بسم اللہ الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکدهٔ علوم ریاضی

رسالهٔ دکتری

گرایش ریاضی محض

عنوان

کران‌هایی برای مجموع و حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها

نگارش

فیروزه اشرف

اساتید راهنما

دکتر غلامرضا امیدی

دکتر بهروز طایفه رضایی

شهریور ۱۳۹۳

سپاس‌گزاری

از اساتید گرامی آقایان دکتر غلامرضا امیدی و دکتر بهروز طایفه‌رضایی که دورهٔ دکتری را تحت راهنمایی‌های ایشان گذرانده‌ام، قدردانی می‌کنم. از سایر اعضای کمیتهٔ رساله آقایان دکتر سعید اکبری، دکتر علیرضا عبدالهی، دکتر محمدرضا عبودی و خانم دکتر بهناز عمومی به‌خاطر پیشنهادهای سازنده‌اشان سپاسگزارم. در طول دوره دکتری از حمایت‌های پژوهشگاه دانش‌های بنیادی بهره‌مند بوده‌ام که از آن تقدیر می‌کنم. در پایان از همسر عزیزم، دکتر ابراهیم قربانی به‌خاطر تمامیِ مساعدت‌هایشان، به‌ویژه در انجام محاسبات کامپیوتری تشکر می‌کنم.

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت و لاپلاسین G که به صورت نزولی مرتب شده‌اند را به‌ترتیب با $q_1(G) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq 0$ و $\mu_1(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G) = 0$ نمایش می‌دهیم. حدسی در مورد مقادیر ویژهٔ لاپلاسین گراف‌ها بیان می‌کند که $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) \leq n - 1$ یا به طورمعادل $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1$ که در آن $\overline{G}$ گراف مکمل G است. در این رساله، این حدس را برای گراف‌های دوبخشی ثابت می‌کنیم. به‌علاوه برای هر گراف دوبخشی G نشان می‌دهیم $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1)$. توجه کنید که برای گراف‌های دوبخشی مقادیر ویژهٔ لاپلاسین و مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت یکسان هستند.

آچیچه و هنسن حدس زده‌اند که $q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 3n - 4$ و $q_1(G)q_1(\overline{G}) \leq 2n(n-2)$. حدس اول را ثابت و حدس دوم را با ارائه خانواده‌ای از گراف‌های H_n که برای آن‌ها $q_1(H_n)q_1(\overline{H_n})$ از مرتبهٔ $2/15n^2 + O(n)$ است، رد می‌کنیم.

اگر تعداد یال‌های G را با $e(G)$ نشان دهیم و $S_k(G) = q_1(G) + \cdots + q_k(G)$، حدس می‌زنیم که برای هر گراف n رأسی G و به‌ازای هر $k = 1, \ldots, n$، $S_k(G) \leq e(G) + \binom{k+1}{2}$. این حدس را به‌ازای $k = 2$ برای تمامی گراف‌ها و به‌ازای تمام kها برای گراف‌های منتظم ثابت می‌کنیم. حدس فوق مشابه حدسی از براوِر درمورد مقادیر ویژهٔ لاپلاسین است. در میان سایر نتایج، دو حدس دیگر در مورد مجموع توان‌های مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها نیز رد شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف، مقادیر ویژهٔ لاپلاسین گراف، نامساوی‌های از نوع نوردهاس-گادم، پهنای لاپلاسین، مجموع مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت، مجموع توان‌های مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت

فصل ۱

مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای که در طول این رساله به‌کار رفته‌اند، آورده شده است. این پیش‌نیازها مربوط به نظریهٔ گراف‌ها، نظریهٔ ماتریس‌ها و نظریهٔ جبری گراف‌ها هستند که در سه بخش جداگانه به آن‌ها پرداخته شده است. در انتها مروری بر فصل‌های رساله آورده شده است.

