چکیده

در این پایان‌نامه ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و ایده‌آل‌های پریمال را بررسی می‌کنیم. همچنین پس از معرّفی چند نوع از ایده‌آل‌های اوّل وابسته به یک ایده‌آل، به بررسی رابطه بین ایده‌آل‌های معرّفی شده می‌پردازیم. هدف نهایی، بیان شرایطی است که تحت این شرایط بتوان هر ایده‌آل یک حلقه را به صورت اشتراک غیرزائد از ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر نمایش داد. در نهایت شرایطی را مطرح می‌کنیم که این نمایش یکتا باشد. سپس نشان می‌دهیم حلقه‌هایی که هر ایده‌آل سره آن‌ها را می‌توان به طور منحصربفرد به صورت اشتراک غیرزائد از ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر نمایش داد، دقیقاً حلقه‌هایی هستند که هر ایده‌آل سره آن‌ها را می‌توان به طور منحصربفرد به صورت اشتراک غیرزائد از توان‌های ایده‌آل‌های ماکزیمال آن حلقه نمایش داد.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر، ایده‌آل پریمال، ایده‌آل رادیکالی، حلقه پراکنده و حلقه ایده‌آل اصلی ویژه

فهرست مطالب

مقدمه ۲

۱ ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و پریمال ۵

۲ تجزیه به ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر ۱۸

۳ تجزیه به ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر ۳۵

فهرست مراجع ۶۵

واژه‌نامه ۶۶

Abstract ۷۰

مقدّمه

از زمانی که نظریه اعداد و جبر به شکلی جدّی و کلاسیک در ریاضیات مورد توجّه قرار گرفت، ریاضیدانان در پی آن بودند تا مفاهیم جبری بیان شده را به اجزایی تجزیه نمایند که دارای خواص شناخته شده‌تر و خوش رفتارتر هستند. با گذر زمان و پیشرفت ریاضیات و شاخه جبر، تجزیه، نقش مهم و کارایی در شناخت و بررسی خواص مفاهیم جبری ایفا نمود. مثلاً در حلقه‌ها، انواع ایده‌آل‌ها با خواص متفاوت مطرح گشت و ریاضیدانان به دنبال خواصی بودند که ایده‌آل‌های حلقه‌های با این خواص را بتوان به نوع خاصی از ایده‌آل‌ها تجزیه نمایند. با این کار، خصوصیات این حلقه‌ها و ایده‌آل‌هایشان با دیدی روشن‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد. از جمله این خاصیت‌ها نوتری بودن است. می‌دانیم که در حلقه‌های نوتری می‌توان هر ایده‌آل را به صورت اشتراک ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر نمایش داد. تجزیه به ایده‌آل‌های ابتدایی هم نوعی از تجزیه می‌باشد که در کتب کلاسیک جبر پیشرفته از جمله منبع [۵] به آن پرداخته شده است. از جمله ریاضیدانانی که سال‌ها در این مباحث فعالیت

نموده‌اند و به حق نقش به سزایی در پیشرفت این مباحث داشته‌اند، فوچز [۱] ، ویلیام هینزر [۲] و بروس البردینگ [۳] می‌باشند.

در این‌جا ما در قالب سه فصل، گزیده‌ای از تلاش‌های این سه ریاضیدان بزرگ را که در مقالاتی در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵ به چاپ رسانده‌اند ارایه می‌دهیم. این سه مقاله که شیرازه کار ما را تشکیل می‌دهند، [۱] و [۲] و [٦] می‌باشند.

کلیه حلقه‌ها در این پایان‌نامه جابه‌جایی هستند. در فصل اوّل به معرّفی مفاهیم کلیدی که در ادامه به آن نیاز داریم، می‌پردازیم. ابتدا ایده‌آل‌های پریمال را معرّفی می‌کنیم و خواص آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و به بررسی رابطه این ایده‌آل‌ها با ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر می‌پردازیم. این مفاهیم در [۲] و [۳] بررسی شده‌اند. سپس ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر را معرّفی می‌نماییم و با ذکر مثال‌هایی تفاوت این ایده‌آل‌ها را با ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر آشکار می‌کنیم. در پایان فصل گریزی بر حلقه کسرها می‌زنیم که در [۵] به طور مفصل بررسی شده است. مباحثی در این باب را که در فصل‌های بعد نیاز داریم، مختصراً و با اثباتی کوتاه مطرح می‌کنیم.

