [۱۸] ویژگی ایدال‌ها، همریختی و نیم‌حلقه سه‌تایی خارج‌قسمتی، ایدال‌های منفرد و نیم‌حلقه‌های سه‌تایی نامنفرد(منفرد) را مورد مطالعه قرار دادند. برای مطالعات بیشتر می‌توان به [۳] و [۱۳] مراجعه نمود.

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم پایه در زمینه نیم‌حلقه‌های سه‌تایی با ارائه مثال‌هایی، بیان می‌گردد. سپس ایدال‌های نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_\circ^-$ را که $T-$ایدال و $M-$ایدال نامیده می‌شود در نظر گرفته و نشان داده خواهد شد که ایدال‌های $\mathbb{Z}_\circ^-$ دارای پایه متناهی‌اند و هم‌چنین، نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_\circ^-$ نوتری است. در ادامه به معرفی و بیان ارتباط بین ایدال‌ها و $K-$ایدال‌های اول و نیم‌اول و ماکسیمال نیم‌حلقه دوتایی $\mathbb{Z}_\circ^+$ و نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_\circ^-$ پرداخته خواهد شد. پس از آن مفهوم نیم‌حوزه صحیح سه‌تایی و نیم‌میدان سه‌تایی بیان می‌گردد. در پایان ایدال‌های منفرد و نیم‌حلقه سه‌تایی منفرد و نامنفرد را مورد بررسی قرار داده و مثال‌ها و قضایای مربوط به آن‌ها ذکر خواهد شد.

[۱۲] M. L. Das

[۱۳] J. Sircar

[۱۴] S. Mandal

[۱۵] K. Ferrero

[۱۶] E. R. Puczylowski

[۱۷] J. N. Chaudhari

[۱۸] K. J. Ingale

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی

در فصل حاضر تلاش بر آن شده است تا برخی از تعاریف و قضایای اولیه که مورد استناد این پایان‌نامه قرار گرفته است، ذکر شود. در آغاز مفهوم نیم‌حلقه (حلقه) سه‌تایی و سپس ایدال و $K-$ایدال نیم‌حلقه سه‌تایی بیان می‌گردد و با ارائه مثال نقضی نشان داده می‌شود که هر ایدال لزوماً $K-$ایده‌ال نیست و هم‌چنین، اشتراک خانواده ناتهی از $K-$ایدال‌های نیم‌حلقه سه‌تایی، $K-$ایدال است اما اجتماع تعداد دلخواهی از $K-$ایدال‌های نیم‌حلقه سه‌تایی، $K-$ایدال نیست و در نهایت مفهوم هم‌نهشتی سه‌تایی بورن بیان می‌گردد که در فصل سوم کاربرد اساسی خواهد داشت. مفاهیم ارائه شده در این فصل از مراجع، [۲]، [۷]، [۸]، [۱۰]، [۱۸] برگرفته شده‌اند.

۱.۱ تعاریف و مثال‌ها

تعریف ۱.۱.۱. ([۷]، ۱.۲) *مجموعه ناتهی S را همراه با یک عمل دوتایی جمعی و یک ضرب سه‌تایی، نیم‌حلقه سه‌تایی گوییم هرگاه S نیم‌گروه جابجایی جمعی باشد و به ازای هر $a, b, c, d, e \in S$ شرایط زیر برقرار باشد:*

۱) $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$،

۲) $(a + b)cd = acd + bcd$،

۳) $a(b + c)d = abd + acd$،

۴) $ab(c + d) = abc + abd$.

مثال ۲.۱.۱. [۷] فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و S مجموعه توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^-$ باشد. حال به‌ازای هر $f, g, h \in S$ و $x \in X$، با تعریف عمل دوتایی و ضرب سه‌تایی روی S به صورت

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{و} \quad (fgh)(x) = f(x)g(x)h(x).$$

مجموعه S، نیم‌حلقه سه‌تایی است.