۱.۱ مقدماتی از نظریهٔ گراف‌ها

این بخش اختصاص به مقدماتی از نظریهٔ گراف‌ها دارد. تمام این مطالب و هم‌چنین جزئیات بیشتر را می‌توانید در مرجع [۱۲] ببینید. در سراسر این رساله G نمایش‌گر گرافی ساده می‌باشد یعنی گرافی که فاقد طوقه، یال چندگانه و یال جهت‌دار است. مجموعه رئوس گراف G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. $|V(G)|$ مرتبهٔ گراف G نامیده می‌شود.

تعریف۱.۱ گراف دو بخشی، گرافی است که بتوان مجموعهٔ رئوس آن را به دو زیرمجموعهٔ X و Y چنان افراز کرد که هیچ دو رأسی در X و هیچ دو رأسی در Y مجاور نباشند.

تعریف۱.۲ گراف k- منتظم، گرافی است که درجهٔ هر رأس آن برابر k است.

تعریف۱.۳ گراف دوبخشی G را نیمه‌منتظم گوییم هرگاه درجه رئوس در هر بخش با هم برابر باشند.

تعریف۱.۴ زیرمجموعه‌ای از $E(G)$ را یک تطابق گویند اگر هیچ دو عضو آن رأس مشترک نداشته باشند.

اندازهٔ بزرگترین تطابق G راعدد تطابقی G می گویند و با $m(G)$ نشان می‌دهند.

در مورد تطابق‌های گراف‌های دو بخشی قضیهٔ مشهور هال را داریم.

قضیه ۱.۱.۱ ([۱۲]، ص. ۴۱۹) فرض کنید G گرافی دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد. دراین صورت G دارای تطابقی است که تمام رئوس X را می‌پوشاند اگر و تنها اگر برای هر $S \subseteq X$ تعداد رئوسی از Y که دارای همسایه‌ای در S هستند حداقل به‌اندازهٔ $|S|$ باشد.

تعریف۱.۵ در گراف G، یک خوشه، زیرمجموعه‌ای از رئوس آن است به‌طوری‌که رئوس آن دوبه‌دو با هم مجاور هستند. زیرمجموعه‌ای ازرئوس G که هیچ‌کدام از رئوس آن با هم مجاور نباشند را یک مجموعهٔ مستقل گویند.

تعریف۱.۶ فرض کنید G و H دو گراف رأس مجزا باشند. منظور از پیوند G و H، گراف حاصل از اجتماع G و H و سپس اتصال تمام رئوس G به تمام رئوس H است. پیوند G و H را با نماد $G \vee H$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱.۷ زیرگراف القاء شده روی $S \subseteq V(G)$، زیرگرافی است که مجموعهٔ رئوس آن S است و شامل تمام یال‌هایی از G است که دو سر آن‌ها در S هستند. هم‌چنین منظور از $G - S$ زیرگراف القایی روی $V(G) \setminus S$ است.

نمادگذاری گراف‌های کامل، مسیر، دور و ستاره از مرتبهٔ n را به‌ترتیب با K_n، P_n، C_n و S_n نشان می‌دهیم.

تعریف۱.۸ گراف دو بخشی کامل گرافی دو بخشی با دو بخش X و Y است که در آن هر رأس از X با هر رأس از Y مجاور است. اگر $|X| = t$ و $|Y| = s$، این گراف را با $K_{t,s}$ نمایش می‌دهند.

تعریف۱.۹ گراف مکمل G که آن را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن $V(G)$ است و دو رأس u و v در آن با هم مجاورند اگر و تنها اگر u و v در G با هم مجاور نباشند.

تعریف۱.۱۰ عدد رنگی رأسی گراف G که آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم، برابر است با کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ کردن رئوس G به‌طوری که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند.

تعریف۱.۱۱ عدد همبندی (رأسی) گراف G که آن را با $\kappa(G)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین عدد طبیعی k است به‌قسمی‌که زیرمجموعه‌ای k-عضوی از رئوس مانند S موجود باشد چنان‌که $G-S$ ناهمبند یا گراف تک رأسی باشد.

تعریف۱.۱۲ اگر f و g دو تابع روی اعداد طبیعی باشند، آنگاه گوییم g، $O(f)$ است هرگاه اعداد مثبتی مانند c و N موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $n>N$، $|g(n)|\leq c|f(n)|$. هم‌چنین گوییم g، $o(f)$ است هرگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=0$.