فصل ۲ را با ارایه تعریف ایده‌آل‌های اساسی و هسته حلقه‌ها آغاز می‌کنیم. سپس به بررسی هسته حلقه‌های خارج قسمتی که روی ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر ساخته شده‌اند می‌پردازیم. این مفاهیم در [۱] و [۴] با تفصیل بیشتری بررسی شده است. بعد از این مقدمه

[۱] *Laszlo Fuchs*

[۲] *William Heinzer*

[۳] *Bruse Olberding*

با معرّفی ایده‌آل اوّل زاریسکی یک ایده‌آل و تعریف حلقه‌های پراکنده، روی حلقه‌های با بعد صفر تمرکز می‌کنیم. سپس قضیه‌ای را بیان می‌نماییم که معرّف شرایطی است که تحت آن شرایط، هر ایده‌آل یک حلقه را بتوان به صورت اشتراک غیرزاید از ایده‌آل‌های ماکزیمال آن حلقه نمایش داد. در نهایت، در پایان فصل به رده‌بندی حلقه‌هایی می‌پردازیم که هر ایده‌آل آن‌ها را بتوان به صورت اشتراک غیرزاید یکتا از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر نمایش داد. فصل ۳ که فصل پایانی می‌باشد را با معرّفی ایده‌آل‌های اوّل کرول و ایده‌آل‌های اوّل بورباکی یک ایده‌آل آغاز می‌کنیم و رابطه بین ایده‌آل‌های پریمال و چنین ایده‌آل‌هایی را مطرح می‌کنیم. ایده‌آل‌های اوّل وابسته به یک ایده‌آل در منبع [۲] به تفصیل بیان گشته است. سپس با نتایج حاصل به بررسی عمیق‌تر ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و رابطه آن‌ها با ایده‌آل‌های پریمال می‌پردازیم. در قالب این کار ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر حلقه‌های حسابی را به طور دقیق مشخّص می‌کنیم. در نهایت از تمام اطّلاعات حاصل شده از این فصل‌ها استفاده کرده و قضیه پایانی را مطرح می‌کنیم. این قضیه بیان‌گر شرایطی است که تحت آن بتوان هر ایده‌آل حلقه را به صورت اشتراک غیرزاید از ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و همچنین به صورت اشتراکی از توان‌های ایده‌آل‌های ماکزیمال نمایش داد.

فصل ۱

ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و پریمال

هدف ما در این فصل بیان تعاریف لازم در دو فصل آتی و آشنایی با ایده‌آل‌های پریمال و کاملاً تحویل‌ناپذیر است. برای این منظور ابتدا مانده دو ایده‌آل نسبت به هم را تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از آن به تعریف و بررسی خواص ایده‌آل‌های پریمال می‌پردازیم. در پایان فصل ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر را معرّفی کرده و به طور مختصر با برخی خواص آن‌ها آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و J و I ایده‌آل‌های سره‌ای از R باشند. در این صورت زیرمجموعه $\{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$ از R، ایده‌آلی از R است. آن را با نماد $(I : J)$ نمایش داده و مانده $(I : J)$ می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌آل سره از R باشد. عنصر $x \in R$ را، یک عنصر نااوّل وابسته به A گوییم، اگر $A \subsetneq (A : x)$. به عبارتی، عنصر $c \in R \setminus A$ موجود باشد به نحوی که $cx \in A$. مجموعه عناصر نااوّل وابسته به A را، با $S(A)$ نمایش

می‌دهیم. بنابراین $A = (A : x)$ اگر و تنها اگر $x \notin S(A)$.

واضح است که اگر A یک ایده‌آل سره از R باشد، آن‌گاه $S(A)$ هم زیرمجموعه‌ای سره از R است. همچنین $S(A)$ شامل A است. زیرا برای هر $a \in A$، به وضوح $R = (A : a) \supsetneq A$، پس $a \in S(A)$.

حال با بیان و بررسی گزاره بعد، به شناخت مناسب‌تری از $S(A)$ دست می‌یابیم.

قضیه ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌آل سره از R باشد. در این صورت

$$S(A) = \{x \in R \mid \text{است } \tfrac{R}{A} \text{ یک مقسوم علیه صفر } x + A\}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $x + A$ یک مقسوم علیه صفر $\frac{R}{A}$ باشد. پس عنصر ناصفر $y + A$ در $\frac{R}{A}$ وجود دارد، به نحوی که $xy + A = (x + A)(y + A) = A$. لذا $xy \in A$ و چون $y + A \neq A$، پس $y \notin A$. لذا $A \subsetneq (A : x)$ و در نتیجه $x \in S(A)$.

