بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم شادی گودرزی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۱۱۴ تحت عنوان: «**حلقه‌های شبه نیم‌جابجایی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر سیدحمید حاج‌سیدجوادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته**ریاضی محض (جبر)** است که در سال **۱۳۹۰** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سید احمد موسوی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: :دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **شادی گودرزی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (جبر)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **شادی گودرزی**

تاریخ و امضا:

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۱/۴/۸۷ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۲۳/۴/۸۷ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۱۵/۷/۸۷ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **شادی گودرزی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (جبر)** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:

تاریخ:

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

عنوان

حلقه‌های شبه نیم جابجایی

دانشجو:

شادی گودرزی

استاد راهنما:

دکتر سید احمد موسوی

آذر ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربان

و

همسر عزیزم

سپاس نامه

حمد و سپاس آفریدگاری را سزاست که جان پاک، لطیفه صنع اوست؛ پروردگاری توانا که کالبد خاکی آدمی رابه دم الهی (نفخت فیه من روحی) به پایگاه ارجمند (فقعواله ساجدین) بر همه آفریدگان برتری داد و از جلوه جلال و تجلّی کمالش چراغ عرفان افروخته شد و از پرتو جلالش عالم هستی به نور دانش فروغ بی زوال یافت و به حکم آیه مبارکه "علم الانسان ما لم یعلم" ابواب معرفت را به روی آدم ناتوان گشود و به رتبت "علم آدم الاسماء کلها" سرافرازی بخشید. خداوندی که به موجب آیه شریفه "خلق الانسان علمه البیان " زبان سخندان و سخن گستر به آدمی بخشید و رنگ نادانی و گمراهی را از صحیفه دل او بزدود.

اکنون که به لطف و عنایت پروردگار یکتا و مساعدت اساتید ارجمند موفق به گردآوری، تدوین و تنظیم این رساله گشته ام، وظیفه خود می دانم که نهایت سپاسگزاری را از آنان به عمل آورم. هر چند که برای رسالت پیامبرگونه آنان نمی توان در قالب واژگانی در خور شأن و مقام آنان، مراتب احترام و سپاسگزاری را بیان نمود. این کلمات تنها گوشه ای از سپاس قلبی اینجانب از آنان می باشد.

با تشکر و سپاس از استاد ارجمند جناب آقای ***دکتر سید احمد موسوی*** که قبول زحمت نموده راهنمایی این رساله را عهده دار شدند. استاد گرانقدری که در این مقطع تحصیلی همواره با راهنمایی های سودمند خود، خیرخواهانه در راه انجام این تحقیق مرا هدایت فرمودند و برای بهبود و تکمیل آن مرا مرهون مساعدت های بی دریغ خود قرار دادند. امیدوارم بدین وسیله امتنان، سپاس و قدردانی صمیمانه اینجانب را بپذیرند و از خداوند متعال توفیق روز افزون ایشان را مسئلت دارم.

از اساتید محترم جناب آقای ***دکتر علی رجایی*** و جناب آقای ***دکتر محمد باقری*** و جناب آقای ***دکتر سید حمید حاج سید جوادی*** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر وقدردانی را دارم. از خدای متعال برای همه عزیزان سلامتی و موفقیت روز افزون آرزومندم.

همچنین از همه دوستان، عزیزان و خانواده محترمم که دراین راه مرا یاری کردند صمیمانه سپاسگزارم.

از همسر عزیز و دلسوزم که صبورانه به یاری من پرداخت و در سراسر این مدت مشوق اصلی من بود بی نهایت سپاسگزارم.

و در پایان بی نهایت ترین سپاس را به پربهاترین گنج گیتی مادرم ابراز می نمایم هرچند این سپاسگزاری در مقایسه با انبوه مهربانی و فداکاری هایشان بسیار ناچیز است.