۲.۱ مقدماتی از نظریهٔ ماتریس‌ها

این بخش به مقدماتی از نظریهٔ ماتریس‌ها اختصاص دارد. تمام این مطالب و هم‌چنین جزئیات بیشتر را می‌توانید در مرجع [۳۵] ببینید. مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ که درایه‌های آن‌ها متعلق به میدان $\mathbb{R}$ باشند را با $M_n(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱ ([۳۵]، ص. ۱۷۱) اگر $A\in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن باشد، آنگاه مقادیر ویژهٔ آن همگی اعداد حقیقی هستند. به‌علاوه یک پایه متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ A برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. همچنین A قطری شدنی است و رتبهٔ آن برابر تعداد مقادیر ویژهٔ ناصفر آن است.

نمادگذاری مقادیر ویژهٔ یک ماتریس متقارن $A\in M_n(\mathbb{R})$ را معمولاً با $\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه بعد به قضیهٔ رِیلی-ریتز معروف است.

قضیه ۲.۲.۱ ([۳۵]، ص. ۱۷۶) فرض کنید $A\in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن با مقادیر ویژهٔ $\lambda_n\leq\cdots\leq\lambda_1$ باشد. اگر $\mathbf{x}$ بردار ناصفری در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه

$$\lambda_n\leq\frac{\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top\mathbf{x}}\leq\lambda_1.$$

به‌علاوه داریم،

$$\lambda_1=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top\mathbf{x}},\quad \lambda_n=\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top\mathbf{x}}.$$

قضیهٔ زیر که به قضیهٔ درهم‌بافتگی معروف است یکی از ابزارهای مهم در نظریهٔ جبری گراف‌ها است.

قضیه ۳.۲.۱ ([۳۱]، ص. ۱۰۷) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن با مقادیر ویژهٔ $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1$ و B یک زیرماتریس اصلی $m \times m$ آن با مقادیر ویژهٔ $\eta_m \geq \cdots \geq \eta_1$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $i = 1, \ldots, m$،

$$\lambda_{n-m+i} \leq \eta_i \leq \lambda_i.$$

نامساوی‌های قضیهٔ بعد به نامساوی‌های کورانت–وایل معروف هستند.

قضیه ۴.۲.۱ ([۳۵]، ص. ۱۸۴) فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریس‌هایی متقارن باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}
\lambda_{i+j-1}(A+B) &\leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \quad (1 \leq i, j \leq n,\ i+j \leq n+1) \\
\lambda_{i+j-n}(A+B) &\geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \quad (1 \leq i, j \leq n,\ i+j \geq n+1).
\end{aligned}$$

به‌ویژه داریم

$$\lambda_1(A+B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B).$$

قضیه ۵.۲.۱ ([۲۵]) فرض کنید A و B دو ماتریس متقارن از مرتبهٔ n باشند. در این صورت برای $1 \leq k \leq n$،

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B).$$

در این‌جا نسخه‌ای از قضیهٔ پرون ـ فروبنیوس را در مورد ماتریس‌های متقارن یادآوری می‌کنیم. توجه کنید که این قضیه در حالت کلی‌تری برقرار است. برای یک ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ که متقارن و با درایه‌های نامنفی باشد، منظور از گراف متناظر $A = (a_{ij})$ گراف G است با $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ و $E(G) = \{\{i, j\} \mid a_{ij} > 0\}$.

قضیه ۶.۲.۱ ([۳۱]، ص. ۱۷۸) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن با درایه‌های نامنفی و با مقادیـــر ویـــژهٔ $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_۱$ باشد. در این صورت

۱. به‌ازای هر i، $|\lambda_i| \leq \lambda_۱$؛

۲. $\lambda_۱$ دارای بردار ویژه‌ای است که تمام درایه‌های آن نامنفی هستند؛

۳. اگر $\mathbf{x}$ بردار ویژه‌ای از A باشد که تمام درایه‌های آن ناصفر و هم‌علامت باشند، آنگاه $\mathbf{x}$ بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_۱$ است؛

۴. اگر گراف متناظر با A همبند باشد، تکرر $\lambda_۱$ برابر ۱ است و درایه‌های هر بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_۱$ همگی مثبت یا همگی منفی هستند.