حال اگر $x \in S(A)$ عنصری دلخواه باشد، طبق تعریف $y \in R \setminus A$ وجود دارد که $xy \in A$. پس $(x + A)(y + A) = xy + A = A$. یعنی $x + A$ یک مقسوم علیه صفر $\frac{R}{A}$ است و حکم ثابت می‌باشد. $\square$

حال تا حدودی با ساختار $S(A)$ آشنا شدیم. با اندکی تأمّل درمی‌یابیم که $S(A)$ لزوماً یک ایده‌آل نیست. زیرا $S(A)$ لزوماً نسبت به عمل جمع بسته نیست. در دو قضیه بعد به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهیم که اگر $S(A)$ ایده‌آل باشد، چه طور ایده‌آلی است و چه خصوصیّاتی دارد. آیا مشکل ایده‌آل بودن $S(A)$ تنها با بسته بودن نسبت به عمل جمع، حل می‌شود. به قضایای بعد توجّه کنید.

قضیه ۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و A ایده‌آلی سره از R باشد. اگر $S(A)$ یک ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه $S(A)$ یک ایده‌آل اوّل است.

اثبات. فرض می‌کنیم a و b عناصری از R باشند، به نحوی که $ab \in S(A)$ و $a \notin S(A)$. از آن‌جا که $ab \in S(A)$، طبق تعریف عنصر $c \in R \setminus A$ وجود دارد به نحوی که $abc \in A$. لذا $bc \in (A : a)$. چون $a \notin S(A)$، پس $A = (A : a)$ و در نتیجه $bc \in A$. از آن‌جا که $c \in R \setminus A$، طبق تعریف $b \in S(A)$. این نتیجه می‌دهد که $S(A)$ یک ایده‌آل اوّل است. $\square$

بنابراین اگر $S(A)$ یک ایده‌آل R باشد، آن‌گاه ایده‌آل اوّل R است. در این حالت $S(A)$ را ایده‌آل اوّل الحاقی A می‌نامیم.

تعریف ۵.۱ فرض کنید R یک حلقه و A ایده‌آلی سره از R باشد. اگر $S(A)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه A را یک ایده‌آل پریمال می‌نامیم. در این حالت بنا بر قضیه ۴.۱، $S(A) = P$، یک ایده‌آل اوّل R است. در این صورت A را یک ایده‌آل $P-$پریمال می‌نامیم.

قضیه ۶.۱ فرض کنید R یک حلقه و A ایده‌آلی سره از R باشد. A یک ایده‌آل پریمال است، اگر و تنها اگر هر دو عنصر حلقه که نسبت به A نااوّلند، مجموعشان نیز نسبت به A نااوّل باشد. به عبارت دیگر، مجموعه $S(A)$ نسبت به عمل جمع بسته باشد.

اثبات. اگر A یک ایده‌آل پریمال باشد، آن‌گاه طبق تعریف $S(A)$ یک ایده‌آل است و لذا نسبت به عمل جمع بسته است.

برای اثبات عکس این مطلب، فرض می‌کنیم $S(A)$ نسبت به عمل جمع بسته باشد. در این صورت، برای هر دو عنصر $a, b \in S(A)$ داریم $a + b \in S(A)$. برای هر عنصر $r \in R$ و $a \in S(A)$، طبق تعریف، عنصر $b \in R \setminus A$ وجود دارد که $ab \in A$. از آن‌جا که A ایده‌آل است، پس $(ra)b = r(ab) \in A$ و در نتیجه $ra \in S(A)$. لذا $S(A)$ یک ایده‌آل R است. $\square$

در مبحث ایده‌آل‌های پریمال گزاره‌های فراوانی وجود دارند که بسیار زیبا و کارا می‌باشند. امّا به دلیل وسعت این مبحث که پرداختن به آن ما را از بحث اصلی دور می‌نماید، با بیان چند تعریف و یادآوری به طور فهرست‌وار، از این مبحث عبور می‌نماییم و هر جا به تناسب بحث به قضایایی در این باب نیاز داشتیم، بیان و اثبات می‌کنیم. علاقه‌مندان به ایده‌آل‌های پریمال و مباحث مربوط به آن، می‌توانند به مرجع [۲] که شامل گزاره‌ها و اثبات‌های مختصر در این باب است، مراجعه نمایند. حال به بیان و یادآوری چند تعریف می‌پردازیم که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم.

فرض کنید R یک حلقه باشد. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل سره A از R را یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر نامیم، اگر اشتراک هیچ دو ایده‌آل سره اکیداً شامل خودش نباشد. همچنین ایده‌آل سره A از R را یک ایده‌آل ابتدایی و یا اوّلیه گوییم، اگر به ازای هر دو عنصر $x, y \in R$ که $xy \in A$ و $x \notin A$، عدد صحیح n وجود داشته باشد که $y^n \in A$. ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر در حالت کلّی ابتدایی نیستند. مزیّت استفاده از ایده‌آل‌های پریمال، برقرار بودن حکم بعد، بدون نیاز به هیچ شرط اضافی از جمله نوتری بودن است. قبل از بیان این قضیه تعریفی را ارائه می‌دهیم که در بیان قضیه به آن نیاز داریم. یادآوری می‌کنیم که حلقه R را یک حلقه ارزیابی گوییم، اگر هر دو ایده‌آل آن با هم

قابل مقایسه باشد.