چکیده

حلقه R نیم جابجایی نامیده می‌شود هرگاه $ab = 0$ نتیجه دهد $aRb = 0$ برای هر $a, b \in R$. هوو و همکاران نشان دادند چنانچه R نیم جابجائی باشد حلقه چندجمله‌ای‌های $R[X]$ لزوما نیم جابجایی نیست اما نزدیک-نیم جابجایی می‌تواند باشد. در این پایان‌نامه، ضمن معرفی و بررسی حلقه‌های نزدیک-نیم جابجایی، ساختار حلقه‌های نیم جابجایی و نزدیک-نیم جابجایی را بررسی نموده وکلاس‌هایی از آنها را گسترش می‌دهیم. نشان می‌دهیم عناصر پوچ‌توان حلقه‌های نیم جابجایی تشکیل یک ایده‌آل می‌دهند و حلقه‌های NI و نزدیک-نیم جابجایی از یکدیگر متمایزند. همچنین شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آنها نیم جابجایی بودن به حلقه چندجمله‌ای‌ها گسترش یابد. به علاوه مفهوم حلقه‌های شبه-نیم جابجایی را معرفی نموده و ساختار آن‌ها را به کمک ایده‌آل‌های قویاً اول مینیمال شرح می‌دهیم. رابطه بین حلقه‌های شبه-نیم جابجایی و ساختارهای دیگر را در وضعیت‌های گوناگون مطالعه نموده و مثال‌های متنوعی ارائه می‌گردد. در نهایت حلقه‌های ناجابجایی مینیمال شبه-نیم جابجایی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.
در این پایان نامه مقالات پایین مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد:

(1) K.-Y. Ham, Y. C. Jeon, J. Kang, N. K. Kim, W. Lee, Y. Lee, S. J. Ryu, H.-H. Yang, *IFP Rings and Near-IFP Rings*, J. Korean Math. Soc. **45** (2008), No. 3, pp. 727-740.

(2) H. K. Kim, N. K. Kim, M. S. Jeong, Y. Lee, S. J. Ryu, D. E. Yeo, *On Conditions Provided by Nilradicals*, J. Korean Math. Soc. **46** (2009), No. 5, pp. 1027-1040.

کلمات کلیدی: حلقه نیم جابجایی ، حلقه نزدیک-نیم جابجایی، حلقه شبه-نیم جابجایی، حلقه NI، حلقه ۲-اولیه، حلقه کاهشی، حلقه متقارن.

فهرست

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مورد نیاز پایان‌نامه را بیان کرده و تقریباً تمامی تعاریف و قضایای مهمی که پیش نیاز فصل‌های بعد می‌باشد را ذکر می‌نماییم و در پایان ساختار پایان‌نامه را مشخص می‌کنیم. در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای شرکت‌پذیر و یکدار می‌باشد.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ (عنصر پوچ‌توان [۱]). عنصر a از حلقه R را پوچ‌توان نامیم هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد بطوریکه $a^n = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ (عنصر قویاً پوچ‌توان [۲]). عنصر a از حلقه شرکت‌پذیر R را قویاً پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه هر $a = a_0, a_1, \dots$ که $a_{n+1} \in a_n R a_n$، نهایتاً صفر شود.

هر عنصر قویاً پوچ‌توان، پوچ‌توان است.

تعریف ۳.۱.۱ (خودتوان [۳]). عنصر a از حلقه R را خودتوان نامیم هرگاه $a^2 = a$.

[۱] Nilpotent element

[۲] Strongly nilpotent element

[۳] Idempotent

تعریف ۴.۱.۱ (خودتوان مرکزی[۴]). خودتوان e از حلقه R را مرکزی نامیم هرگاه داشته باشیم

$$\forall r \in R; \qquad er = re.$$

تعریف ۵.۱.۱ (ایده‌آل نیم‌اول[۵]). ایده‌آل C از حلقه R را نیم‌اول گوییم هرگاه برای هر ایده‌آل A از حلقه R، $A^2 \subseteq C$ نتیجه دهد $A \subseteq C$.

تعریف ۶.۱.۱ (حلقه اول[۶]). حلقه R را اول می‌نامیم هرگاه ایده‌آل صفر، یک ایده‌آل اول از حلقه R باشد.

تعریف ۷.۱.۱ (حلقه نیم‌اول[۷]). (۱) حلقه R را نیم‌اول نامیم هرگاه هیچ ایده‌آل پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد.

(۲) حلقه R را نیم‌اول نامیم هرگاه $aRa = 0$ نتیجه دهد $a = 0$.