۱.۲.۱ افرازهای متساوی

فرض کنید A ماتریسی حقیقی و متقارن است که سطرها و ستون‌هایش با $X = \{۱, \ldots, n\}$ اندیس‌گذاری شده‌اند. فرض کنید $\{X_۱, \ldots, X_m\}$ افرازی از X باشد. ماتریس مشخصهٔ S متناظر با این افراز، ماتریسی $n \times m$ است که ستون jام آن برای $j = ۱, \ldots, m$ بردار مشخصهٔ X_j است. حال A را مطابق با $\{X_۱, \ldots, X_m\}$ افراز می‌کنیم، یعنی

$$A = \begin{pmatrix} A_{۱,۱} & \ldots & A_{۱,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,۱} & \ldots & A_{m,m} \end{pmatrix},$$

که در آن $A_{i,j}$ زیرماتریسی است که سطرهایش متناظر با عناصر X_i و ستون‌هایش متناظر با عناصر X_j هستند. فرض کنید b_{ij} میانگین اعداد حاصل از مجموع سطرهای A_{ij} باشد. دراین صورت ماتریس $B = (b_{i,j})$ ماتریس خارج قسمت نامیده می‌شود. اگر جمع هر سطر در تمام A_{ij}ها مقداری ثابت باشد، آنگاه افراز فوق را یک افراز متساوی گوییم. دراین صورت برای هر $i, j = ۱, \ldots, m$ خواهیم داشت

$$A_{i,j}\mathbf{1} = b_{i,j}\mathbf{1}$$

که درآن $\mathbf{1}$ بردار تماماً ۱ است. هم‌چنین داریم

$$AS = SB.$$

حال اگر θ مقدار ویژه‌ای از B با بردار ویژهٔ $\mathbf{v}$ باشد، آنگاه $AS\mathbf{v} = SB\mathbf{v} = \theta S\mathbf{v}$. لذا قضیه کارآمد زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۷.۲.۱ اگر ماتریس متقارن و حقیقی A دارای افرازی متساوی با ماتریس خارج قسمت B باشد، آنگاه هر مقدار ویژهٔ B با تکرر m مقدار ویژه‌ای از A است با تکرر حداقل m. به‌ویژه چندجمله‌ای مشخصهٔ B چندجمله‌ای مشخصهٔ A را می‌شمارد.

۳.۱ مقدماتی از نظریهٔ جبری گراف‌ها

این بخش اختصاص به مقدماتی از نظریهٔ جبری گراف‌ها دارد. تمام این مطالب و هم‌چنین جزئیات بیشتر را می‌توانید در مراجع [۱۱]، [۱۸]، [۱۹] و [۳۱] ببینید.

تعریف۱.۱۳ ماتریس مجاورت گراف G با مجموعه رئوس $\{۱, \ldots, n\}$ یک ماتریس $n \times n$، $A = (a_{ij})$ است که سطرها و ستون‌های آن با رئوس G اندیس‌گذاری شده‌اند و $a_{ij} = ۱$ اگر دو رأس i و j در گراف G مجاور باشند و $a_{ij} = ۰$ در غیر این صورت. به‌وضوح A ماتریسی متقارن است.

ملاحظه ۱.۳.۱ ([۱۹]، ص. ۱) اگر A و A' ماتریس‌های مجاورت گراف G با دو اندیس‌گذاری متفاوت از رئوس باشند، آنگاه یک ماتریس جایگشتی مانند P وجود دارد که $A' = PAP^{\top}$ و چون برای هر ماتریس جایگشتی $PP^{\top} = I$، بنابراین A و A' متشابه هستند.