تعریف ۷.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. R را یک حلقه حسابی نامیم، اگر برای هر ایده‌آل ماکزیمال M از R، حلقه R_M یک حلقه ارزیابی باشد.

قضیه ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از R، یک ایده‌آل پریمال است و هر ایده‌آل سره R، اشتراک ایده‌آل‌های پریمال است. در ضمن اگر R حلقه‌ای حسابی باشد، هر ایده‌آل پریمال آن یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر است.

ما درصدد اثبات این گزاره نیستیم و بیان آن تنها به سبب نشان دادن کارایی ایده‌آل‌های پریمال است. ابزارهای مورد نیاز اثبات این گزاره، در مرجع [۲] بیان شده است.

تعریف ۹.۱ فرض کنید R یک حلقه، A یک ایده‌آل سره و P یک ایده‌آل اوّل از R باشد. قرار می‌دهیم

$$A_{(P)} = \{x \in R \mid sx \in A, s \in R \setminus P \text{ برای یک }\}$$

به وضوح برای هر عنصر دلخواه $x \in R$ داریم $x \in A_{(P)}$ اگر و تنها اگر $(A : x) \nsubseteq P$. همچنین با توجّه به تعریف واضح است که $A_{(P)} = \bigcup_{s \in R \setminus P}(A : s)$.

در قضیه بعد به بررسی ساختار $A_{(P)}$ و رابطه آن با ایده‌آل A می‌پردازیم.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید R یک حلقه، A یک ایده‌آل سره و P یک ایده‌آل اوّل از R باشد. در این صورت مجموعه $A_{(P)}$ ایده‌آلی شامل A است.

اثبات. اگر x_1 و x_2 دو عنصر دلخواه از $A_{(P)}$ باشند، آن‌گاه عناصر $s_1, s_2 \in R \setminus P$ وجود دارند که $s_1x_1, s_2x_2 \in A$. از آن‌جا که $R \setminus P$ یک مجموعه ضربی بسته

است، پس $s_1s_2 \in R \setminus P$ و از ایده‌آل بودن A نتیجه می‌شود $s_1s_2(x_1 - x_2) \in A$. لذا $(x_1 - x_2) \in A_{(P)}$. حال برای هر عنصر دلخواه $x \in A_{(P)}$ و $r \in R$ عنصر $s \in R \setminus P$ وجود دارد که $sx \in A$. لذا $s(rx) = r(sx) \in A$ و در نتیجه $rx \in A_{(P)}$. بنابراین $A_{(P)}$ یک ایده‌آل R است و به وضوح شامل A می‌باشد. □

حال با تعریف مجموعه $S(A)$ و ایده‌آل $A_{(P)}$، این پرسش مطرح می‌شود که آیا بین مجموعه‌های $S(A)$ و $S(A_{(P)})$ رابطه‌ای وجود دارد؟ پاسخ این پرسش در قضیه زیر داده می‌شود.

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید R یک حلقه، A یک ایده‌آل سره و P یک ایده‌آل اوّل از R باشد. اگر $A \subseteq P$ آن‌گاه $S(A_{(P)}) \subseteq S(A)$.

اثبات. برای هر عنصر $x \in S(A_{(P)})$، طبق تعریف داریم $A_{(P)} \subsetneqq (A_{(P)} : x)$. لذا عنصر $y \in R \setminus A_{(P)}$ وجود دارد، به نحوی که $xy \in A_{(P)}$. پس عنصر $w \in R \setminus P$ موجود است که $xyw \in A$. لذا $yw \in (A : x)$. از آن‌جا که $y \notin A_{(P)}$ و $w \in R \setminus P$، پس $yw \notin A$. در نتیجه $A \subsetneqq (A : x)$ و لذا طبق تعریف $x \in S(A)$. بنابراین $S(A_{(P)}) \subseteq S(A)$. □

به یاد داریم که ایده‌آل اوّل P از حلقه R را یک ایده‌آل اوّل مینیمال ایده‌آل سره A از R نامیم، اگر $A \subseteq P$ و هیچ ایده‌آل اوّلی بین P و A نباشد. یعنی اگر Q ایده‌آل اوّلی باشد که $A \subseteq Q \subseteq P$، آن‌گاه $Q = P$.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌آل P−پریمال از R باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱) اگر Q ایده‌آل اوّلی شامل P باشد، آن‌گاه $A_{(Q)} = A$.

۲) اگر Q ایده‌آل اوّلی باشد که شامل P نیست، آن‌گاه $A \subsetneqq A_{(Q)}$.

