دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

قضایای نقطه ثابت روی توابع مجموعه‌ای

نگارش

سمانه داودی

استاد راهنما

دکتر مجید اسحقی گرجی

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

تیر ماه ۹۰

قدردانی

نگارش این پایان نامه مرهون زحمات صادقانه و بی شائبه تنی چند از عزیزانی است که بر خود فرض می دانم در همین آغاز سپاس خویش را تقدیمشان دارم. نخست از آقای دکتر مجید اسحقی گرجی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر خود هموار نموده‌اند تشکر و قدردانی می نمایم و به جهت ارشادات بی دریغ آقای دکتر محمود بیدخام از ایشان نیز صمیمانه سپاس گزاری می نمایم .

نگارش و تدوین ابواب این پایان نامه مرهون سعه صدر دیگر عزیزیست که باامعان نظر خویش مرا در آماده سازی مطالب این پایان نامه یار و مددکار بوده اند سپاس خالصانه خویش را به آقای باغانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی تقدیم می دارم.

سربلندی همه این عزیزان را از خداوند منان خواستارم .

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

آن ها که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه عمر

توانشان رفت تا به توانایی برسم

مویشان سفید گشت تا رویم سفید بماند

آن ها که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی من است

آن ها که راستی قامتم، در شکست قامتشان تجلی یافت

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از

عشق و محبت و

خضوع بر دستشان بوسه می زنم.

وهمسرمهربانم

که بی یاری او پیمودن این راه ممکن نبود.

چکیده

در این پایان نامه به‌شرایط خاص برای وجود نقطه ثابت مشترک برای توابع مجموعه مقدارF,G روی فضاهای متریک مرتب کامل $(X,\preceq,d)$ می پردازیم. هم چنین یک اثبات ساده از قضیه ی نقطه ثابت ندلر و نقطه ثابت باناخ ارائه می دهیم و با در نظر گرفتن شرایطی به وجود و یکتایی نقطه ثابت در توابع مجموعه‌ای مقدار می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت – نقطه تعادل –نگاشت انقباضی –نگاشت انقباضی ضعیف.

مقدمه

این پایان نامه شامل پنج فصل است که در فصل اول به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز پرداخته شده است.

در فصل دوم به بررسی نقطه ثابت برای توابع مجموعه ای می پردازیم در این زمینه مرجع اصلی [۵] می‌باشد.

در فصل سوم به بررسی نقطه ثابت برای توابع مجموعه ای در فضاهای متریک مرتب جزئی می پردازیم . در این زمینه مرجع اصلی [۱۰] می‌باشد.

در فصل چهارم به یک اثبات ساده از قضیه ی نقطه ثابت باناخ و ندلر پرداخته ایم . در این زمینه مرجع اصلی [۴، ۱۵] می‌باشد.

فصل پنجم شامل دو بخش است در بخش اول به بررسی نقطه ثابت برای نگاشت های انقباضی ضعیف در فضاهای متریک مرتب جزئی می پردازیم .در این زمینه مرجع اصلی [۱۸] می‌باشد. در بخش دوم به بررسی نقطه تعادل برای نگاشت های انقباضی ضعیف در فضاهای متریک مرتب جزئی می پردازیم .در این زمینه مرجع اصلی [۱٦] می‌باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیازدر این پایان نامه آشنا خواهیم شد.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $B(X)$ مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های کران دار ناتهی از X باشد، برای $A,B \in B(X)$ تعریف می کنیم [۱۰]

$$D(A,B) := \inf\{d(a,b); a \in A, b \in B\},$$

$$\delta(A,B) := \sup\{d(a,b); a \in A, b \in B\}.$$

تذکر ۲.۲.۱ در تعریف بالا کران داری مجموعه ها شرط مهمی است زیرا اگر در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی حداقل یکی از مجموعه های A یا B کران دار نباشند مثلا $A = \{n; n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{0\}$ در این صورت $\sup$ ، بی نهایت می شود که بی معنی است.