۱.۳.۱ ماتریس‌های لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت

فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $\{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد. ماتریس وقوع G، که آن را با X نشان می‌دهیم، ماتریسی $n \times m$ است که سطرها و ستون‌های آن به‌ترتیب با رئوس و یال‌های G اندیس‌گذاری شده‌اند و درایه‌های آن به‌صورت

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \text{ رأسی از } e_j \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند. حال فرض کنید تمام یال‌های G را جهت‌دار کنیم. در این صورت ماتریس وقوع جهت‌دار G که آن را با N نشان می‌دهیم مشابه با X تعریف می‌شود که درایه‌های آن با

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } e_j \text{ یال خروجی از رأس } v_i \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر } e_j \text{ یال ورودی به رأس } v_i \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند. فرض کنید D ماتریسی قطری باشد که درایه‌های قطری آن (با همان ترتیب سطرهای ماتریس مجاورت) دنباله درجات G باشد. D را ماتریس درجات G گویند. در این صورت $L = NN^\top = D - A$ ماتریس لاپلاسین G و $Q = XX^\top = D + A$ ماتریس لاپلاسین بدون علامت G هستند. چون L و Q ماتریس‌هایی متقارن‌اند، مقادیر ویژهٔ آن‌ها حقیقی هستند. مقادیر ویژهٔ L و Q را به ترتیب با $\mu_1(G) \geq \cdots \geq \mu_n(G)$ و $q_1(G) \geq \cdots \geq q_n(G)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که مقادیر ویژهٔ L مستقل از جهت‌دهی است که برای یال‌های G در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲.۳.۱ ([۳۱]، ص. ۲۸۰) اگر G گرافی k-منتظم با مقادیر ویژهٔ مجاورت $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ باشد، در این صورت مقادیر ویژهٔ ماتریس لاپلاسین گراف G عبارت‌اند از $k - \lambda_1 \leq \cdots \leq k - \lambda_n$.

حال با توجه به آنکه رد ماتریس‌های L و Q برابر $2m$ و رد ماتریس‌های L^2 و Q^2 برابر $\sum_{i=1}^n d_i^2 + 2m$ می‌باشند که در آن $d_1, \ldots, d_n$ دنبالهٔ درجات رئوس است، قضیه ساده اما مفید زیر را داریم:

قضیه ۳.۳.۱ مجموع مقادیر ویژهٔ ماتریس لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت یک گراف و مجموع مربعات آن‌ها به‌ترتیب برابر $2m$ و $\sum_{i=1}^n d_i^2 + 2m$ است.

قضیه ۴.۳.۱ ([۳۱]، ص. ۱۶۶–۸) فرض کنید X و N به‌ترتیب ماتریس‌های وقوع و وقوع علامت‌دار گراف G باشند. رتبهٔ N برابر $n - c$ است که در آن c تعداد مؤلفه‌های همبندی G است. رتبهٔ X برابر $n - b$ است که در آن b تعداد مؤلفه‌های همبندی دوبخشی G است.

از آن‌جا که برای هر ماتریس حقیقی M، داریم $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} MM^\top$، نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۵.۳.۱ تکرر مقدار ویژهٔ صفر در طیف لاپلاسین گراف G برابر تعداد مؤلفه‌های همبندی G و تکرر مقدار ویژهٔ صفر در طیف لاپلاسین بدون علامت G برابر تعداد مؤلفه‌های همبندی G است که دوبخشی هستند.

قضیهٔ مفید زیر را در مقالات متعددی از جمله [۳۳] می‌توان یافت. از آن‌جایی که در بیشتر منابع اثبات آن ذکر نگردیده، در این‌جا اثبات کوتاه آن‌را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۳.۱ ماتریس‌های L و Q از گراف G متشابه‌اند اگر و تنها اگر G دوبخشی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید G دو بخشی باشد. در این صورت Q را می‌توان به صورت

$$\begin{pmatrix} D_۱ & B \\ B^\top & D_۲ \end{pmatrix}$$

نوشت که در آن $D_۱$ و $D_۲$ ماتریس‌هایی قطری‌اند. داریم

$$\begin{pmatrix} -I & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_۱ & B \\ B^\top & D_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & O \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_۱ & -B \\ -B^\top & D_۲ \end{pmatrix}.$$

بنابراین L و Q متشابه هستند. حال به‌عکس اگر L و Q متشابه باشند، تکرر مقدار ویژهٔ صفر در طیف L با تکرر مقدار ویژهٔ صفر در طیف Q یکی است، لذا بنابر نتیجهٔ ۵.۳.۱، تمام مؤلفه‌های همبندی G دوبخشی‌اند. ■

خاصیت درهم‌بافتگی زیر نتیجه‌ای از نامساوی‌های کورانت–وِیل(قضیهٔ ۴.۲.۱) است.