۳) برای هرایده‌آل اوّل Q شامل A، اگر $A_{(Q)}$ یک ایده‌آل Q–پریمال باشد، آن‌گاه $Q \subseteq P$.

اثبات. ۱) به وضوح $A \subseteq A_{(Q)}$. برای اثبات عکس این رابطه شمول، فرض می‌کنیم $x \in A_{(Q)}$ عنصری دلخواه باشد. پس طبق تعریف، عنصر $y \in R \setminus Q$ وجود دارد به نحوی که $yx \in A$. امّا از آن‌جا که A یک ایده‌آل P–پریمال است و $P \subseteq Q$ و $y \notin Q$، در نتیجه $y \notin P = S(A)$ و لذا $(A : y) = A$. پس $x \in (A : y) = A$. بنابراین $A_{(Q)} \subseteq A$ و در نتیجه $A = A_{(Q)}$.

۲) از آن‌جا که $P \nsubseteq Q$، عنصر $x \in P$ وجود دارد که $x \notin Q$. از این که $x \in P$، نتیجه می‌شود که x نسبت به A نااوّل است. لذا برای یک $y \in R \setminus A$ داریم $xy \in A$. در نتیجه $y \in A_{(Q)} \setminus A$. پس $A \subsetneqq A_{(Q)}$.

۳) اگر $Q \nsubseteq P$، آن‌گاه عنصر $q \in Q$ وجود دارد که $q \notin P$. چون $A_{(Q)}$ یک ایده‌آل Q–پریمال است، پس طبق تعریف، عنصر $x \in R \setminus A_{(Q)}$ وجود دارد که $qx \in A_{(Q)}$. بنابراین عنصر $c \in R \setminus Q$ وجود دارد که $cqx \in A$. از آن‌جا که $q \notin P$، پس $cx \in A_{(P)}$. از قسمت اوّل قضیه داریم $A_{(P)} = A$ و لذا $cx \in A$. چون $c \notin Q$، پس $x \in A_{(Q)}$ که خلاف انتخاب x است. در نتیجه فرض خلف باطل است و لذا $Q \subseteq P$. □

حال به طور اجمال تعاریفی از حلقه‌ها را مرور می‌کنیم تا وارد بحث اصلی شویم. در تعریف ۷.۱ با حلقه‌های حسابی آشنا شدیم. یک دامنه صحیح حسابی را یک دامنه پروفر نامیم. دامنه صحیح R را تقریباً ددکیند گوییم، اگر برای هر ایده‌آل ماکزیمال M از

R، حلقه R_M یک دامنه ارزیابی نوتری باشد. حلقه R را شبه‌موضعی گوییم، اگر دارای فقط یک ایده‌آل ماکزیمال M باشد و در این صورت چنین حلقه‌ای را با (R, M) نمایش می‌دهیم.

همان‌طور که قبلاً هم یادآوری کردیم، ایده‌آل سره C از حلقه R را تحویل‌ناپذیر گوییم، اگر اشتراک هیچ دو ایده‌آل سره اکیداً شامل خودش نباشد. حال ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر را تعریف می‌کنیم و به مقایسه این دو نوع ایده‌آل می‌پردازیم.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید R یک حلقه و C یک ایده‌آل‌از R باشد. C را یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، اگر اشتراک هیچ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های سره اکیداً شامل خودش نباشد.

به وضوح هر ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است، ولی عکس این مطلب در حالت کلّی برقرار نیست. در ادامه پس از بیان یک لم و یک گزاره، مثال‌هایی از ایده‌آل‌هایی ارائه می‌دهیم که تحویل‌ناپذیرند، امّا کاملاً تحویل‌ناپذیر نیستند.

لم ۱۴.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد که میدان نیست. در این صورت اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ناصفر R برابر ایده‌آل صفر است.

اثبات. فرض می‌کنیم Γ مجموعه همه‌ی ایده‌آل‌های ناصفر حلقه R باشد و $I \in \bigcap_{I\in\Gamma} I \neq a \neq ۰$. پس $Ra^۲ \neq ۰$ و لذا $Ra^۲ \in \Gamma$ و در نتیجه $a \in Ra^۲$. بنابراین عنصر $r \in R$ وجود دارد که $a = ra^۲$. از آن‌جا که R یک دامنه صحیح است، پس $ra = ۱$ و لذا a یکال است. بنابراین R فاقد ایده‌آل سره غیرصفر است که با میدان نبودن R در تناقض است. پس فرض خلف باطل و اشتراک همه ایده‌آل‌های ناصفر R، صفر است. □

ایده‌آل صفر در هر دامنه صحیح R، ایده‌آلی اوّل و لذا تحویل‌ناپذیر است. امّا با توجّه به لم قبل اگر R میدان نباشد، آن‌گاه ایده‌آل صفر کاملاً تحویل‌ناپذیر نیست. مثال روشن این مبحث، ایده‌آل صفر در حلقه اعداد صحیح می‌باشد.

