دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی آمار، گرایش

آمار ریاضی

عنوان

توزیع وایبل نمایی‌شده

اساتید راهنما

دکتر حسین جباری خامنه‌ای

دکتر حسین بیورانی

پژوهشگر

سعیده آقازاده

تابستان ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

مادر مظلومه مان، حضرت زهرا (س) و سردار بی یاورش، امام حسن (ع) و

فرزند غریبش، ارباب دو عالم،

امام حسین (ع)

و زینب صبورش و عباس غیورش و مهدی موعودش؛

او که تنها قرار دل ماست.

"اللّهم عجّل لولیّک الفرج"

به نام خداوند جان آفرین

«من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

سپاس و ستایش خداوند یکتا را که انسان را در «احسن تقویم» آفرید و به زیور دانشش آراسته، بر سایر آفریدگانش سر کرد؛ آنگاه او را تا بدان پایه برکشید که فرشتگان درگاهش در پیش او پیشانی به خاک مالیدند.

و درود و سلام بر سرور کائنات، حضرت ختمی مرتبت(ص) و خاندان پاکش ـ که هر یک آفتاب فروزان آسمان خلقتند.

اکنون هنگام آن است که از اساتید فرزانه و دانشمندم ـ که به دو سال از خوان دانششان ریزه‌ها خورده و زلّه‌ها برده‌ام ـ با خضوعی هرچه‌تمام‌تر، سپاسگزار باشم.

بنابراین، برخود لازم می‌دانم که نام آن بزرگواران را زیب این دفتر کنم:

۱- استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین جباری خامنه‌ای، استاد راهنمای اولم؛ عزیزی که هر بار به خدمتشان رسیده و مشکلم را بدیشان نموده‌ام، با افتادگی و خضوع و حوصله‌ای بیرون از وصف، با تأیید نظر، حل معما کرده‌اند.

۲- استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین بیورانی، استاد راهنمای دومم؛ که در نگارش این اوراق و همچنین در طول تحصیل، هرجا به مشکلی گرفتار می‌آمدم، پیوسته تدابیر حکیمانه‌ی ایشان کلید مسایلم بود.

۳- استاد ارجمند جناب آقای دکتر مهرداد لکستانی، که در موارد فراوانی از محضرشان فیض برده و با راهنمایی‌های بی‌شایبه‌ی خود، اینجانب را در رفع مشکلات برنامه‌های کامپیوتری مساعدت نموده‌اند.

٤- استاد محترم جناب آقای دکتر جعفر احمدی شالی، که با سعه‌ی صدر و رویی‌گشاده، داوری این پایان‌نامه را انجام دادند.

٥- پدر و مادر بزرگوارم ـ این دو فرشته‌ی آسمانی و معلّمان گمنام زمانه ـ آن‌هایی که زندگی‌شان را به پای من ریختند و فانوس آرزوهایشان را در راه پیشرفت علمی و ادبی بنده بر طاق آویختند و من به نشان سپاس، بوسه می‌زنم بر دستان مبارکشان.

در پایان باید بگویم که خدایشان توفیق دهد و با اعطای طول عمر با عزّتشان، دانشجویان مشتاق را به سر منزل حقیقت و معرفت رهنمون گرداند.

سعیده آقازاده

تابستان ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: آقازاده نام: سعیده
عنوان: توزیع وایبل نمایی‌شده
استاد راهنمای اول : دکتر حسین جباری خامنه‌ای استاد راهنمای دوم: دکتر حسین بیورانی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی دانشگاه: تبریز دانشکده : علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: تابستان ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۱۰
کلید واژه‌ها: مدل فشار– نیرو، توزیع وایبل نمایی‌شده، روش تکراری ساده، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم، اریبی.

چکیده

در مدل فشار– نیرو، نیرو (X) و فشار (Y)، به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و قابلیت اعتماد یک مؤلفه در یک دوره، به صورت احتمال بیشتر بودن نیرو از فشار در طول دوره یعنی $P(Y < X)$، تعریف می‌شود.