تذکر ۳.۲.۱ اگر A مجموعه ی تک عضوی $\{a\}$ باشد، می نویسیم $\delta(A,B) = \delta(a,B)$،
اگرB نیزمجموعه ی تک عضوی $\{b\}$ باشد، می نویسیم $\delta(A,B) = d(a,b)$.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد هم چنین $CB(X)$ مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های کران دار و بسته ی ناتهی از X باشد، برای $A,B \in CB(X)$ تعریف می کنیم [۱۰]

$$H(A,B) := \max\{\sup_{x\in A} D(x,B), \sup_{y\in B} D(y,A)\}.$$

تذکر ۵.۲.۱ برای هر $A,B \in CB(X)$ داریم $D(A,B) \leq H(A,B) \leq \delta(A,B)$.
می دانیم:

$$H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} D(x,B), \sup_{y\in B} D(y,A)\}$$

از طرفی $x_1 \in A$ ای وجود دارد به طوری که$\sup_{x\in A} D(x,B) = D(x_1,B)$ هم چنین $y_1 \in B$ ای وجود دارد به طوری که$\sup_{y\in B} D(y,A) = D(y_1,A)$ ، بدون کاستن از کلیت مطلب فرض می کنیم

$.H(A,B)=D(x_1,B)$

از طرفی $D(x_1,B)=\inf\{d(x_1,b); b\in B\}$، پس $b_1\in B$ موجود است به طوری که $.D(x_1,B)=d(x_1,b_1)$

حال با توجه به تعریف inf و این که $D(A,B)=\inf\{d(a,b); a\in A, b\in B\}$ داریم

$$D(A,B)=\inf\{d(a,b); a\in A, b\in B\}\leq d(x_1,b_1) \quad \Longrightarrow D(A,B)\leq H(A,B)$$

حال نشان می دهیم $.H(A,B)\leq \delta(A,B)$

می دانیم $\delta(A,B)=\sup\{d(a,b); a\in A, b\in B\}$، با توجه به فرض بالا که $H(A,B)=D(x_1,B)$ و با در نظر گرفتن تعریف sup داریم

$$d(x_1,b_1)\leq \sup\{d(a,b); a\in A, b\in B\} \quad \Longrightarrow H(A,B)\leq \delta(A,B).$$

تذکر ۶.۲.۱ $D(x,A)=0$ اگر و تنها اگر $.x\in\overline{A}$ [۲۳]

لم ۷.۲.۱ تابع H یک متریک روی $CB(X)$ است که آن را متریک هاسدورف می نامیم.[۱۰]

برهان:

واضح است $H(A,B)\geq 0$ پس نشان می دهیم $A=B$ اگر و تنها اگر $.H(A,B)=0$

ابتدا فرض کنیم $H(A,B)=0$ در این صورت برای هر $x\in A$، $D(x,B)=0$ لذا $x\in A$ ایجاب می کند $x\in\overline{B}=B$، بنابراین $.A\subseteq B$ از طرفی برای هر $y\in B$، $D(y,A)=0$ لذا $y\in B$ ایجاب می کند $y\in\overline{A}=A$ بنابراین $.B\subseteq A$ پس نتیجه می گیریم $.A=B$

حال فرض کنیم $A=B$، در این صورت

$$H(A,B)=\max\{\sup_{x\in A=B} D(x,B), \sup_{y\in B=A} D(y,A)\}$$

چون $x\in B$ و B بسته است لذا $x\in\overline{B}$ و این یعنی $.D(x,B)=0$ از طرفی چون $y\in A$ و A بسته است لذا $y\in\overline{A}$ و این یعنی $D(y,A)=0$، بنابراین نتیجه می گیریم $.H(A,B)=0$

بررسی رابطه ی $H(A,B)=H(B,A)$ بدیهی است.

حال نشان می دهیم

$$\forall A,B,C\in CB(X); H(A,C)\leq H(A,B)+H(B,C)$$

می دانیم:

$$H(A,C) = \max\{\sup_{x\in A} D(x,C), \sup_{z\in C} D(z,A)\}$$

حال با گرفتن $\inf$ نسبت به $z \in C$ از رابطه ی $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ داریم

$$D(x,C) \leq d(x,y) + D(y,C)$$

با گرفتن $\inf$ نسبت به y از رابطه ی قبل داریم

$$D_{x\in A}(x,C) \leq D(x,B)_{x\in A} + \inf_{y\in B} D(y,C)$$

حال چون $\inf_{y\in B} D(y,C) \leq \sup_{y\in B} D(y,C)$ و $D(x,B)_{x\in A} \leq \sup_{x\in A} D(x,B)$ بنابرا ین

$$D(x,C)_{x\in A} \leq \sup_{x\in A} D(x,B) + \sup_{y\in B} D(y,C)$$

و نتیجه می گیریم

$$\sup_{x\in A} D(x,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$$

به طور مشابه داریم

$$\sup_{z\in C} D(z,A) \leq H(A,B) + H(B,C)$$

وبنابرا ین

$$\max\{\sup_{x\in A} D(x,C), \sup_{z\in C} D(z,A)\} \leq H(A,B) + H(B,C)$$

لذا .

