

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای رضا سیاوشی

تحت عنوان

ترمودینامیک هندسی گاز جی اون G-On

در تاریخ ۱۳۸۷/۱۲/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

دکتر بهروز میرزا

۱-استاد راهنمای پایان نامه

دکتر احمد شیرزاد

۲-استاد مشاور پایان نامه

دکتر فرهاد شهبازی

۳-استاد داور

دکتر کیوان آقابابایی سامانی

۴-استاد داور

دکتر فرهاد شهبازی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و حمایت‌های بی‌شائبه‌ی خانواده‌ی عزیزم تشکر نمایم، از حمایت‌های دکتر میرزا در تکمیل این پایان‌نامه سپاس گزارم، و همچنین اساتید گرامی، دکتر شیرزاد، دکتر سامانی و دکتر شهبازی.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است.

فهرست مندرجات

فصل اول.....	۱
۱-۱ رابطه های اساسی آمار فرمی.....	۲
۲-۱ تابع توزیع فرمی	۴
۱- ۳ آمار بوز.....	۷
۴-۱ یک گاز ایده آل کوانتومی در آنسامبل میکروکانونیک.....	۹
۵-۱ گاز ایده آل در دیگر آنسامبل های کوانتوم- مکانیکی.....	۱۲
فصل دوم.....	۱۹
۱-۲ تقریب گاوسی و نظریه کلاسیک افت و خیز گرمایی.....	۲۰
۲-۲ گازهای ایده آل در دو بعد.....	۲۳
۳-۲ مکانیک کوانتومی آنیون ها.....	۲۵
فصل سوم.....	۳۰
۱-۳ مقدمه ای بر ترمودینامیک هندسی.....	۳۱
۲-۳ هندسه ی متریک فضای پارامتر.....	۳۳
۳-۳ ساختار هندسی فضای پارامتر برای سیستمی که به وسیله ی توزیع گراند کانونیک توصیف می- شود.....	۳۵
فصل چهارم.....	۴۴
۱-۴ خواص ترمودینامیکی گاز ایده آل با آمار کسری.....	۴۴

۲-۴: انحناى ترمودینامیکی گاز آنیونی..... ۵۰

۳-۴ خواص ترمودینامیکی و انحناى ترمودینامیکی یک گاز g-on..... ۵۳

۴-۴ خواص ترمودینامیکی و انحناى ترمودینامیکی g-on در حالت فرانسیتی..... ۵۸

۵-۴ خواص ترمودینامیکی و انحناى ترمودینامیکی آنیونی در حالتی که روی انرژی تصحیحی نداریم..... ۶۰

۶-۴ نتیجه گیری..... ۶۴

پیوست ۱..... ۶۵

پیوست ۲..... ۶۷

چکیده

برخی از خواص ترمودینامیکی گازهای ایده آل کوانتومی می‌تواند به وسیله‌ی انحنای ریمانی R مربوط به فضای پارامترهای ترمودینامیکی آن گاز محاسبه شود. مولفه‌های تانسور متریک در این حالت می‌تواند مشتق‌های مرتبه‌ی دوم انرژی داخلی یا آنتروپی سیستم و یا پتانسیل‌های ترمودینامیکی که تبدیل لژاندر آنتروپی یا انرژی داخلی هستند باشند. به این ترتیب انحنای ترمودینامیکی تابعی از مشتقات دوم و سوم این کمیت‌ها می‌باشد. هر اندازه انحنای ترمودینامیکی کوچکتر باشد، گاز ایده آل کوانتومی مورد مطالعه پایدارتر است. در حالتی که یک گاز ایده آل بوزونی را در نظر بگیریم، انحنای ترمودینامیکی مثبت به دست می‌آید. و اگر گاز ایده آل فرمیونی را در نظر بگیریم، انحنای ترمودینامیکی منفی به دست می‌آید. که این خود نشان از پایداری بیشتر گاز فرمیونی به نسبت گاز بوزونی است.