(۳) حلقه R را نیم‌اول نامیم هرگاه $N_*(R) = 0$

تعریف ۸.۱.۱ (m– سیستم[۸]). زیرمجموعه ناتهی $S \subseteq R$ را یک m- سیستم نامیم هرگاه برای هر $a, b \in S$ داشته باشیم $arb \in S$ برای r ای در R.

تعریف ۱۰.۱.۱. E_{ij} ماتریس n در n که عنصر (i, j) ام آن یک و بقیه عناصرش صفر می‌باشد.

۲.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. برای حلقه R تعریف می‌کنیم:

(۱) رادیکال جیکوبسون $J(R)$: اشتراک تمام ایده آل‌های چپ (یا راست) ماکسیمال در R.

(۲) رادیکال اول یا رادیکال پوچ پایینی $N_*(R)$ با یکی از دو شرط معادل ذیل تعریف می‌گردد:

الف) اشتراک تمام ایده آل های اول در R.

---

[۴] Centeral idempotent

[۵] Semi-Prime Ideal

[۶] Prime ring

[۸] m-system

ب) مجموعه همه عناصر قویاً پوچ‌توان در حلقه R.

(۳) رادیکال پوچ بالایی $N^*(R)$: جمع ایده آل های پوچ در حلقه R (بزرگترین ایده آل پوچ در حلقه R)

$$N^*(R) = \{a \in R | \text{یک ایده‌آل پوچ از حلقه } R \text{ می‌باشد } RaR\}.$$

در کتاب نظریه حلقه‌ها[۹] نوشته راون[۱۰] رادیکال پوچ بالایی به شکل زیر تعریف شده است:

$$N^*(R) = \cap \{P | \text{یک ایده‌آل قویاً اول (مینیمال) از } R \text{ می‌باشد } P\}.$$

(۴) رادیکال پوچ $N(R)$: مجموعه همه عناصر پوچ‌توان در حلقه R.

(۵) رادیکال ودربورن $N_0(R)$: مجموع همه ایده‌آل های پوچ‌توان در حلقه R.

نامساوی $N_0(R) \subseteq N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq J(R) \subseteq N(R)$ همواره برقرار است.

(۶) پوچ ساز راست روی حلقه R : $r_R(-)$ و برای $S \subseteq R$ داریم:

$$r_R(S) = \{a \in R | sa = 0; \qquad \forall s \in S\}.$$

(۷) پوچساز چپ روی حلقه R : $l_R(-)$ و برای هر $S \subseteq R$ داریم:

$$l_R(S) = \{b \in R | bs = 0; \qquad \forall s \in S\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $a \in R$ در این صورت گوییم:

(۱) a منظم راست است هرگاه $r_R(a) = 0$.

(۲) a منظم چپ است هرگاه $r_R(a) = 0$.

(۳) a منظم است هرگاه منظم راست و منظم چپ باشد.

(۴) a مقسوم علیه صفر چپ است هرگاه $r_R(a) \neq 0$.

(۵) a مقسوم علیه صفر راست است هرگاه $l_R(a) \neq 0$.

---

[۹] Ring Theory

[۱۰] Rowen

(۶) یک عضو از یک حلقه مقسوم علیه صفر است هرگاه نه منظم راست و نه منظم چپ باشد.

تعریف ۳.۲.۱ (دامنه). حلقه‌ای که عناصر غیر صفر آن منظم باشند را دامنه نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ (حلقه پوچ - نیمساده). براساس نظر کیم و همکارانش[۱۱] حلقه R را پوچ - نیمساده نامند هرگاه هیچ ایده‌آل پوچ ناصفری نداشته باشد.

لم ۵.۲.۱. حلقه‌های پوچ - نیمساده، نیم اول می‌باشند.

برهان. فرض کنیم حلقه R پوچ - نیمساده باشد. پس با توجه به تعریف ۴.۲.۱ هیچ ایده‌آل پوچ ناصفری ندارد. در نتیجه هیچ ایده‌آل پوچ‌توان ناصفری ندارد و لذا نیم‌اول است. □

لم ۶.۲.۱. حلقه‌های پوچ - نیمساده لزوماً اول نمی‌باشند.