گزاره ۱۵.۱ فرض کنید R یک حلقه و P یک ایده‌آل اوّل از R باشد. ایده‌آل P یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر P ماکزیمال باشد.

اثبات. اگر P یک ایده‌آل ماکزیمال باشد، آن‌گاه هیچ ایده‌آل سره اکیداً شامل P وجود ندارد. پس نمی‌توانیم P را به صورت هیچ اشتراکی از ایده‌آل‌های اکیداً شامل خودش بنویسیم. لذا P یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر است.

به عکس فرض می‌کنیم ایده‌آل اوّل P کاملاً تحویل‌ناپذیر باشد. اگر دامنه صحیح $\frac{R}{P}$ میدان نباشد، طبق لم قبل، ایده‌آل P، برابر اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اکیداً شامل خودش است که این خلاف کاملاً تحویل‌ناپذیر بودن ایده‌آل P است. پس $\frac{R}{P}$ میدان است و لذا P در R ماکزیمال می‌باشد. □

با توجّه به این گزاره، هر ایده‌آل اوّل غیر ماکزیمال از حلقه R یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر R است که کاملاً تحویل‌ناپذیر نمی‌باشد. به مثال زیر توجّه کنید.

مثال ۱۶.۱ فرض کنید K یک میدان و x و y متغیّرهای مستقل باشند. حلقه $R = K[x, y]$ را در نظر بگیرید. در این صورت $P =< x >$ یک ایده‌آل اوّل غیرماکزیمال حلقه R است. پس P ایده‌آلی تحویل‌ناپذیر است که کاملاً تحویل‌ناپذیر نمی‌باشد.

برای شناخت بهتر ایده‌آل‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر، مطالعه گزاره زیر نیز خالی از لطف نیست.

گزاره ۱.۱۷ فرض کنید R یک حلقه و A ایده‌آل سره‌ای از R باشد. A یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر عنصر $x \in R$ موجود باشد، به نحوی‌که A در بین ایده‌آل‌هایی که شامل x نیستند، ماکزیمال است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر از R است. توجّه داریم که اگر A ماکزیمال باشد، آن‌گاه با انتخاب $x = ۱$ حکم برقرار است. حال فرض می‌کنیم A ایده‌آل ماکزیمال نباشد. اگر $T = \{A_i \mid A \subsetneqq A_i\}_{i\in I}$ مجموعه همه‌ی ایده‌آل‌های سره R باشد که به طور اکید شامل A هستند، آن‌گاه چون A ماکزیمال نیست، پس $T \neq \emptyset$. همچنین از آن‌جا که A کاملاً تحویل‌ناپذیر است، $A \subsetneqq \bigcap_{i\in I} A_i$. لذا عنصر $x \in R$ وجود دارد، به نحوی که $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ولی $x \notin A$. بنابراین هر ایده‌آلی که اکیداً شامل A باشد، شامل x نیز هست. پس A در بین ایده‌آل‌هایی که شامل x نیستند، ماکزیمال است و لذا در این حالت نیز حکم برقرار است.

برای اثبات عکس گزاره، فرض می‌کنیم عنصر $x \in R$ موجود باشد به نحوی که A در بین ایده‌آل‌هایی که شامل x نیستند، ماکزیمال است. اگر A یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر نباشد، آن‌گاه مجموعه‌ای از ایده‌آل‌ها مانند $\{A_i\}_{i\in I}$ وجود دارد، به نحوی‌که برای هر $i \in I$ ایده‌آل A_i به طور اکید شامل A است و $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. لذا $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$. پس $i \in I$ وجود دارد که $x \notin A_i$. در نتیجه A_i متعلّق به مجموعه ایده‌آل‌هایی که شامل x نیستند، می‌باشد. همچنین $A \subsetneqq A_i$ که در تناقض با ماکزیمال بودن A در مجموعه ایده‌آل‌های فاقد x می‌باشد. لذا A یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر است. □

قضیه پایانی این فصل بیان یکی از خصوصیّات حلقه‌های حسابی است که در فصل‌های بعد از آن استفاده می‌نماییم. قبل از بیان این قضیه، ابتدا به مطالبی در باب

حلقه کسرها نیاز داریم که فهرست‌وار مطرح می‌نماییم. از اثبات بخش‌هایی که در کتب کلاسیک جبر جابه‌جایی به طور مفصّل بیان شده است، صرف نظر می‌کنیم و بقیّه را در قالب دو گزاره اثبات می‌نماییم. از این مباحث در اثبات قضیه پایانی و در فصل‌های بعد بهره می‌بریم.