در این پایان‌نامه انحنای ترمودینامیکی را برای ذرات با آمار کسری در دو بعد (آنیون‌ها) و در n بعد (جی‌اون‌ها) با تصحیحات مختلف انرژی در ناحیه‌ی کلاسیک ماکسول بولتزمان استخراج می‌کنیم. می‌بینیم که در یک حالت خاص این انحنا دارای مقدار صفر است. نواحی که انحنای ترمودینامیکی مثبت و یا منفی هستند به دست آمده است. با به دست آمدن این نواحی مثبت و منفی، می‌توانیم نواحی با پایداری بیشتر (شبه فرمیونی) و نواحی با پایداری کمتر (شبه بوزونی) را مشخص کنیم.

واژه‌های کلیدی: گاز ایده آل کوانتومی، گاز فرمی، گاز بوز، گاز آنیونی، گاز جی‌اون، انحنای ترمودینامیکی

فصل اول

مقدمه

در این فصل ابتدا به مروری در مورد آمار فرمیون ها و بوزن ها می پردازیم. مطالعه‌ی مکانیک آماری حاکم بر فرمیون ها و بوزون ها منشاء ایجاد یک دیدگاه کلی تر بر ذرات با آمار کسری است. زیرا این ذرات از لحاظ آماری رفتاری بینابین فرمیون ها و بوزون ها دارند. سپس رفتار یک گاز ایده آل در آنسامبل میکروکانیک را به عنوان نمونه بررسی می کنیم، و رابطه های مربوط به آمار عدد اشغال که در فصل های بعد باز هم در مورد آن بحث خواهیم کرد، را استنتاج می کنیم، و در پایان به اختصار در مورد آمار- اسپین دار صحبت می کنیم.

آمار فرمیونی و بوزونی

مشخصه های آمارهای فرمی و بوز با آمار کلاسیک ماکسول-بولتزمان متفاوت است. شرط زیر ناحیه ای را مشخص می کند که در آن تفاوت هایی بین آمارهای فرمی و بوز با آمار کلاسیک ماکسول-بولتزمان به وجود می آید:

$$\frac{N}{V} \geq \frac{(2\lambda mKT)^{\frac{1}{2}}}{h^3} \rightarrow n\lambda^3 \geq 1 \quad (1-1)$$

که در آن V حجم گاز، N تعداد ذرات موجود در این حجم، T دمای گاز، K ثابت بولتزمان، m جرم تک ذره ی گاز، و h ثابت پلانک و n تعداد ذرات در واحد حجم سیستم می باشند. λ نیز طول موج گرمایی میانگین ذرات است.

همان طور که می دانیم فرمیون ها و بوزون ها را نمی توان با آمار ماکسول-بولتزمان مطالعه کرد، بنا بر این برای مطالعه ی این ذرات از مکانیک کوانتومی استفاده می کنیم، با توجه به این رابطه که شرط مخالف ماکسول-بولتزمان را نشان می دهد، می بینیم که اثرات مکانیک کوانتومی در دماهای پائین و چگالی های بالا خود را نشان می دهد.

۱-۱ رابطه های اساسی آمار فرمی:

ذراتی که از آمار فرمی تبعیت می کنند، فرمیون نامیده می شوند. در یک سیستم فرمیونی، میانگین عدد اشغال یک ذره در حالت τ به صورت:

$$\bar{n}_{\tau} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_{\tau} - \mu)}{KT}} + 1} \quad (1-2)$$

داده می شود. که در آن ϵ_{τ} انرژی حالت کوانتومی τ و μ پتانسیل شیمیایی است.

برای توزیع فرمیونی، گاهی μ را سطح فرمی یا پتانسیل فرمی می نامند (به آن انرژی فرمی نیز می گویند، که خیلی مناسب نیست اما متداول شده است). اگر کل انرژی سیستم جمع تمام انرژی های تک ذره ای باشد، در نهایت انرژی کل E برابر می شود با:

$$E = \sum_{\tau} \varepsilon_{\tau} \bar{n}_{\tau} = \sum_{\tau} \frac{\varepsilon_{\tau}}{e^{\frac{(\varepsilon_{\tau} - \mu)}{KT}} + 1} \quad (1-3)$$

و تعداد کل ذرات سیستم عبارت است از:

$$N = \sum_{\tau} \bar{n}_{\tau} = \sum_{\tau} \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon_{\tau} - \mu)}{KT}} + 1} \quad (1-4)$$

و انرژی آزاد با رابطه ی زیر داده می شود:

$$F = N\mu - KT \sum_{\tau} \log(1 + e^{-\frac{(\varepsilon_{\tau} - \mu)}{KT}}) \quad (1-5)$$

روابط (۱-۲) تا (۱-۵) را می توان به روش های مختلف زیر تفسیر کرد.