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنید G یک گراف و e یالی از آن باشد. در این صورت بین مقادیر ویژهٔ لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت G و $G' = G - e$ روابط زیر برقرارند:

$$\mu_۱(G) \geq \mu_۱(G') \geq \mu_۲(G) \geq \mu_۲(G') \geq \cdots \geq \mu_n(G) = \mu_n(G') = ۰,$$
$$q_۱(G) \geq q_۱(G') \geq q_۲(G) \geq q_۲(G') \geq \cdots \geq q_n(G) \geq q_n(G').$$

گزاره ۸.۳.۱ ([۱۳]، ص. ۸) فرض کنید n عددی طبیعی باشد.

(i) مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت K_n عبارتند از $۲n - ۲$ و $n - ۲$ به‌ترتیب با تکررهای ۱ و $n - ۱$.

(ii) مقادیر ویژهٔ لاپلاسین *(بدون علامت)* $K_{r,s}$ عبارتند از $r+s$، r، s و ۰ به‌ترتیب با تکرارهای ۱، $s-1$، $r-1$ و ۱. به‌ویژه مقادیر ویژهٔ لاپلاسین *(بدون علامت)* $S_n = K_{1,n-1}$ عبارتند از n، ۱ و ۰ به‌ترتیب با تکرارهای ۱، $n-2$ و ۱.

گزاره ۹.۳.۱ ([۱۹]، ص. ۱۸۵) برای هر گراف n رأسی G و هر $i = 1, \dots, n-1$ داریم

$$\mu_i(G) = n - \mu_{n-i}(\overline{G}).$$

از گزارهٔ ۹.۳.۱، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

گزاره ۱۰.۳.۱ برای هر گراف n رأسی G، $\mu_1(G) \le n$ و تساوی در آن رخ می دهد اگر و تنها اگر $\overline{G}$ ناهمبند باشد.

۴.۱ مروری بر فصل‌های رساله

مقصودِ نظریه طیفی گراف‌ها استخراج روابط بین گراف‌ها و ماتریس‌ها به‌منظور مطالعهٔ مسائلی در مورد گراف‌ها با استفاده از مقادیر ویژهٔ ماتریس‌هایی است که به‌روش معینی به گراف‌ها وابسته شده‌اند. از آنجایی که ماتریس‌های مختلفی را می‌توان به گراف‌ها نسبت داد، برای هر کدام از این ماتریس‌ها می‌توان یک ''نظریهٔ طیفی گراف‌ها'' داشت؛ مثلاً نظریهٔ طیفی گراف‌ها مبتنی بر ماتریس مجاورت یا نظریهٔ طیفی گراف‌ها مبتنی بر ماتریس لاپلاسین و غیره. در سال‌های اخیر جریانی برای پایه‌گذاری یک نظریه طیفی گراف‌ها مبتنی بر ماتریسی دیگر به‌نام ماتریس لاپلاسین بدون علامت به‌وجود آمده است [۱۷، ۲۰–۲۲]. برای گراف G، ماتریس $Q(G) = D(G) + A(G)$ ماتریس لاپلاسین بدون علامت G است که در آن $A(G)$ ماتریس مجاورت و $D(G)$ ماتریس قطری درجات G است. این رساله که اغلب به ماتریس $Q(G)$ می‌پردازد در دسته‌بندی نظریهٔ طیفی گراف‌ها مبتنی بر ماتریس لاپلاسین بدون علامت جای دارد. در این رساله تعدادی از حدس‌هایی را که شامل کران‌هایی در مورد مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌هاست، بررسی می‌کنیم. تعدادی از این حدس‌ها را به طور کامل و برخی را به طور جزیی اثبات می‌کنیم و بعضی دیگر را رد می‌کنیم. این رساله شامل چهار فصل است و به صورتی که در پایین شرح داده شده تنظیم شده است.