$$H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C). \quad \square$$

تذکر ۸.۲.۱ اگر d متریک کامل روی X باشد آن گاه H متریک کامل روی $CB(X)$ است. [۲۰]

تعریف ۹.۲.۱ هر تابع از X به توی $CB(X)$ را یک نگاشت مجموعه ای می نامیم. [۱۵]

تعریف ۱۰.۲.۱ نقطه ی $x \in X$ را یک نقطه ی ثابت نگاشت مجموعه ای F گوییم هرگاه $x \in Fx$. [۱۵]

در تعریف فوق اگر F تک مقداری باشد آن گاه تعریف فوق با تعریف نقطه ثابت معمولی (تعریف شده توسط باناخ) یکسان می شود.

تعریف ۱۱.۲.۱ نگاشت $F : X \longrightarrow CB(X)$ را یک نگاشت انقباضی گوییم هر گاه برای همه ی $x, y \in X$ و برای $0 \leq L < 1$ داشته باشیم[۱۵]

$$H(Fx, Fy) \leq Ld(x, y).$$

تذکر ۱۲.۲.۱ اگر $F : X \longrightarrow CB(X)$ یک نگاشت انقباضی با ثابت $0 \leq L < 1$ باشد، آن گاه F پیوسته ی یکنواخت است.

برهان:

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد با انتخاب $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ داریم

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) < \delta \Longrightarrow H(Fx, Fy) < L\delta = \epsilon. \quad \square$$

تذکر ۱۳.۲.۱ اگر $F : X \longrightarrow CB(X)$ پیوسته ی یکنواخت باشد لزومی ندارد یک نگاشت انقباضی باشد.

کافی است $F(x) = \{x\}$ اختیار کنیم.

قضیه ی زیر معروف به قضیه ی ندلر می باشد:

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $F : X \longrightarrow CB(X)$ یک نگاشت انقباضی باشد آن گاه F نقطه ثابت دارد.[۱۵]

تذکر ۱۵.۲.۱ اگر A, B دو مجموعه ی دلخواه در $\mathbb{R}$ باشند، آن گاه $\inf A + \inf B \leq \inf(A + B)$.[۲۳]

تذکر ۱۶.۲.۱ فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد در این صورت

(۱) اگر $x > \limsup_{n\longrightarrow\infty} s_n$، آن گاه عدد طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq N$، $s_n < x$.

(۲) اگر $x < \liminf_{n\longrightarrow\infty} s_n$، آن گاه عدد طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq N$، $s_n > x$. [۲۳]

لم ۱۷.۲.۱ برای هر دو دنباله ی حقیقی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داریم

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n$$

مشروط بر این که مجموع سمت راست به شکل $\infty - \infty$ نباشد.

برهان:

اگر $\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n = +\infty$ و $\limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n \neq -\infty$، هم چنین اگر $\limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n = +\infty$ و $\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n \neq -\infty$ نامساوی به وضوح درست است.

حال فرض کنیم $\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n$ و $\limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n$ هر دو حقیقی باشند لذا

$$\forall \;\; \epsilon > ۰ \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n < \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n + \frac{\epsilon}{۲},$$

$$\forall \;\; \epsilon > ۰ \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n < \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \frac{\epsilon}{۲}$$

از طرفی

$N_۱$ ای طبیعی هست به طوری که برای هر $n \geq N_۱$، $\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \frac{\epsilon}{۲} > a_n$،

$N_۲$ ای طبیعی هست به طوری که برای هر $n \geq N_۲$، $\limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n + \frac{\epsilon}{۲} > b_n$،

قرار می دهیم $N = \max\{N_۱, N_۲\}$، بنابراین برای هر $n \geq N$ داریم

$$a_n + b_n < \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n + \epsilon$$

بنابراین

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n + \epsilon$$

حال چون $\epsilon > 0$ دلخواه است بنابراین

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n.$$

لم ۱۸.۲.۱ اگر f پیوسته باشد آن گاه $\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge f(\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup_{n\ge k} x_n)$.