۱- زمانی که T و μ را داده باشند (هنگامی که سیستم در تماس با یک منبع گرمایی و یک منبع ذره ای باشد) (۱-۲) میانگین عدد اشغال یک حالت تک ذره ای را نشان می دهد و (۱-۳) میانگین انرژی کل و (۱-۴) میانگین کل ذرات سیستم را به ما می دهد.

۲- زمانی که T و N را داده باشند، μ از رابطه ی (۱-۴) به عنوان تابعی از T و N داده می شود (۱-۲) و (۱-۳) به ترتیب میانگین عدد اشغال و میانگین کل انرژی را به ما می دهند.

۳- زمانی که E و N را داده باشند، T و μ با استفاده از روابط (۱-۳) و (۱-۴) به عنوان تابعی از E و N به دست می آیند. و (۱-۲) میانگین عدد اشغال را می دهد.

چگالی حالت تک ذره:

اگر V را حجم فضایی که ذرات در آن محبوس شده اند در نظر بگیریم. زمانی که V بزرگتر می شود، توزیع تراز های تک ذره ای متراکم تر می شوند. برای یک حجم نسبتاً بزرگ، تعداد حالت هایی که انرژی بین ε و $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ دارند به صورت زیر نوشته می شوند:

$$D(\varepsilon)\Delta\varepsilon$$

$D(\varepsilon)$ چگالی حالت تک ذره است بر حسب این چگالی حالت روابط (۱-۵) - (۱-۳) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$E = \int \varepsilon f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-6)$$

$$N = \int f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-7)$$

$$F = N\mu - KT \int \log(1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/KT}) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-8)$$

که

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \quad (1-9)$$

۱-۲ تابع توزیع فرمی :

تابع $f(\varepsilon)$ که بار رابطه ی (۱-۹) مشخص می شود تابع توزیع فرمی نامیده می شود. شکل (۱-۱) شکل این تابع را بر حسب ε نمایش می دهد. در حد $T \rightarrow 0$ این منحنی به شکل یک پله تیز است. ولی در دماهای محدود، شکل پله ای تابع با عرض در حدود KT در دو طرف $\varepsilon = \mu$ گسترده شده است. شکل (۱-۲) مثال هایی از $D(\varepsilon)f(\varepsilon)$ را نشان می دهد.

$(\varepsilon_0 = 0)$ پائین ترین انرژی حالت های تک ذره ای است.

$T = 0^0\text{K}$ (a) مقدار μ_0 از μ در صفر کلوین به صورت زیر مشخص می شود :

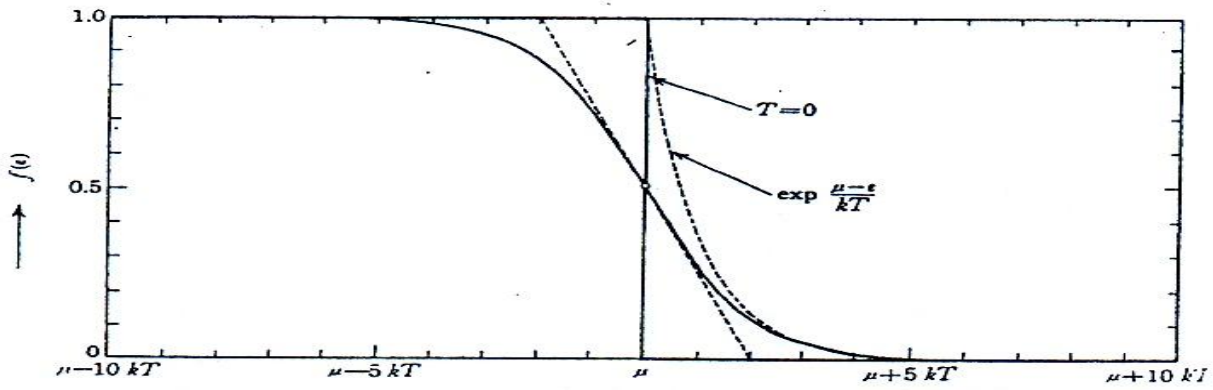
$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = a$$