برهان. فرض کنیم برای هر $i \in I$، R_i حلقه‌ای کاهشی و $R = \prod_{i\in I} R_i$ حاصلضرب مستقیم آنها باشد. هر I_i را به صورت ایده‌آل حلقه R_i در نظر می‌گیریم به طوری که برای هر I_i درآیه i-ام آن یک و بقیه درآیه‌های آن صفر باشد. پس داریم:

$$(0, 0, \ldots, 1, 0)\,(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) = 0$$

درحالیکه I_iها مخالف صفر می‌باشند. بنابراین حلقه R اول نمی‌باشد. □

تعریف ۷.۲.۱ (ایده آل کاملاً اول). ایده‌آل اول P از حلقه R را کاملاً اول نامیم هرگاه R/P دامنه باشد.

تعریف ۸.۲.۱ (ایده آل قویاً اول). براساس نظر راون ایده‌آل اول P از حلقه R را قویاً اول نامیم هرگاه R/P پوچ - نیمساده باشد.

لم ۹.۲.۱. ایده‌آل‌های ماکسیمال و کاملاً اول، قویاً اول می‌باشند.

برهان. برای قسمت اول فرض کنیم ایده‌آل P از R ماکسیمال باشد پس P اول و R/P یک حلقه ساده است. در نتیجه R/P هیچ ایده‌آل ناصفری ندارد. بنابراین R/P پوچ - نیمساده خواهد بود.
برای قسمت دوم فرض کنیم ایده‌آل P از R کاملاً اول باشد. پس R/P دامنه است و هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری ندارد. بنابراین R/P هیچ ایده‌آل پوچ ناصفری نداشته و پوچ - نیمساده می‌باشد. □

[۱۱] Kim

تعریف ۱۰.۲.۱ (حلقه کاهشی). حلقه R را کاهشی نامیم هرگاه $N(R) = 0$.

تعریف ۱۱.۲.۱ (حلقه NI). براساس نظر مارکس[۱۲] حلقه R را NI نامیم هرگاه $N(R) = N^*(R)$.

لم ۱۲.۲.۱. حلقه‌های کاهشی NI می‌باشند.

برهان. می‌دانیم $N^*(R) \subseteq N(R)$. (فرض کنیم $a \in N^*(R)$ پس RaR یک ایده‌آل پوچ از حلقه R و a پوچ توان می‌باشد. در نتیجه $a \in N(R)$). از طرفی چون حلقه R کاهشی است پس $N(R) = 0$. بنابراین داریم $N^*(R) = N(R) = 0$ پس حلقه R، NIمی‌باشد. □

لم ۱۳.۲.۱. حلقه R، NI می‌باشد اگر و تنها اگر $N(R)$ یک ایده‌آل باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم حلقه R، NI باشد. پس $N(R) = N^*(R)$ (۱۱.۲.۱). از ایده‌آل بودن $N^*(R)$ ایده‌آل بودن $N(R)$ نتیجه می‌شود. برعکس فرض کنیم $N(R)$ به شکل یک ایده‌آل از R باشد و $a \in N(R)$. پس RaR یک ایده‌آل پوچ می‌باشد در نتیجه $a \in N^*(R)$. از طرفی همواره نامساوی $N^*(R) \subseteq N(R)$ برقرار است(۱.۲.۱). پس $N(R) = N^*(R)$ و حلقه R، NI می‌باشد. □

لم ۱۴.۲.۱. حلقه R، NI می‌باشد اگر و تنها اگر $R/N^*(R)$ کاهشی باشد.

برهان. اگر حلقه R، NI باشد پس با توجه به تساوی $N(R) = N^*(R)$، $R/N(R) = R/N^*(R)$ بنابراین $N(R/N^*(R)) = 0$ و $R/N^*(R)$ کاهشی می‌باشد.

برعکس فرض کنیم $R/N^*(R)$ کاهشی باشد. با توجه به تعریف کاهشی بودن حلقه، $R/N^*(R)$ هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری ندارد. عناصر پوچ‌توان$R/N^*(R)$ به شکل $n + N^*(R)$ است که $n \in N(R)$. در نتیجه $n + N^*(R) = 0$ و $n \in N^*(R)$. بنابراین $N(R) \subseteq N^*(R)$. از طرفی نامساوی $N^*(R) \subseteq N(R)$ همواره برقرار است (۱.۲.۱). پس $N(R) = N^*(R)$ و حلقه R، NI می‌باشد. □

لم ۱۵.۲.۱. حلقه R، NI است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل قویاً اول مینیمال از R، کاملاً اول باشد.