فرض کنید A ایده‌آلی سره از حلقه R و P ایده‌آلی اوّل از این حلقه باشد. همه ایده‌آل‌های حلقه R_P که حلقه ناشی از موضعی‌سازی R در ایده‌آل اوّل P است، ایده‌آل‌های توسعه یافته R، تحت نگاشت طبیعی $f : R \longrightarrow R_P$ می‌باشند و ایده‌آل $A_{(P)}$ از R، تصویر وارون ایده‌آل AR_P از R_P است. یعنی $f^{-1}(AR_P) = A_{(P)}$. ایده‌آل AR_P در حلقه R_P تحویل‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر ایده‌آل $A_{(P)}$ در حلقه R تحویل‌ناپذیر باشد. اگر I_i ها که $i = 1, 2, ..., n$، تعداد متناهی ایده‌آل از حلقه R باشند، آن‌گاه $(\bigcap I_i)^e = \bigcap I_i^e$ که در آن I_i^e ایده‌آل توسعه یافته I_i از حلقه R در حلقه R_P است، که در واقع همان ایده‌آل تولید شده توسّط $f(I_i)$ می‌باشد.

گزاره ۱.۱۸ فرض کنید R یک حلقه، A یک ایده‌آل سره و P یک ایده‌آل اوّل از R شامل A باشد. همچنین فرض کنید $f : R \longrightarrow R_P$ نگاشت طبیعی است. در این صورت توسیع ایده‌آل‌های $A_{(P)}$ و A تحت نگاشت f با هم برابر هستند.

اثبات. می دانیم که $AR_P = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in R \setminus P\}$. همچنین داریم

$$< f(A_{(P)}) >= \{\frac{b}{t} \mid b \in A_{(P)}, t \in R \setminus P\}$$.

می‌خواهیم نشان دهیم $< f(A_{(P)}) >= AR_P$.

به ازای هر عنصر دلخواه $a \in A$ و $s \in R \setminus P$، از آن‌جا که $A \subseteq A_{(P)}$ نتیجه می‌شود

که $\frac{a}{1} \in f(A_{(P)})$ و لذا $\frac{a}{s} \in < f(A_{(P)}) >$. پس $AR_P \subseteq < f(A_{(P)}) >$.

حال برای هر عنصر دلخواه $a \in A_{(P)}$ و $s \in R \setminus P$ داریم $\frac{a}{s} \in < f(A_{(P)}) >$. همچنین طبق تعریف ۹.۱ عنصر $t \in R \setminus P$ وجود دارد که $at \in A$. از آن‌جا که $t, s \in R \setminus P$ لذا $st \in R \setminus P$. بنابراین $\frac{a}{s} = \frac{at}{st} \in AR_P$. پس $< f(A_{(P)}) > \subseteq AR_P$. در نتیجه $AR_P = < f(A_{(P)}) >$. □

گزاره ۱۹.۱ فرض کنید R یک حلقه، A یک ایده‌آل سره و P یک ایده‌آل اوّل از R شامل A باشد. اگر AR_P یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از حلقه R_P باشد، آن‌گاه $A_{(P)}$ هم ایده‌آل تحویل‌ناپذیری از حلقه R است.

اثبات. فرض می‌کنیم AR_P یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از حلقه R_P باشد. اگر $A_{(P)}$ ایده‌آل تحویل‌ناپذیری از حلقه R نباشد، آن‌گاه ایده‌آل‌های سره B و C از R موجودند که $A_{(P)} = B \bigcap C$ و $A_{(P)} \subsetneqq B$ و $A_{(P)} \subsetneqq C$. طبق لم قبل $(A_{(P)})^e = AR_P$ و طبق آن‌چه مطرح شد $(B \bigcap C)^e = B^e \bigcap C^e$. پس $AR_P = B^e \bigcap C^e$. حال اگر $AR_P = B^e$ آن‌گاه برای هر عنصر دلخواه $b \in B$ داریم $\frac{b}{1} \in B^e = AR_P$. پس عناصر $a \in A$ و $s \in R \setminus P$ وجود دارند که $\frac{b}{1} = \frac{a}{s} \in AR_P$. لذا عنصر $t \in R \setminus P$ وجود دارد که $t(bs - a.1) = 0$. در نتیجه $bst = at \in A$. چون $s, t \in R \setminus P$، پس $st \in R \setminus P$ و طبق تعریف ۹.۱ داریم $b \in A_{(P)}$. لذا $B \subseteq A_{(P)}$ و چون $A_{(P)} \subseteq B$ داریم $A_{(P)} = B$ که خلاف تعریف B است. بنابراین $AR_P \subsetneqq B^e$. همچنین $AR_P \subsetneqq C^e$ که خلاف تعریف AR_P است. در نتیجه $A_{(P)}$ یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از R است. □

قضیه ۲۰.۱ فرض کنید R یک حلقه حسابی و A یک ایده‌آل سره از R باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل ماکزیمال M شامل A، ایده‌آل $A_{(M)}$ یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از

R است.