قسمت هاشور خورده ی منحنی

μ_0 سطح فرمی (پتانسیل فرمی) در دمای صفر کلوین است و

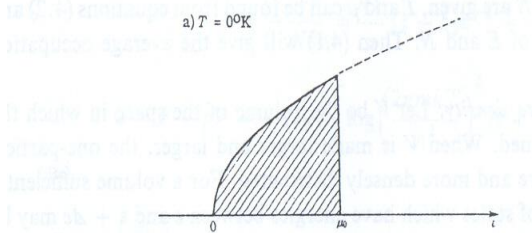
$$E_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon$$

پائین ترین انرژی سیستم است.



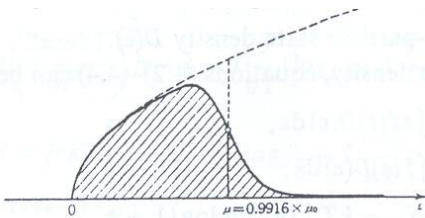
شکل (۱-۱): نمودار تابع توزیع فرمی

شکل: (۱-۲) $(\epsilon_0 = 0)$

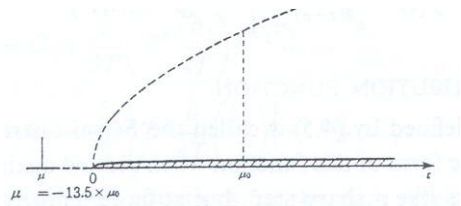


a) $T = 0^0 K$

b) دماهای پائین: $KT = \frac{1}{10} \mu_0$



c) دماهای بالا : $KT = 5\mu_0$



شکل: (۱-۲) $(\epsilon_0 = 0)$

$T_0 = (\mu_0 - \epsilon_0) / K$ (دماهای پائین) ، $T \ll T_0$ ، $T \neq 0$ (b)

مقدار μ با شرط زیر تعیین می شود:

$$N = \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = b$$

μ تابعی از T است و سطح فرمی در $T^\circ K$ نامیده می شود. همان طور که در شکل (۱-۲-b) نشان داده شده است، در دماهای پائین μ از ϵ_0 بزرگتر است.

$T \gg T_0$ ، $T \neq 0$ (دماهای بالا) (c)

در دماهای نسبتاً بزرگ μ کوچکتر از ϵ_0 می شود. این مساله در شکل (۱-۲-c) نشان داده شده است. در این مورد توزیع فرمی ممکن است توسط توزیع بولتزمن جایگزین شود (حد کلاسیک).

(۱) رابطه ای برای حالت های واگن:

$g(\epsilon)$ را تابعی پیوسته و مشتق پذیر در $\epsilon = \mu$ در نظر گرفته و تغییراتش را در بازه ی $|\epsilon - \mu| \lesssim KT$ کند

فرض می کنیم. سپس خواهیم داشت:

$$\int_{\epsilon_0}^{\infty} g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_0}^{\mu} g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2 (KT)^2}{6} g'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (KT)^4 g'''(\mu) + \dots \quad (1-10)$$

یا:

$$-\int_{\epsilon_0}^{\infty} \phi(\epsilon) \frac{df}{d\epsilon} d\epsilon = \phi(\mu) + \left(\frac{\pi^2}{6}\right) (KT)^2 \phi''(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (KT)^4 \phi^{(IV)}(\mu) + \dots$$

که:

$$\phi' = g, \phi(\varepsilon_0) = 0 \quad (1-11)$$

رابطه ی (۱-۱۰) دارای کاربردهای بسیار است که یکی از مهمترین آن ها رابطه ای است که برای μ در دماهای پائین داریم:

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{d \log D(\mu_0)}{d \log \mu_0} \left(\frac{KT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right\} \quad (1-12)$$

۱-۳ آمار بوز:

برای بوزون ها رابطه های زیر را داریم:

$$\bar{n}_\tau = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\tau - \mu)} - 1} \quad (1-13)$$

$$E = \sum_\tau \varepsilon_\tau \bar{n}_\tau = \sum_\tau \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\tau - \mu)} - 1} \quad (1-14)$$

$$N = \sum_\tau \bar{n}_\tau = \sum_\tau \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\tau - \mu)} - 1} \quad (1-15)$$

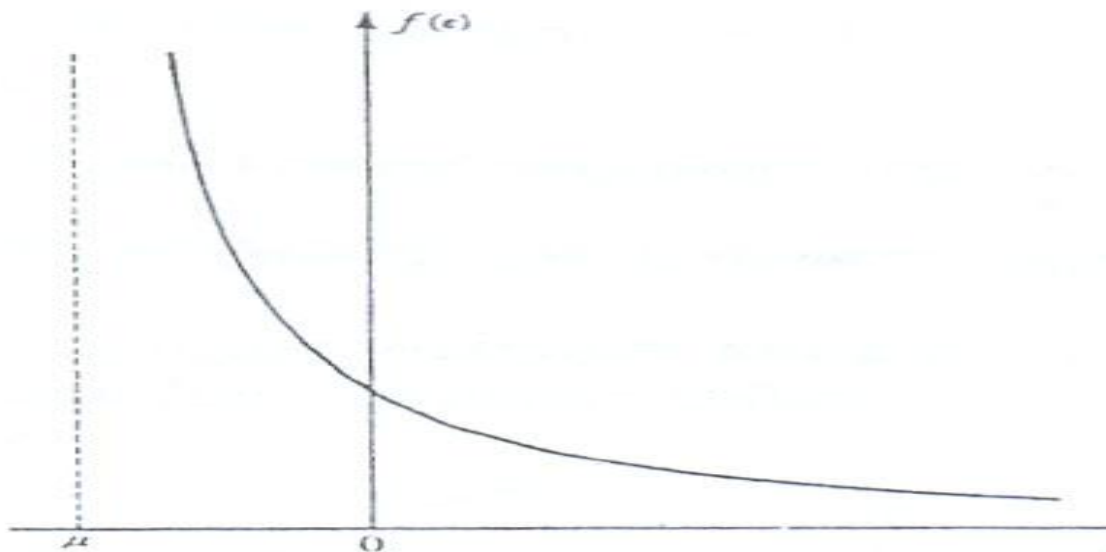
$$F = N\mu + KT \sum_\tau \log(1 - e^{-\beta(\varepsilon_\tau - \mu)}) \quad (1-16)$$

در اکثر موارد تعداد ذرات یعنی N معلوم است و از رابطه ی (۱-۱۴)، μ را به عنوان تابعی از T و N/V به دست می آوریم.

تابع:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad (1-17)$$

تابع توزیع بوز نامیده می شود. همانطور که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است، زمانی که $\varepsilon \rightarrow \mu$ ، $f(\varepsilon)$ بی نهایت می شود. بنابراین، اگر پائین ترین انرژی تک ذره صفر انتخاب شود، بایستی داشته باشیم $\mu \leq 0$.



شکل (۱-۴): تابع توزیع بوز

هنگامی که شرط $|\mu| \gg KT$ ارضا شود، سیستم غیرواکن می شود و آمار بوز با آمار ماکسول-بولتزمان جایگزین می شود. و هنگامی که شرط $|\mu| \sim KT$ برآورده شود، تبهگنی قابل توجهی وجود دارد- این شرط ممکن است برای ذرات آزاد به صورت زیر بیان شود:

$$\frac{N}{V} \gtrsim \frac{(2\lambda mKT)^{\frac{1}{2}}}{h^3} \quad (1-18)$$

۱-۴ یک گاز ایده آل کوانتومی در آنسامبل میکروکانونیک :

یک سیستم گازی متشکل از N ذره ی تمیزناپذیر که با هم بر هم کنش ندارند و در حجم V محبوس را با انرژی کل E در نظر می گیریم. کمیت آماری مورد علاقه ی ما در این حالت $\Omega(N, V, E)$ است که تعداد میکروحالت های قابل دستیابی سیستم، زمانی که ماکرو حالت ما (N, V, E) باشد را مشخص می کند.