برهان. فرض کنیم حلقه R، NI و P یک ایده‌آل قویاً اول مینیمال از R باشد. پس $N(R) = N^*(R)$ و با توجه به ([۱۲], قضیه ۱۲) $N(P) = P$ که

$$N(P) = \{a \in R | aRb \subseteq N^*(R), b \in R \setminus P\}.$$

[۱۲] Marks

حال فرض کنیم $xy \in P$. چون $P = N(P)$ پس $xy \in N(P)$. با توجه به تعریف $N(P)$ وجود دارد $b \in R \setminus P$ به طوری که $(xy)Rb \subseteq N^*(R)$ و در نتیجه $(xRyR)(bR) \subseteq N^*(R) \subseteq P$ (تعریف ۱.۲.۱ و لم ۲۴.۲.۱). بنابراین $x \in P$ یا $y \in P$، پس P کاملاً اول است.

برعکس اگر هر ایده‌آل قویاً اول مینیمال P از حلقه R کاملاً اول باشد آنگاه با توجه به ([۱۲], نتیجه ۱۳) هر P، نیم جابجایی دارد. حال ثابت می‌کنیم $N(R) = N^*(R)$. $a \in N(R)$ را در نظر می‌گیریم. پس برای عدد صحیح مثبتی مانند n داریم $a^n = 0$. با استفاده از فرض خلف $a \notin N^*(R)$. در این صورت با توجه به قسمت (۳) تعریف (۱.۲.۱)، وجود دارد ایده آل قویاً اول مینیمال P از R به طوری که $a \notin P$. از آنجا که $R \setminus P$، m- سیستم است پس وجود دارد $r_1, \dots, r_{n-1} \in R$ به طوری که $ar_1a \dots ar_{n-1}a \notin P$. اما P، نیم جابجایی دارد و $a^n = 0 \in P$. پس $ar_1a \dots ar_{n-1}a \in P$ (۲۱.۲.۱). به تناقض رسیدیم پس $a \in N^*(R)$. بنابراین $N(R) = N^*(R)$ و حلقه R، NI می‌باشد. □

تعریف ۱۶.۲.۱ (حلقه ۲- اولیه). حلقه R را ۲- اولیه نامیم هرگاه $N_*(R) = N(R)$.

لم ۱۷.۲.۱. حلقه R، ۲- اولیه است اگر و تنها اگر $R/N_*(R)$ کاهشی باشد.

لم ۱۸.۲.۱. حلقه‌های ۲- اولیه بوضوح NI می‌باشند.

برهان. فرض کنیم حلقه R، ۲- اولیه باشد بنا به تعریف (۱۶.۲.۱)، $N(R) = N_*(R)$. با توجه به نامساوی

$$N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R)$$

(تعریف ۱.۲.۱) داریم $N^*(R) = N(R)$ و در نتیجه حلقه R، NI می‌باشد. □

لم ۱۹.۲.۱. حلقه‌های NI لزوماً ۲- اولیه نمی‌باشند.

مثال ۲۰.۲.۱. فرض کنیم حلقه S، ۲- اولیه و R_n حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی 2^n در 2^n روی S باشد که n یک عدد صحیح مثبت است. نگاشت $\sigma : R_n \longrightarrow R_{n+1}$ را با ضابطه $A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. پس هر R_n را می‌توانیم بصورت زیرحلقه‌ای از R_{n+1} بررسی کنیم. R را حد مستقیم از دستگاه مستقیم (R_n, σ_{ij}) که $\sigma_{ij} = \sigma^{j-i}$ قرار می‌دهیم، در واقع $R = \cup_{n=1}^{\infty} R_n$.