برهان:

برای هر $n \ge k_0$، $f(x_n) \ge f(x_n)$ $\sup_{n\ge k_0}$. از طرفی چون sup نقطه ی حدی دنباله است لذا $\sup_{n\ge k} x_n = \lim_{i\longrightarrow\infty} y_i^k$ که در آن $\{y_i^k\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$،

چون برای هر $n \ge k$ داریم $\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge f(x_n)$ و از طرفی $\{y_i^k\}$ به ازای هر i یکی از عناصر $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ است، لذا

$$\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge f(y_i^k), \quad \forall i \in N \qquad (E)$$

حال چون $\lim_{i\longrightarrow\infty} y_i^k$ موجود است و f پیوسته، لذا $\lim_{i\longrightarrow\infty} f(y_i^k)$ وجود دارد.

از رابطه ی (E) داریم

$$\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge \lim_{i\longrightarrow\infty} f(y_i^k)$$

از طرفی، چون f پیوسته است داریم

$$\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge f(\lim_{i\longrightarrow\infty} y_i^k) = f(\sup_{n\ge k} x_n)$$

بنابراین

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup_{n\ge k} f(x_n) \ge \lim_{k\longrightarrow\infty} f(\sup_{n\ge k} x_n) = f(\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup_{n\ge k} x_n).$$

قضیه ی زیر معروف به قضیه ی نقطه ثابت باناخ است.

قضیه ۱۹.۲.۱ اگر $F : X \longrightarrow X$ یک نگاشت انقباضی و ρ متریک کامل روی X باشد آن گاه F نقطه ثابت منحصر به فرد دارد. [۴]

تعریف ۲۰.۲.۱ تابع $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ تابع فاصله ی تناوبی است هر گاه شرایط زیر برقرار باشند[۱۴]

(۱) φ پیوسته و صعودی باشد

(۲) $t = 0$ اگر و تنها اگر $\varphi(t) = 0$.

تعریف ۲۱.۲.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد نگاشت $F : X \longrightarrow X$ انقباضی ضعیف نامیده می شود هر گاه تابع فاصله ی تناوبی φ موجود باشد به طوری که برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم [۱۹]

$$d(Fx,Fy) \leq d(x,y) - \varphi(d(x,y)).$$

تذکر ۲۲.۲.۱ اگر درتعریف قبل $\varphi(t) = (1-K)t$ که در آن $0 \leq K < 1$، در این صورت F یک نگاشت انقباضی می شود[۱۹]

$$d(Fx,Fy) \leq d(x,y) - (1-K)d(x,y) = Kd(x,y)$$

بنابراین

$$d(Fx,Fy) \leq Kd(x,y).$$

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $f,g : X \longrightarrow X$ دو تابع باشند. اگر برای $x \in X$، $w = fx = gx$، آن گاه x را **نقطه تعادل** f,g گویند. w را مقدار نقطه ی تعادل x تحت f و g گویند.[۱۳]

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $f,g : X \longrightarrow X$ دو تابع باشند. زوج $\{f,g\}$ را سازگار گویند هر گاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$، زمانی که $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که برای $t \in X$ ای داشته باشیم $\lim_{n\longrightarrow\infty} fx_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} gx_n = t$.[۱۳]

مثال ۲۵.۲.۱ $\mathbb{R}$ را با متر قدر مطلق و $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در نظر می گیریم در این صورت f,g سازگار می باشند.

تعریف ۲۶.۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی بوده و $R : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد. برای هر $x \in X$، $R^{-1}(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم[۱۳]

$$R^{-1}(x) = \{u \in X; Ru = x\}.$$

تعریف ۲۷.۲.۱ فرض کنیم $(X, \preceq)$ یک مجموعه ی مرتب جزئی باشد. زوج (f, g) از خود نگاشت های روی X را صعودی ضعیف گوییم هر گاه برای هر $x \in X$، $fx \preceq gfx, gx \preceq fgx$.

تعریف ۲۸.۲.۱ فرض کنیم $(X, \preceq)$ یک مجموعه ی مرتب جزئی باشد و $S, T, R : X \longrightarrow X$ نگاشت هایی باشند به طوری که $TX \subseteq RX$ و $SX \subseteq RX$. گوییم S, T نسبت به R صعودی ضعیف هستند هر گاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم[۱۶]

$$\forall \;\; y \in R^{-1}(Tx) \qquad Tx \preceq Sy,$$

$$\forall \;\; y \in R^{-1}(Sx) \qquad Sx \preceq Ty.$$

اگر $S = T$، آن گاه گوییم T نسبت به R صعودی ضعیف است.[۷، ۶]