از آنجا که برای حجم بزرگ V ، سطوح انرژی تک ذره ی سیستم بایستی بسیار به یکدیگر نزدیک باشند، می توانیم طیف انرژی را به تعداد زیادی "گروه های سطوح انرژی" تقسیم کنیم، که ممکن است انرژی یک سلول را مشخص کند. شکل (۱-۵) ϵ_i را میانگین انرژی یک سطح در نظر می گیریم و g_i تعداد دلخواهی از سطوح در سلول i ام هستند ($g_i \gg 1$). در شرایط خاص n_1 ذره در سلول ۱، n_2 ذره در سلول دوم الی آخر. به وضوح باید شرایط زیر را در مورد یک مجموعه $\{n\}$ داشته باشیم :

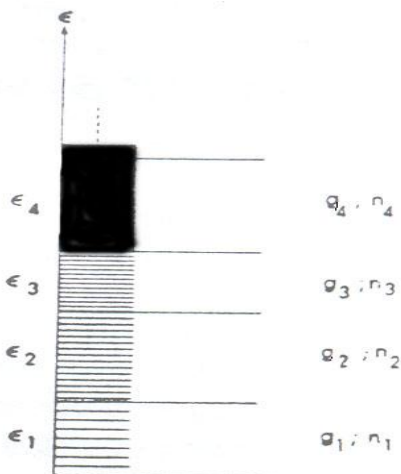
$$\sum_i n_i = N \quad (1-19)$$

$$\sum_i n_i \epsilon_i = E \quad (1-20)$$

سپس خواهیم داشت:

$$\Omega(N, V, E) = \sum_{\{n_i\}} W\{n_i\} \quad (1-21)$$

که $W\{n_i\}$ تعداد میکروحالت های مجزای مرتبط با مجموعه ی توزیع $\{n_i\}$ است.



شکل (۱-۵)

سپس خواهیم داشت :

$$W\{n_i\} = \prod_i W(i) \quad (1-22)$$

که $W(i)$ تعداد میکرو حالت های مرتبط با طیف i امین سلول است (سلولی که n_i ذره بین g_i سطح توزیع شده‌اند). ضرب در رابطه (۱-۲۲) بر روی تمامی سطوح در طیف است. بنابراین واضح است که $W(i)$ تعداد راه‌هایی است که می‌توان n_i ذره را در بین g_i سطح در سلول i ام قرار داد می‌باشد این تعداد در حالت بوز اینشتین به صورت زیر داده می‌شود:

$$W_{B.E} = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (1-23)$$

در نتیجه‌ی

$$W_{B.E} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (1-24)$$

و اما در حالت فرمی-دیراک هیچ سطحی نمی‌تواند بیش از یک ذره در برداشته باشد. بنابراین، تعداد n_i نباید از g_i بیشتر باشد. تعداد راه‌های $W(i)$ با تعداد راه‌هایی که g_i می‌تواند به دو زیرگروه که یکی n_i سطح را در بر دارد (هر کدام به وسیله‌ی یک ذره اشغال شده‌اند) و یک زیرگروه دیگر که شامل $(g_i - n_i)$ سطح است که اشغال نشده‌اند. این تعداد برابرند با :

$$W_{F.D} = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (1-25)$$

که نتیجه‌ی زیر را می‌دهد :