با توجه به اینکه $N(R_n) = \{(a_{ij}) \in R_n | a_{ii} \in N(S)\}$ و حلقه S، ۲- اولیه و در نتیجه NI می‌باشد

(لم ۱۸.۲.۱). پس $N(R_n)$ یک ایده‌آل بوده و هر R_n، NI می‌باشد و چون حد مستقیم از دستگاه مستقیم حلقه‌های NI، حلقه‌ای NI است بنابراین R، NI می‌باشد.

حال فرض کنیم $0 \neq A = (a_{st}) \in R_n$، بطوریکه عناصر روی قطر اصلی A صفر و هر عنصر غیر صفر A، یک باشد. در نظر می‌گیریم i را کوچکترین سطر از A که شامل یک عنصر ناصفر بوده و j را کوچکترین ستون در سطر i ام که $a_{ij} \neq 0$. توجه می‌کنیم که $i < j$ و عنصر $(i+2^k, j+2^k)$ از A در R_{k+1} همچنان یک است برای $k = n, n+1, n+2, \ldots$.

فرض کنیم e_{uv} یک ماتریس مربعی باشد که عنصر (u, v) آن یک و بقیه جاها صفر می‌باشد. قرار می‌دهیم

$$A_0 = A, A_1 = A_0 B_0 A_0 \in A_0 R A_0$$

که البته A_0 را به عنوان عنصری از R_{n+1} بررسی می‌کنیم و $B_0 = e_{j(i+2^n)} \in R_{n+1}$. می‌گوییم $A_1 = (b_{st})$، پس i کوچکترین سطر از A_1 است که شامل یک عنصر ناصفر بوده و $j + 2^n$ کوچکترین ستون در سطر i ام که $b_{i(j+2^n)} \neq 0$. در واقع $b_{i(j+2^n)} = 1$. بنابراین عنصر $(i + 2^{n+1}, j + 2^n + 2^{n+1})$ از A_1 در R_{n+2} همچنان یک می‌باشد. به همین ترتیب قرار می‌دهیم $A_2 = A_1 B_1 A_1 \in A_1 R A_1$که $B_1 = e_{(j+2^n)(i+2^{n+1})} \in R_{n+2}$. می‌گوییم $A_2 = (C_{st})$، پس i کوچکترین سطر از A_2 است که شامل یک عنصر ناصفر بوده و $j + 2^n + 2^{n+1}$ کوچکترین ستون در سطر i ام است که $b_{i(j+2^n+2^{n+1})} \neq 0$ و در واقع $b_{i(j+2^n+2^{n+1})} = 1$. بنابراین عنصر $(i + 2^{n+2}, j + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2})$ از A_2 در R_{n+3} همچنان یک می‌باشد.

با ادامه این روند نشان می‌دهیم که عنصر $(i, j + 2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{n+(k-1)})$ از A_k برای هر k همچنان یک می‌باشد. بنابراین بدست می‌آوریم دنباله $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ را بطوریکه هیچ یک از A_k ها صفر نبوده و $A_{k+1} \in A_k R A_k$. در نتیجه A قویاً پوچ‌توان نمی‌باشد پس $A \notin N_*(R)$ (تعریف ۱.۲.۱) و $N_*(R) = 0$ (حلقه R نیم‌اول است). بوضوح $A \in N(R)$. بنابراین R، ۲- اولیه نمی‌باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. ایده‌آل راست (چپ) I از حلقه R را گوییم نیم جابجایی دارد هرگاه $ab \in I$ نتیجه دهد $aRb \subseteq I$ برای هر $a, b \in R$.

تعریف ۲۲.۲.۱. حلقه R را نیم جابجایی می‌نامیم هرگاه ایده‌آل صفر از R، نیم جابجایی داشته باشد.

لم ۲۳.۲.۱. حلقه‌های کاهشی، نیم جابجایی هستند.

برهان. فرض کنیم برای $a, b \in R$ داشته باشیم $ab = 0$ پس $ba = 0$. زیرا $(ba)^2 = b(ab)a = 0$. پس $ba \in N(R)$ و چون حلقه R کاهشی است پس $ba = 0$. حال برای هر $r \in R$ داریم

$$(arb)^2 = ar(ba)rb = 0.$$

پس $arb \in N(R)$ و چون حلقه R کاهشی است پس برای هر $r \in R$، $aRb = 0$. بنابراین حلقه R، نیم جابجایی می‌باشد. □

لم ۲۴.۲.۱. اگر حلقه R، NI باشد آنگاه $N^*(R)$، نیم جابجایی دارد.