هدف اصلی این پایان‌نامه، برآورد $R = P(Y < X)$ ، زمانی که X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع وایبل نمایی‌شده هستند، می‌باشد. خانواده‌ی وایبل نمایی‌شده، که توسط مودهولکار و اسریواستاوا در سال ۱۹۹۳ معرفی شده است، دو پارامتر شکل و یک پارامتر مقیاسی دارد و خانواده‌ی وایبل و خانواده‌ی نمایی نمایی شده، به عنوان موارد خاصی از این خانواده، در نظر گرفته شده‌اند.

توزیع وایبل نمایی‌شده، در مدل‌سازی داده‌های مقادیر غایی با استفاده از سیل، طرح‌های آزمون زندگی شتاب بهینه به طور آماری، مدل‌سازی قطر درخت، مدل‌ها برای کامپوزیت‌های فیبری کربن و ...، بکار گرفته شده است.

با توجه به اهمیت توزیع وایبل نمایی‌شده، در این پایان‌نامه، ابتدا به معرفی این توزیع و بیان ویژگی‌هـای آن می‌پردازیم و به دنبال آن، درآمدی بر مدل فشار – نیرو خواهیم داشت. سپس مسئله‌ی برآورد R را برای این توزیع مطرح می‌کنیم که برای اولین‌بار ارائه شده است.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

مقدمه

در مدل فشار– نیرو، نیرو (X) و فشار (Y)، به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و قابلیت اعتماد یک مؤلفه در یک دوره، به صورت احتمال بیشتر بودن نیرو از فشار در طول دوره یعنی $P(Y < X)$، تعریف می‌شود. به دلیل کاربردهای عملی مدل فشار – نیرو، مسئله‌ی برآورد $R = \mathrm{P(Y < X)}$، توجه نویسندگان زیادی را به خود جلب کرده است. برای مثال احمد و همکاران[۱] [٤] و سارلس و پاگت[۲] [٤٤] ، برآورد R را زمانی که X و Y دارای توزیع بور نوع X هستند، در نظر گرفتند. عبدالفتاح و ماندو[۳] [۱] برآورد R را برای متغیرهای تصادفی مستقل لوماکس به دست آوردند. کوندو و گوپتا[٤] [۲۷] برآورد R را زمانی که X و Y دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته هستند، مد نظر قرار دادند. چرچ و هاریس[۵] [۱٤] برآورد درستنمایی ماکزیمم R را برای توزیع نرمال به دست آوردند و دانتون[٦] [۱۵] برآورد $UMVUE$ را تحت همان مدل بررسی کرد. همچنین برآورد درستنمایی ماکزیمم R، زمانی‌که X و Y دارای توزیع نمایی دو متغیره هستند به وسیله آواد[۷] [۵]، مورد ملاحظه واقع شد.

در این پایان‌نامه، مسأله‌ی برآورد $R = \mathrm{P(Y < X)}$ را تحت این فرض که X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع وایبل نمایی‌شده هستند، در نظر می‌گیریم. خانواده‌ی وایبل نمایی‌شده، که توسط مودهولکار و اسریواستاوا [۳۵] در سال ۱۹۹۳ معرفی شده است، دو پارامتر شکل[۸] و یک پارامتر مقیاسی[۹] دارد. این توزیع در زمینه‌های مختلف از جمله در مدل‌سازی مهاجرت مارکوین در امور مالی و پزشکی، برآورد تعداد قله‌های اُزن، مدل‌سازی داده-های شکست موتور اتوبوس و ... کاربرد دارد.

فصل اول به تعاریف و مفاهیم اولیه اختصاص دارد. فصل دوم به معرفی توزیع وایبل نمایی‌شده و ویژگی‌های آن می‌پردازد. در فصل سوم مدل‌های شامل عبارات احتمالی نظیر $\mathrm{P(Y < X)}$ ، که به مدل فشار– نیرو معروفند،

[۱] Ahmad et al
[۲] Surles and Padgett
[۳] Abd-Elfattah and Mandouh
[٤] Kundu and Gupta
[۵] Church and Harris
[٦] Downtown
[۷] Awad
[۸] Shape parameter
[۹] Scale parameter

مطالعه می‌شود. در فصل چهارم، برآورد $R = P(Y < X)$ برای توزیع وایبل نمایی‌شده را زمانی‌که، پارامترهای مقیاسی متغیرهای تصادفی X و Y، برابر و نابرابر باشند، انجام می‌دهیم که برای اولین‌بار ارائه می‌شوند.