مثال ۳.۱.۱. ([۹]، ۳.۲) فرض کنیم $S_1 = \{r\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}^+\}$. در این صورت S_1 با عمل جمع دوتایی و ضرب سه‌تایی معمولی یک نیم‌حلقه سه‌تایی است.

مثال ۴.۱.۱. ([۹]، ۴.۲) فرض کنیم $S_2 = \{ri : r \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$. در این صورت S_2 با عمل جمع دوتایی و ضرب سه‌تایی نیم‌حلقه سه‌تایی است.

مثال ۵.۱.۱. [۱۸] فرض کنیم S نیم‌حلقه سه‌تایی و $M_n(S)$، مجموعه ماتریس‌های مربعی $n \times n$ روی نیم‌حلقه سه‌تایی S باشد. هم‌چنین، فرض کنیم $A = (a_{ij})_{n\times n}$، $B = (b_{ij})_{n\times n}$ و $C = (c_{ij})_{n\times n}$ متعلق به $M_n(S)$ باشند. با تعریف عمل جمع دوتایی و ضرب سه‌تایی به صورت

۱) $(a_{ij})_{n\times n} + (b_{ij})_{n\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n},$

۲) $(a_{ij})_{n\times n}(b_{ij})_{n\times n}(c_{ij})_{n\times n} = (d_{ij})_{n\times n}. \qquad (d_{ij} = \sum a_{ik}b_{kl}c_{lj}\ ,\ 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n\ )$

مجموعه $M_n(S)$ نیم‌حلقه سه‌تایی است.

تعریف ۶.۱.۱. ([۷]، ۲.۲) فرض کنیم S نیم‌حلقه سه‌تایی باشد. در این صورت

۱) اگر به ازای هر $a, b, c \in S$ داشته باشیم $abc = bac = bca$. آن‌گاه S را نیم‌حلقه سه‌تایی جابجایی می‌نامیم.

۲) اگر به ازای هر $a, b, c \in S$ داشته باشیم $abc = cba$. آن‌گاه S را نیم‌حلقه سه‌تایی جابجایی جانبی می‌نامیم.

تذکّر ۷.۱.۱. هرگاه نیم‌حلقه سه‌تایی S جابجایی باشد، آن‌گاه برای هر $a, b, c \in S$، $abc = acb = cba = cab$.

تعریف ۸.۱.۱. (۳.۲، [۷]) *فرض کنیم S نیم‌حلقه سه‌تایی و S دارای عنصری مانند ۰ باشد. اگر به ازای هر $x, y \in S$، $0xy = x0y = xy0 = 0$ و $x = 0 + x$، آن‌گاه «۰» را عنصر صفر نیم‌حلقه سه‌تایی S گوییم. در این حالت، S را نیم‌حلقه سه‌تایی با صفر می‌نامیم.*

تذکّر ۹.۱.۱. *یک نیم‌حلقه سه‌تایی ممکن است شامل یک عنصر همانی ضربی نباشد اما نیم‌حلقه‌هایی موجودند که شامل عناصر همانی به مفهوم زیر می‌باشند.*

تعریف ۱۰.۱.۱. (۴.۲، [۷]) *نیم‌حلقه سه‌تایی S دارای عنصر همانی است، هرگاه عدد طبیعی مانند n و $e_1, e_2, \cdots, e_n$ و $f_1, f_2, \cdots, f_n$ عناصری از S موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in S$،*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i f_i x = \sum_{i=1}^{n} e_i x f_i = \sum_{i=1}^{n} x e_i f_i = x. \tag{۱.۱}$$

چون در رابطه فوق قرار گرفتن e_i و f_i دارای ترتیب می‌باشد برای این منظور عنصر همانی S را به صورت

$$\{(e_i, f_i) \in S \times S \ \ (i = 1, 2, ..., n)\}$$

نمایش می‌دهیم.