در فصل ۲ نامساوی‌هایی از نوع نوردهاس–گادم برای مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت و لاپلاسین گراف‌ها به دست می‌آوریم. مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت و لاپلاسین G را که به صورت نزولی مرتب

شده‌اند به‌ترتیب با $\mu_1(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G) = 0$ و $q_1(G) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq 0$ نمایش می‌دهیم. نوردهاسو گادِم مجموع و حاصل‌ضرب عدد رنگی یک گراف و مکملش را بررسی کردند. آن‌ها برای این مقادیر کران‌های بالا و پایین برحسب n، تعداد رئوس G به‌دست آوردند. از آن به‌بعد هر کران روی مجموع یا حاصل‌ضرب یک پارامتر گراف و مکملش یک نامساوی از نوع نوردهاس–گادِم نامیده می‌شود. در این فصل مقادیر $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$ و $q_1(G) + q_1(\overline{G})$ را مطالعه می‌کنیم. در مورد لاپلاسین مطالعهٔ این پارامتر معادل مطالعهٔ $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G)$ است که پهنای لاپلاسین گراف G نام دارد. در [۵۴،۵۲] حدس زده شده است که $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) \leq n - 1$ یا به‌طور معادل $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1$. تاکنون نتایج جزیی متعددی [۹، ۱۵، ۲۶، ۲۷، ۳۶–۳۸، ۵۱] در مورد این حدس توسط افراد مختلفی به‌دست آمده‌اند. در فصل ۲ این حدس را برای گراف‌های دوبخشی ثابت می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم برای هر گراف دوبخشی G، $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1)$. آچیچه و هَنسن [۴] حدس زدند $q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 3n - 4$ و $q_1(G)q_1(\overline{G}) \leq 2n(n-2)$. نامساوی اول را ثابت و نامساوی دوم را با ساختن خانواده‌ای از گراف‌های H_n که $q_1(H_n)q_1(\overline{H_n})$ از مرتبهٔ $2/15n^2 + O(n)$ است، رد می‌کنیم.

فصل ۳ اختصاص به مطالعه کرانی برای مجموع‌های جزیی مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها دارد. به طور دقیق‌تر، کران بالایی برای مجموع‌های جزیی مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها حدس می زنیم و در چند حالت خاص این حدس را اثبات می‌کنیم. براور([۱۳]، ص. ۵۳) حدسی را به صورت زیر مطرح کرد که برای هر گراف G با n رأس، به‌ازای $k = 1, \ldots, n$، $\sum_{i=1}^{k} \mu_i(G) \leq e(G) + \binom{k+1}{2}$ که در آن $e(G)$ نشان‌دهندهٔ تعداد یال‌های G است. درستی حدس براور در برخی حالت‌های خاص اثبات شده است. مشابه با حدس براور، در مورد مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها حدس زیر را مطرح می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{k} q_i(G) \leq e(G) + \binom{k+1}{2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

نکتهٔ جالب توجه در مورد حدس فوق این است که در اغلب گراف‌ها مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت از مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بزرگ‌تر هستند. در تأیید این حدس، آن را به‌ازای $k = 1, 2$ برای تمامی گراف‌ها و به‌ازای تمام kها برای گراف‌های منتظم ثابت می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که حدس فوق به طور مجانبی به‌ازای هر kی دقیق است.

در فصل ۴ مجموع توان‌های مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها را مطالعه می‌کنیم. برای گراف

داده شدهٔ G، فرض کنید $q_1(G),\dots,q_r(G)$ تمام مقادیر ویژهٔ ناصفر لاپلاسین بدون علامت G باشند. قرار می‌دهیم $T_\alpha(G)=q_1(G)^\alpha+\cdots+q_r(G)^\alpha$. در [۵۳] دو حدس در مورد مقادیر ماکسیمم و مینیمم پارامتر $T_\alpha(G)$ در میان گراف‌های دوبخشی و در میان گراف‌های با عدد همبندی محدود مطرح گردید. در این فصل با مطالعهٔ رفتار مجانبی $T_\alpha(G)$، دو حدس مذکور را رد می‌کنیم.