خاطر نشان می‌کنیم که کلیه شبیه‌سازی‌های این پایان‌نامه با نرم‌افزار $MAPLE$ صورت گرفته است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، برخی مفاهیم ریاضی و آماری را که در فصل‌های آینده مورد نیاز است، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ تابع گاما[1] و مشتقات آن

به ازای $\alpha > ۰$، تعریف کنید

$$\Gamma(\alpha) = \int_{۰}^{\infty} t^{\alpha-۱} \exp(-t)\, dt \qquad (۱.۱)$$

آنگاه، $\Gamma(\alpha)$ را تابع گاما می‌نامیم. با تعریف

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_{x}^{\infty} t^{\alpha-۱} \exp(-t)\, dt \quad , \quad \gamma(\alpha, x) = \int_{۰}^{x} t^{\alpha-۱} \exp(-t)\, dt \qquad (۲.۱)$$

آنگاه عبارت‌های (۲.۱)، به ترتیب تابع گامای ناقص بالایی و پایینی نامیده می‌شود. واضح است $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, ۰)$. تابع گاما را می‌توان همچنین به صورت یک حاصلضرب متناهی نوشت:

$$\Gamma(\alpha) = \left[\alpha \exp(\gamma\alpha) \prod_{r=۱}^{\infty} \left(۱ + \frac{\alpha}{r}\right) \exp(-\frac{\alpha}{r})\right]^{-۱} \qquad (۳.۱)$$

که در آن $\gamma = ۰/۵۷۷۲$، ثابت اویلر- ماشرونی[2] است. حال اگر تعریف کنیم $\psi(\alpha) = \frac{dln(\Gamma(\alpha))}{d\alpha}$، آنگاه $\psi(.)$ را تابع دایگاما[3] یا تابع پسی می‌نامیم. روابط زیر برای $\psi(\alpha)$ برقرار است:

$$\psi(۱) = -\gamma$$

$$\psi(\alpha) = \frac{۱}{\alpha - ۱} + \frac{۱}{\alpha - ۲} + \cdots + \frac{۱}{\alpha - r} + \psi(\alpha - r) \qquad (۴.۱)$$

$$\psi(\alpha) = -\gamma - \frac{۱}{\alpha} + \alpha \sum_{k=۱}^{\infty} (\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k + \alpha})$$

---

[1] Gamma Function
[2] Euler-Mascheroni
[3] Digamma

$$\psi^{(n)}(\alpha) = (-1)^{n+1} n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+\alpha)^{n+1}} \qquad , n \geq 1$$

که در آن $\psi^{(n)}$، مشتق n ام تابع دایگاما است. با توجه به رابطه‌ی (۴.۱) و برای هر $K \geq 1$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\psi(\alpha+k) - \psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{(\alpha+1)} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+k-1)}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} + \cdots + \frac{\alpha}{\alpha+k-1}}{\Gamma(\alpha+1)} = 1 \qquad (۵.۱)$$

اگر p یک عدد مختلط، و $\mathcal{R}(p)$ قسمت حقیقی p باشد، آنگاه به ازای $a \neq 0, -1, -2, \ldots$ و $\mathcal{R}(p) > 1$

$$\zeta(p,a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^p} \qquad , \qquad \zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad (۶.۱)$$

را به ترتیب تابع زتای تعمیم‌یافته[۴] و تابع زتای ریمان می‌نامیم. به سادگی معلوم می‌شود که

$$\zeta(2) = \zeta(2,1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad , \qquad \zeta(4) = \zeta(4,1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad (۷.۱)$$

رابطه‌ی زیر بین تابع زتا و گاما برقرار است:

$$\frac{d^r}{dz^r} \ln\big(\Gamma(z)\big) = \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \psi(z) = \begin{cases} \psi(z) & r = 1 \\ (-1)^r \Gamma(r)\, \zeta(r,z) & r \geq 2 \end{cases} \qquad (۸.۱)$$

تعریف ۲.۱ تابع مقعر[۵] (محدب[۶])

فرض کنید $f: (a,b) \to R$ تابعی حقیقی، و f'' روی بازه‌ی (a,b) وجود داشته باشد. تابع f محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$).