عنصر همانی در یک نیم‌حلقه سه‌تایی منحصر بفرد نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۱.۱.۱. *در نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Q}^+$، فرض کنیم $n = 2$. لذا می‌توان $e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = \frac{1}{3}$ و $f_1 = 1, f_2 = \frac{3}{2}$ در نظر گرفت در این صورت*

$$\sum_{i=1}^{2} e_i f_i x = e_1 f_1 x + e_2 f_2 x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = x.$$

چون نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Q}^+$ جابجایی است بنابراین

$$\sum_{i=1}^{2} e_i f_i x = \sum_{i=1}^{2} e_i x f_i = \sum_{i=1}^{2} x e_i f_i = x.$$

حال فرض کنیم $n=3$. لذا می‌توان $e_1=\frac{1}{2}, e_2=\frac{1}{3}, e_3=\frac{1}{4}$ و $f_1=\frac{2}{3}, f_2=1, f_3=\frac{4}{3}$ در نظر گرفت در این صورت

$$\sum_{i=1}^{3} e_i f_i x = e_1 f_1 x + e_2 f_2 x + e_3 f_3 x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot x + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x = x.$$

بنابر خاصیت جابجایی

$$\sum_{i=1}^{3} e_i f_i x = \sum_{i=1}^{3} e_i x f_i = \sum_{i=1}^{3} x e_i f_i = x.$$

بنابراین نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Q}^+$ دارای بیش از یک عنصر همانی است.

مثال ۱۲.۱.۱. [۷] *مجموعه $\mathbb{Z}_0^-$ با عمل جمع معمولی و ضرب سه‌تایی، یک نیم‌حلقه سه‌تایی جابجایی با صفر است و عنصر همانی آن $(-1,-1)$ می‌باشد.*

قرارداد ۱۳.۱.۱. *از این پس، نیم‌حلقه سه‌تایی S را نیم‌حلقه سه‌تایی با صفر در نظر می‌گیریم.*

نمادگذاری ۱۴.۱.۱. [۷] *فرض کنیم A, B, C زیر مجموعه‌هایی از S باشند. در این صورت مجموعه*

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \mid a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C,\ n \in \mathbb{N}\}$$

را با نماد ABC نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. (۲.۱۱، [۷]) *عنصر e از نیم‌حلقه سه‌تایی S را عنصر دوواحد گوییم هرگاه به ازای هر $x \in S$، $eex = xee = x$.*

با توجه به مثال ۱۲.۱.۱ عنصر -1 در $\mathbb{Z}_0^-$ یک عنصر دو واحد است.

مثال ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{C}$ و $\bar{b}$ مزدوج b باشد. با تعریف عمل ضرب سه‌تایی به صورت $a\bar{b}c$، مجموعه اعداد مختلط یک نیم‌حلقه سه‌تایی می‌باشد که عنصر دوواحد آن عدد ۱ است.*

تعریف ۱.۱.۱۷. (۳، [۱۰]) *عنصر e در نیم‌حلقه سه‌تایی S را عنصر واحد گوییم هرگاه به ازای هر $x \in S$، $eex = exe = xee = x$.*

حال گزاره زیر درباره عنصر واحد ارائه می‌شود.

گزاره ۱.۱.۱۸. (۱، [۱۰]) *اگر e عنصر واحد نیم‌حلقه سه‌تایی S باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in S$، $exy = xey = xye$.*

برهان. فرض کنیم e، عنصر واحد نیم‌حلقه سه‌تایی S باشد. در این صورت با توجه به تعریف ۱.۱.۱۷، به ازای هر $x, y \in S$،

$$xye = (exe)ye = ex(eye) = exy \qquad (۱)$$

و

$$xye = x(eye)e = xe(yee) = xey \qquad (۲)$$

در نتیجه، $exy = xey = xye$. □

اکنون زیرنیم‌حلقه سه‌تایی و ایدال چپ (راست، جانبی و دوطرفه) از یک نیم‌حلقه سه‌تایی به صورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۱.۱۹. (۴، [۱۰]) *زیرنیم‌گروه جمعی T از نیم‌حلقه سه‌تایی S را زیرنیم‌حلقه سه‌تایی گوییم هرگاه به ازای هر $t_1, t_2, t_3 \in T$، $t_1t_2t_3 \in T$.*