از این رساله، مقالات [۵–۷] استخراج شده‌اند.

فصل ۲

نامساوی‌های از نوع نوردهاس-گادم برای مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت

در این فصل نامساوی‌هایی از نوع نوردهاس-گادم برای مقادیر ویژهٔ لاپلاسین بدون علامت و لاپلاسین گراف‌ها به دست می‌آوریم. مقالهٔ [۷] مستخرج از نتایج این فصل است.

ابتدا انگیزه و تاریخچه‌ای از این نوع نتایج را به اختصار شرح می‌دهیم. نوردهاس و گادِم [۴۵] مجموع و حاصل‌ضرب عدد رنگی یک گراف و مکملش را بررسی کردند. آن‌ها برای این مقادیر کران‌های بالا و پایین زیر را برحسب n، تعداد رئوس G به‌دست آوردند:

$$\begin{aligned} ۲\sqrt{n} &\leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + ۱, \\ n &\leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+۱)^۲}{۴}. \end{aligned}$$

از آن به‌بعد هر کران روی مجموع یا حاصل‌ضرب یک پارامتر گراف و مکملش یک نامساوی از نوع نوردهاس-گادِم نامیده می‌شود. در [۴] تمام نتایج از نوع نوردهاس-گادم برای پارامترهای مختلف گراف‌ها جمع‌آوری شده است. تعدادی از نامساوی‌های از نوع نوردهاس-گادم شامل مقادیر ویژهٔ گراف‌هاست. اولین نتیجهٔ معروف از این دست مربوط به نوسالو امین و حکیمی [۳] است، که نشان می‌دهد برای هر گراف G از مرتبهٔ n داریم

$$\lambda(G) + \lambda(\overline{G}) < \sqrt{۲}(n - ۱),$$

که در آن $\lambda(H)$ بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس مجاورت گراف H است. نیکیفرُف [۴۴] این نتیجه را به صورت زیر بهبود بخشید

$$\lambda(G) + \lambda(\overline{G}) < (\sqrt{۲} - ۱۰^{-۷})n$$

و حدس زد که

$$\lambda(G) + \lambda(\overline{G}) < \frac{۴}{۳}n + O(۱).$$

چیکواری [۱۶] نشان داد $\lambda(G) + \lambda(\overline{G}) < \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}n - ۱$ و همچنین ثابت کرد هر کران مجانبی به‌صورت $\lambda(G)+\lambda(\overline{G}) < cn+o(n)$ را نتیجه می‌دهد. $\lambda(G)+\lambda(\overline{G}) < cn-۱$، کرانی به‌صورت حدس نیکیفرف توسط ترپایی [۴۸] اثبات شد. لذا با توجه به نتیجهٔ چیکواری، ثابت شد

$$\lambda(G) + \lambda(\overline{G}) < \frac{۴}{۳}n - ۱.$$

در این فصل نامساوی‌های از نوع نوردهاس–گادم را برای مقادیر ویـژهٔ لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت گراف‌ها مطالعه می‌کنیم. به طور دقیق تر مقادیر $\mu_۱(G) + \mu_۱(\overline{G})$ و $q_۱(G) + q_۱(\overline{G})$ را مطالعه می‌کنیم. در مورد لاپلاسین با توجه به گزارهٔ ۹.۳.۱ داریم $\mu_۱(\overline{G}) = n - \mu_{n-۱}(G)$، بنابراین

$$\mu_۱(G) + \mu_۱(\overline{G}) = n + \mu_۱(G) - \mu_{n-۱}(G)$$

لذا به‌طور معادل می‌توان

$$\mu_۱(G) - \mu_{n-۱}(G)$$

را در نظر گرفت که پهنای لاپلاسین گراف G نام دارد. در [۵۴،۵۲] حدس زده شده است که

$$\mu_۱(G) - \mu_{n-۱}(G) \leq n - ۱$$