[۴] Generalized Zeta function
[۵] Concave Function
[۶] Convex Function

تعریف ۳.۱ توابع مطلقاً پیوسته[۷]

تابع حقیقی f تعریف شده روی فاصله‌ی $[a,b]$ را پیوسته‌ی مطلق گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر دسته‌ی متناهی n تایی از فاصله‌های $\{(a_i, b_i)\}$ که نقطه‌ی مشترکی با هم ندارند و در نابرابری

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$$

صدق می‌کنند، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

با توجه به تعریف، هر تابع مطلقاً پیوسته، پیوسته است (امیدوار شلمانی، صدیقه [۵۳]).

تعریف ٤.۱ تابع چگالی احتمال[۸]

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع $f(x)$ را تابع چگالی احتمال X می‌نامند هرگاه:

۱. به ازای هر $x \in R_X$ ؛ $f(x) > 0$

۲. برای هر $A \subseteq R_X$ ؛ $P(A) = \int_A f(x)\, dx$

۳. $\int_{R_X} f(x)\, dx = 1$

که در آن R_X تکیه‌گاه متغیر تصادفی X می‌باشد.

[۷] Absolutely Continuous
[۸] Probability Density Function

تعریف ۵.۱ تابع چگالی احتمال توأم[۹]

اگر (X,Y) متغیرهای تصادفی توأماً پیوسته باشند، تابع چگالی $f(x\,,y)$ را تابع چگالی احتمال (X,Y) می‌نامند هرگاه:

۱. $f(x\,,y) \geq ۰$

۲. $\int_Y \int_X f(x\,,y)\ dxdy = ۱$

تعریف ۶.۱ تابع توزیع[۱۰]

یکی از توابعی که برای تعیین احتمال یک متغیر تصادفی به کار می‌رود، تابع توزیع است که برای انواع متغیرهای تصادفی به صورت یکسان تعریف می‌شود. برای هر متغیر تصادفی X، تابع توزیع X به ازای هر نقطه‌ی $x \in R$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz; \quad x \in R \qquad (۹.۱)$$

تعریف ۷.۱ تابع جرم احتمال[۱۱] (تابع احتمال)

تابع جرم احتمال (تابع احتمال) متغیر تصادفی گسسته‌ی X، توسط رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود (کسلا و برگر[۱۲] [۱۲]) :

$$f_X(x) = P(X = x) \qquad \forall x$$

[۹] Joint Probability Density Function
[۱۰] Distribution Function
[۱۱] Probability Mass Function
[۱۲] Casella and Berger

تعریف ۸.۱ تابع چندکی[۱۳] (معکوس[۱٤])

برای تابع توزیع اکیداً صعودی F ، معکوس $F^{-۱}$ از F، تابعی است که به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود (مارشال و اُلکین[۱۵] [۳۲]):

$$z(F) = F^{-۱}(p) = \sup\{z:\ F(z) \le p\} = \inf\{z:\ F(z) \ge p\} \qquad ۰ < p < ۱ \tag{۱۰.۱}$$

تعریف ۹.۱ مقدار مورد انتظار[۱٦]

اگر χ فضای نمونه‌ی X باشد، مقدار مورد انتظار یا میانگین متغیر تصادفی $g(X)$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(g(X))=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \\ \sum_{x\in\chi} g(x)\ \ f_X(x) = \sum_{x\in\chi} g(x)\ \ P(X=x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

اگر $E|g(X)| = \infty$، آنگاه $E(g(X))$ موجود نیست؛ مثل متغیر تصادفی کوشی و... .

تعریف ۱۰.۱ گشتاور مرتبه‌ی n ام[۱۷]

برای هر عدد صحیح n، n امین گشتاور X (یا $F_X(x)$)، $\acute{\mu}_n$ به صورت زیر است:

$$\acute{\mu}_n = \mathrm{E}(X)^n \tag{۱۲.۱}$$

تعریف ۱۱.۱ گشتاور مرکزی مرتبه‌ی n ام[۱۸]

برای هر عدد صحیح n، گشتاورمرکزی مرتبه‌ی n ام X (یا $F_X(x)$)، μ_n به صورت زیر است:

$$\mu_n = \mathrm{E}((X-\mu)^n) \tag{۱۳.۱}$$

[۱۳] Quantile Function
[۱٤] Inverse Function
[۱۵] Marshall and Olkin
[۱٦] Expected Value
[۱۷] N Th Moment
[۱۸] N Th Central Moment