برهان. با توجه به NI بودن حلقه R داریم $N(R) = N^*(R)$ (۱۱.۲.۱). پس حلقه $R/N^*(R)$ کاهشی و در نتیجه نیم جابجایی است (لم ۲۳.۲.۱). بنابراین $xy \in N^*(R)$ نتیجه می‌دهد $xRy \subseteq N^*(R)$. پس $N^*(R)$، نیم جابجایی دارد(۲۱.۲.۱). □

لم ۲۵.۲.۱. حلقه‌های نیم جابجایی، ۲ - اولیه و در نتیجه NI می‌باشند.

برهان. فرض کنیم حلقه R، نیم جابجایی باشد. برای ۲- اولیه بودن کافیست نامساوی $N(R) \subseteq N_*(R)$ را ثابت کنیم. $a \in N(R)$ را در نظر می‌گیریم. عدد صحیح مثبت n ای موجود است به طوری که $a^n = 0$. با فرض خلف $a \notin N_*(R)$، پس ایده‌آل اول P ای وجود دارد که $a \notin P$. بنابراین $ax_1a \notin P$ برای $x_1 \in R$. با ادامه این روند $x_i \in R$ ها را چنان می‌یابیم که P شامل $b = ax_1a \dots ax_{n-1}a$ نمی‌باشد. اما با توجه به نیم جابجایی بودن R و $a^n = 0$ داریم $b = 0$ پس $b \in P$ و به تناقض رسیدیم. پس $a \in N_*(R)$ و حلقه R، ۲- اولیه (و در نتیجه NI) می‌باشد. □

تعریف ۲۶.۲.۱ (حلقه آبلی). حلقه R را آبلی[۱۳] نامیم هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

لم ۲۷.۲.۱. حلقه‌های نیم جابجایی، آبلی می‌باشند.

برهان. خودتوان e را در نظر می‌گیریم. داریم $e^2 = e$ پس $e(e-1) = 0$. با توجه به نیم جابجایی بودن حلقه R، برای هر $r \in R$، $er(e-1) = 0$ پس $ere = er$. به روش مشابه، $ere = re$. بنابراین $er = re$ و حلقه R، آبلی می‌باشد. □

[۱۳] Abelian

تعریف ۲۸.۲.۱. حلقه R را نزدیک نیم جابجایی می‌نامیم هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$\sum_{i=0}^{n} Ra_iR$ شامل یک ایده‌آل غیر صفر پوچ‌توان است هرگاه چندجمله‌ای غیر صفر $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ روی حلقه R پوچ‌توان باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. حلقه R را شبه-نیم جابجایی می‌نامیم هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$\sum_{i=0}^{n} Ra_iR$ پوچ‌توان است هرگاه $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in R[x]$ پوچ‌توان باشد.

لم ۳۰.۲.۱. حلقه‌های شبه-نیم‌جابجایی لزوماً آبلی نمی‌باشند.

برهان. حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی ۲ در ۲ روی حلقه کاهشی S، حلقه‌ای شبه-نیم جابجایی است که آبلی نمی‌باشد (مثال ۲.۲.۳). □

تعریف ۳۱.۲.۱ (حلقه متقارن). حلقه R را حلقه‌ای متقارن[۱۴] نامیم هرگاه $rst = 0$ نتیجه دهد $rts = 0$ برای هر $r, t, s \in R$.

لم ۳۲.۲.۱. حلقه‌های متقارن، نیم جابجایی می‌باشند.

برهان. اگر $rt = 0$ پس برای هر $s \in R$ داریم $(rt)s = 0 = s(rt)$ و چون حلقه R متقارن است پس $rst = 0$ برای هر $s \in R$. بنابراین حلقه R، نیم جابجایی می‌باشد. □

لم ۳۳.۲.۱. حلقه‌های کاهشی متقارن می‌باشند.