مثال ۱.۱.۲۰. مجموعه $T = \{-3k \ \ |k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از $\mathbb{Z}_0^-$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. (۲.۵، [۷]) *زیرنیم‌گروه جمعی I از نیم‌حلقه سه‌تایی S را ایدال چپ (راست، جانبی) از S گوییم هرگاه به ازای هر $s_1, s_2 \in S$ و $i \in I$ داشته باشیم $s_1s_2i \in I$ (به ترتیب $is_1s_2 \in I$ و $s_1is_2 \in I$). همچنین، I ایدال دوطرفه از نیم‌حلقه سه‌تایی S است هرگاه ایدال چپ و راست باشد. اگر I همزمان یک ایدال چپ، راست و جانبی از S باشد، آن‌گاه I را یک ایدال از S می‌نامیم.*

مثال ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم $n \in \mathbb{Z}_0^-$. آن‌گاه مجموعه $T_n = \{t \in \mathbb{Z}_0^- | t \leq n\} \cup \{0\}$ یک ایدال از نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_0^-$ است.*

تذکّر ۲۳.۱.۱. *هر ایدال چپ (راست، جانبی) نیم‌حلقه سه‌تایی یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی است.*

برهان. فرض کنیم I ایدال چپ (راست، جانبی) از نیم‌حلقه سه‌تایی S باشد. هم‌چنین فرض کنیم $i_1, i_2, i_3 \in I$. در این صورت چون $i_1, i_2 \in S$ و I ایدال چپ است پس $i_1 i_2 i_3 \in I$. لذا I زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از Sخواهد بود. □

عکس تذکّر ۲۳.۱.۱، برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۴.۱.۱. مجموعه

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_0^- \right\}$$

زیرنیم‌حلقه‌ی سه‌تایی از $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_0^-)$ است اما یک ایدال از آن نیست.

گزاره ۲۵.۱.۱. ([۲]، ۲.۱) *فرض کنیم S نیم‌حلقه سه‌تایی دارای عنصر واحد e باشد. در این صورت I ایدال جانبی از S است اگر و فقط اگر I، ایدال راست و چپ از S باشد.*

برهان. فرض کنیم I ایدال جانبی از S باشد. اگر $s_1, s_2 \in S$ و $i \in I$. آن‌گاه

$$is_1s_2 = (eei)s_1s_2 = e(eis_1)s_2 \in I, \qquad (eis_1 \in I)$$

بنابراینI ایدال راستی از نیم‌حلقه سه‌تایی S است. هم‌چنین به طور مشابه، I ایدال چپی از S است.

برعکس، فرض کنیم I ایدال چپ و راست S باشد. اگر $s_1, s_2 \in S$ و $i \in I$، آن‌گاه

$$s_1is_2 = s_1(eie)s_2 = s_1e(ies_2)$$ (ایدال راست است پسI $i_1 = ies_2 \in I$)

$$= s_1ei_1 \in I.$$ (Iایدال چپ است.)

لذا I ایدال جانبی است. □

مثال ۲۶.۱.۱. (۱.۱، [۲]) فرض کنیم $S = (\mathbb{Z}_0^-, +, .)$. در این صورت $M_{2\times 2}(S)$ نیم‌حلقه سه‌تایی دارای عنصر واحد $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ است. مجموعه

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in S \right\}$$

ایدال راستی از $M_{2\times 2}(S)$ است اما ایدال چپی از آن نیست و طبق گزاره ۲۵.۱.۱، I ایدال جانبی از $M_{2\times 2}(S)$ نخواهد بود.

تذکّر ۲۷.۱.۱. فرض کنیم نیم‌حلقه سه‌تایی S دارای عنصر واحد e باشد. در این صورت I ایدال دوطرفه است اگر و فقط اگر I ایدال جانبی باشد.