نتیجه ۲۹.۲.۱ اگر در تعریف قبل R نگاشتی همانی باشد آن گاه T, R صعودی ضعیف هستند.[۱۶، ۱]

تعریف ۳۰.۲.۱ فرض کنیم $(X, \preceq, d)$ یک مجموعه ی مرتب جزئی باشد گوییم X منظم است هر گاه شرط زیر برقرار باشد
اگر $\{z_n\}$ یک دنباله ی صعودی در X با رابطه ی $\preceq$ باشد به طوری که برای $z \in X$، $z_n \longrightarrow z$ آن گاه برای همه ی $n \in N$، $z_n \preceq z$.[۱۶]

تعریف ۳۱.۲.۱ تابع $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ را نیم پیوسته ی پایینی گوییم هرگاه برای هر دنباله ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X که $x_n \longrightarrow x$ داشته باشیم $f(x) \leq \liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)$.
هم چنین تابع $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ را نیم پیوسته ی بالایی گوییم هرگاه برای هر دنباله ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X که $x_n \longrightarrow x$ داشته باشیم $f(x) \geq \limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)$. [۲۳]

تعریف ۳۲.۲.۱ تابع $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ را کنترلی گوییم هر گاه یکی از شرایط زیربرقرار باشد[۱۸]

(i) φ تابع فاصله ی تناوبی باشد یا

(ii) φ تابعی نیم پیوسته‌ی پایینی بوده و $\varphi(t) = 0$ اگر و تنها اگر $t = 0$.

نا مساوی زیر معروف به نامساوی کوشی– شوارتز در انتگرال ها است.

قضیه ۳۳.۲.۱ فرض کنیم (X,μ) یک فضای اندازه بوده و $p,q \geq 1$، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، $f \in L^p(X,\mu)$ و $g \in L^q(X,\mu)$ در این صورت داریم[۲۲]

$$\int |fg| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}(\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

فصل ۲

نقاط ثابت برای توابع مجموعه ای

در این فصل با فراهم کردن شرایط لازم به بررسی نقطه ثابت مشترک نگاشت های F,G در فضاهای متریک مرتب جزئی می پردازیم. هم چنین نشان می دهیم چه وقت یک نگاشت در این فضا نقطه ثابت دارد.

۱.۲

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم $\mathbb{R}_+$ مجموعه ی اعداد حقیقی غیر منفی بوده و σ مجموعه ای از توابع حقیقی مقدار $T:\mathbb{R}_+^6 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ باشد که در شرایط زیر صدق کند

σ_0: برای هر $p_n \in \mathbb{R}_+^6$، $T(\liminf_{n\longrightarrow\infty} p_n) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} T(p_n)$.

σ_1 : $T(t_1,t_2,\dots,t_6)$ نسبت به مولفه های $t_2,\dots,t_6$ نزولی است.

σ_2: تابع صعودی اکید پیوسته‌ی $\varphi:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ با خاصیت $t>0$، $\varphi(t)<t$ و $0<\epsilon$ موجود باشند به طوری که نامساوی های $u \leq w+\epsilon$ و $T(w,v,v,u,u+v,0) \leq 0$ یا $u \leq w+\epsilon$ و $T(w,v,u,v,0,u+v) \leq 0$ نتیجه دهند $w \leq \varphi(v)$.

σ_3: نامساوی های $T(w,0,v,0,0,v) \leq 0$ و $T(w,0,0,v,v,0) \leq o$ نتیجه دهند $w \leq \varphi(v)$ که φ تابع تعریف شده در σ_2 است .[۵]

مثال ۲.۱.۲ فرض کنیم

$$T(t_1,t_2,\dots,t_6)=t_1-\alpha\max\{t_2,t_3,t_4\}-(1-\alpha)(at_5+bt_6)$$

که در آن $0<\alpha<1$ و $0 \leq a,b < \frac{1}{2}$. نشان می دهیم شرایط $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ برقرارند.

σ_0,σ_1 بدیهی می باشند.

σ_2 : فرض کنیم $u>0$، $\epsilon>0$ را به گونه ای انتخاب می کنیم که داشته باشیم

$$\max\{\alpha+2a(1-\alpha),\alpha+2b(1-\alpha)\}u+\epsilon<u.$$

(از آن جا که رابطه ی $0<\max\{\alpha+2a(1-\alpha),\alpha+2b(1-\alpha)\}<1$ برقرار است ، چنین ϵ ی وجود دارد.)