تعریف ۳۴.۲.۱ (شاخص پوچ توانی). شاخص پوچ توانی عنصر پوچ توان[۱۵] x از حلقه R، کمترین عدد صحیح مثبت n می‌باشد که $x^n = 0$. شاخص پوچ توانی زیرمجموعه I از حلقه R سوپریمم شاخص‌های پوچ توانی همه عناصر پوچ توان در I می‌باشد.

تعریف ۳۵.۲.۱ (پوچ توانی با شاخص کراندار). اگر هر یک از سوپریمم‌ها متناهی باشند، آنگاه گوییم I پوچ توان با شاخص کراندار می‌باشد.

---

[۱۴] symetric

[۱۵] nilpotent

تعریف ۳۶.۲.۱ (حلقه فان نیومن منظم). حلقه R را فان نیومن منظم[۱۶] نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ وجود داشته باشد $x \in R$ به طوری که $a = axa$.

تعریف ۳۷.۲.۱ (حلقه راست(چپ) دیو). حلقه R را راست (چپ) دیو[۱۷] نامیم هرگاه هر ایده‌آل راست (چپ) از R، دوطرفه باشد.

حلقه دیو بدان معناست که R، راست و چپ دیو باشد.

لم ۳۸.۲.۱. حلقه‌های راست (چپ) دیو، نیم جابجایی می‌باشند.

برهان. فرض کنیم حلقه R، راست (چپ) دیو باشد. پس هر ایده‌آل راست (چپ) R، دوطرفه است پس ایده‌آل راست r_R (ایده‌آل چپ l_R) نیز دوطرفه است. بنابراین با توجه به لم ۱.۲.۲(۱)، حلقه R، نیم جابجایی می‌باشد. □

لم ۳۹.۲.۱. حلقه‌های نیم جابجایی لزوماً راست یا چپ دیو نمی‌باشند.

برهان. فرض کنیم حلقه R کاهشی و

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

باشد. ثابت می‌کنیم حلقه S، نیم جابجایی است. ابتدا برای

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$$

تعریف می‌کنیم:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

و

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)\,(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2)$$

[۱۶] Van-Neumann regular

[۱۷] due

حال فرض کنیم $(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = 0$. پس معادلات زیر را داریم:

(1) $a_1a_2 = 0$

(2) $a_1b_2 + b_1a_2 = 0$

(3) $a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0$

(4) $a_1d_2 + d_1a_2 = 0$

چون بنا بر فرض حلقه R کاهشی است پس نیم جابجایی است (لم ۲۳.۲.۱) و از معادله (۱) داریم $a_1Ra_2 = 0$. معادله (۲) را از راست در a_2 ضرب می‌کنیم پس $0 = a_1b_2a_2 + b_1a_2a_2 = b_1a_2a_2$ و $b_1a_2 = 0$ و در نتیجه $b_1Ra_2 = 0$ و سپس $a_1b_2 = 0$ و در نتیجه $a_1Rb_2 = 0$. از معادله (۴) ، $d_1Ra_2 = 0$ و $a_1Rd_2 = 0$ را به دست می‌آوریم به طریق مشابه و معادله (۳) را از راست در a_2 ضرب می‌کنیم پس $0 = a_1c_2a_2 + b_1d_2a_2 + c_1a_2a_2 = c_1a_2a_2$ و $c_1a_2 = 0$. در نتیجه $c_1Ra_2 = 0$ و همچنین $a_1c_2 + b_1d_2 = 0$ و این معادله را از راست در a_1 ضرب می‌کنیم. پس $0 = a_1c_2a_1 + b_1d_2a_1 = a_1c_2a_1$ و $a_1c_2 = 0$ و در نتیجه $a_1Rc_2 = 0$ و $b_1d_2 = 0$ نتیجه می‌دهد $b_1Rd_2 = 0$. حال برای هر $r, s, t, u \in R$ بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, b_1, c_1, d_1)(r, s, t, u)(a_2, b_2, c_2, d_2) \\
&\qquad = (a_1ra_2, a_1rb_2 + a_1sa_2 + b_1ra_2, a_1rc_2 + a_1ta_2 + c_1ra_2 + b_1ua_2 \\
&\qquad\qquad + a_1sd_2 + b_1rd_2, a_1rd_2 + a_1ua_2 + d_1ra_2) = 0
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0
$$

برای هر

$$
\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in S
$$