برهان. بنابر تعریف ۲۱.۱.۱ و گزاره ۲۵.۱.۱ بدیهی است. □

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم X زیر مجموعه‌ای از نیم‌حلقه سه‌تایی S باشد. هم‌چنین، $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ خانواده ناتهی از تمام ایدال‌های چپ (راست، دوطرفه و جانبی) در S باشد که شامل Xاند. در این صورت $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ ایدال چپ (راست، دوطرفه و جانبی) تولید شده توسط X نامیده می‌شود. این ایدال را با نماد $\langle X\rangle$ نشان می‌دهیم.

در گزاره زیر ایدال چپ(راست، دوطرفه و جانبی) نیم‌حلقه سه‌تایی، تولید شده توسط یک عنصر دلخواه a بیان می‌شود.

گزاره ۲۹.۱.۱. (۲، [۱۰]) فرض کنیم S نیم‌حلقه سه‌تایی و $a \in S$. در این صورت

الف) مجموعه $SSa + \mathbb{N}_0 a$ یک ایدال چپ است و آن را ایدال چپ اصلی تولید شده توسط a نامیده و با نماد $\langle a\rangle_l$ نشان می‌دهیم.

ب) مجموعه $aSS + \mathbb{N}_0 a$ یک ایدال راست است و آن را ایدال راست اصلی تولید شده توسط a نامیده و با نماد $\langle a\rangle_r$ نشان می‌دهیم.

پ) مجموعه $SSa + aSS + SSaSS + \mathbb{N}_\circ a$ یک ایدال دوطرفه است و آن را ایدال دوطرفه اصلی تولید شده توسط a نامیده و با نماد $\langle a\rangle_t$ نشان می‌دهیم.

ت) مجموعه $SaS + SSaSS + \mathbb{N}_\circ a$ یک ایدال جانبی است و آن را ایدال جانبی اصلی تولید شده توسط a نامیده و با نماد $\langle a\rangle_m$ نشان می‌دهیم.

ث) مجموعه $SSa + aSS + SaS + SSaSS + \mathbb{N}_\circ a$ یک ایدال است و آن را ایدال اصلی تولید شده توسط a نامیده و با نماد $\langle a\rangle$ نشان می‌دهیم.

برهان. بدیهی است. □

مثال ۳۰.۱.۱. *نیم‌حلقه سه‌تایی $M_{۲\times۲}(\mathbb{Z}_\circ^-)$ را در نظر بگیریم، ایدال*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & \circ \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_\circ^- \right\}$$

ایدال چپ تولید شده توسط $\begin{pmatrix} -۱ & \circ \\ -۱ & \circ \end{pmatrix}$ *است.*

مثال ۳۱.۱.۱. *نیم‌حلقه سه‌تایی اعداد زوج منفی $E_\circ^-$ را در نظر بگیریم. $E_\circ^-$ دارای عنصر واحد نیست. حال آن‌که ایدال چپ تولید شده توسط عنصر (-۲) به صورت*

$$\langle -۲\rangle_l = \left\{ s_۱ s_۲(-۲) + n(-۲) \,\middle|\, s_۱, s_۲ \in E_\circ^-,\ n \in \mathbb{N}_\circ \right\} = \left\{ \circ, -۲, -۴, \cdots \right\}$$

می‌باشد.

تعریف ۳۲.۱.۱. (۲.۶، [۷]) *ایدال I از نیم‌حلقه سه‌تایی S را $K-$ایدال نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in S$ و $y \in I$، از $x + y \in I$ بتوان نتیجه گرفت که $x \in I$.*

مثال ۳۳.۱.۱. *در نیم‌حلقه سه‌تایی $\mathbb{Z}_\circ^-$، مجموعه $I = \{-۳n | n \in \mathbb{Z}_\circ^+\}$ یک $K-$ایدال است.*