اثبات. چون R یک حلقه حسابی است، پس به ازای هر ایده‌آل ماکزیمال M از R، حلقه R_M یک حلقه ارزیابی است. حال اگر AR_M ایده‌آل تحویل‌ناپذیر R_M نباشد، آن‌گاه ایده‌آل‌های B و C از R_M وجود دارند که اکیداً شامل AR_M هستند و $AR_M = B \bigcap C$. چون R_M یک حلقه ارزیابی است، لذا $B \subseteq C$ یا $C \subseteq B$ و این نتیجه می‌دهد که $AR_M = B$ یا $AR_M = C$ که یک تناقض است. پس AR_M تحویل ناپذیر است و طبق گزاره قبل $A_{(M)}$ ایده‌آل تحویل‌ناپذیر R می‌باشد. $\square$

فصل ۲

تجزیه به ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر

در فصل گذشته تعاریف مورد نیاز جهت ادامه بحث مطرح شد و تا حدودی با ایده‌آل‌های پریمال آشنا گشتیم. در این فصل ابتدا اشتراک غیرزاید از ایده‌آل‌ها را در یک حلقه تعریف می‌کنیم و در صدد بیان شرایط حلقه‌هایی هستیم که هر ایده‌آل آن‌ها را می‌توان به صورت اشتراک ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر نمایش داد و تحت این شرایط، اشتراک‌ها غیرزاید و یکتا هستند. پس با این کار به شناختی کامل از ایده‌آل‌های چنین حلقه‌هایی دست می‌یابیم. جهت رده‌بندی این حلقه‌ها، پس از بیان مطالب ابتدایی روی حلقه‌های با بعد صفر تمرکز می‌کنیم و شرایط لازم و کافی برای تحقّق اهدافمان را در این حلقه‌ها بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌آل سره از R باشد. اگر $A = \bigcap_{i\in I} C_i$ که در آن هر C_i یک ایده‌آل سره از R است، آن‌گاه این نمایش را یک اشتراک غیر زاید از ایده‌آل‌ها نامیم، اگر هیچ یک از C_iها بدون تغییر A قابل حذف نباشد. یعنی با حذف هر

یک از C_iها ایده‌آل A به ایده‌آل دیگری تبدیل گردد و یا به عبارتی، به ازای هر $i \in I$ داشته باشیم $\bigcap_{j\in I, j\neq i} C_j \nsubseteq C_i$.

حال با ارائه یک تعریف، ابزارهای لازم برای بیان لم بعد را مهیّا می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول است. زیرمدول سره ناصفر N از M را یک زیرمدول اساسی می‌نامیم، اگر اشتراک آن با هر زیرمدول ناصفر M، غیرصفر باشد. در این صورت N را این‌گونه نمایش می‌دهیم $N \hookrightarrow M$. اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اساسی M را هسته‌ی مدول M نامیم و با $Soc(M)$ نمایش می‌دهیم. پس $Soc(M) = \bigcap_{N\hookrightarrow M} N$. در صورتی که M دارای زیرمدول اساسی نباشد، هسته برابر صفر تعریف می‌گردد.

به طور معادل در حلقه جابه‌جایی R، یک ایده‌آل سره و ناصفر را ایده‌آل اساسی می‌نامیم، در صورتی که با تمام ایده‌آل‌های ناصفر R، اشتراک غیرصفر داشته باشد. هسته حلقه را با $Soc(R)$ نمایش می‌دهیم که برابر اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اساسی R است. اگر R ایده‌آل اساسی نداشته باشد، هسته را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

حال مطالبی را در زمینه هسته حلقه‌هابه طور مختصر مطرح می‌کنیم. اگر C یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر از حلقه R باشد، حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{C}$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $C^* = \bigcap\{J \mid$ ایده‌آلی اکیداً شامل C است $J\}$. از آن‌جا که C یک ایده‌آل کاملاً تحویل‌ناپذیر است و با توجّه به این‌که بین C و C^* ایده‌آلی وجود ندارد، لذا $\frac{C^*}{C}$ ایده‌آل مینیمالی از $\frac{R}{C}$ است. بنابراین $\frac{C^*}{C}$ به عنوان $R-$مدول ساده است و در نتیجه ایده‌آل ماکزیمال M از R وجود دارد که $\frac{C^*}{C} \cong \frac{R}{M}$(به عنوان $R-$مدول). حال فرض می‌کنیم $\frac{A}{C}$