$$W_{F.D}\{n_i\} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (1-26)$$

برای کامل تر شدن بحث مان، حالت کلاسیکی که عموماً آن را ماکسول-بولتزمان می‌خوانند را نیز مطالعه می‌کنیم. در این مورد ذرات ما تمیزپذیرند. بنابراین هر کدام از n_i ذره می‌توانند در هر سطح با عدد g_i قرار بگیرند، بدون این که به یکدیگر وابستگی داشته باشند. بنابراین تعداد راه‌ها در این حالت برابر است با $(g_i)^{n_i}$. علاوه بر این، مجموعه توزیع $\{n_i\}$ توسط :

$$\frac{N_i!}{n_1!n_2!n_3!...} \quad (1-27)$$

راه در دسترس است که با معرفی ضریب تصحیح گیبس به یک تابع وزن منجر می شود:

$$\frac{1}{n_1!n_2!\dots} = \prod_i \frac{1}{n_i!} \quad (1-28)$$

اگر این دو نتیجه را با هم ترکیب کنیم خواهیم داشت .

$$W_{M.B}\{n_i\} = \prod_i \frac{g_i n_i!}{n_i!} \quad (1-29)$$

در حالت کلی آنتروپی سیستم عبارت است از:

$$S(N, V, E) = k \text{Ln} \Omega(N, V, E) = k \text{Ln} \left[\sum_{\{n_i\}} W\{n_i\} \right] \quad (1-30)$$

با توجه به تعداد زیاد ذرات سیستم، لگاریتم جمع در رابطه ی (۱-۳۰) به وسیله ی جمله ی اول تخمین زده می شود. و بنا بر این می توانیم رابطه ی (۱-۳۰) را با رابطه زیر جایگزین کنیم.

$$S(N, V, E) \cong W\{n_i^*\} \quad (1-31)$$

که $\{n_i^*\}$ مجموعه توزیعی است که $W\{n_i\}$ را ماکزیمم می کند. تعداد n_i^* به وضوح محتمل ترین مقدار تعداد توزیع n_i است. در ماکزیمم کردن n_i باید توجه شود که N و E ثابت بمانند. با استفاده از ضرایب نامعین لاگرانژ می توان محتمل ترین حالت n_i^* را بدست آورده بعد از کمی محاسبات [۱] داریم:

$$\text{Ln} W_{\{n_i\}} \cong \sum_i \left[n_i \text{Ln} \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \frac{g_i}{a} \text{Ln} \left(1 - a \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad (1-32)$$

که $a = -I$ مربوط به حالت بوز- اینشتین و $a = I$ برای حالت فرمی- دیراک و $a = 0$ برای حالت ماکسول- بولتزمان است. و در نهایت برای n_i^* خواهیم داشت:

$$n_i^* = \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu_i)} + a} \quad (1-33)$$

برای آنتروپی نیز رابطه ی زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{S}{k} + \frac{MN}{kT} - \frac{E}{kT} = \frac{PV}{kT} \quad (1-34)$$

فشار ترمودینامیکی سیستم بنابراین به صورت زیر داده می شود:

$$PV = \frac{kT}{a} \sum_i \left[g_i \text{Ln} (1 + a^{\beta(-\mu - \epsilon_i)/kT}) \right] \quad (1-35)$$

که در حالت ماکسول- بولتزمان ($a \rightarrow 0$) داریم:

$$PV=NkT \quad (1-36)$$

که معادله‌ی آشنای گاز ایده‌آل است.

۱-۵ گاز ایده‌آل در دیگر آنسامبل‌های کوانتوم-مکانیکی:

در آنسامبل کانونیک ترمودینامیک سیستم از تابع پارش آن به دست می‌آید.

$$Q_N(V,T) = \sum_E e^{-\beta \varepsilon} \quad (1-37)$$

که E ها ویژه مقادیر انرژی سیستم را مشخص می‌کند و $\beta = \frac{1}{kT}$ می‌باشد. انرژی E را می‌توان

برحسب انرژیهای تک ذرات نوشت:

$$E = \sum_E n_\varepsilon E \quad (1-38)$$

که n_ε تعداد ذرات در حالت انرژی ε می‌باشند. مقدار n_ε ها باید رابطه‌ی زیر را ارضا کنند.

$$\sum_E n_\varepsilon = N \quad (1-39)$$

عبارتی که برای تابع پارش می‌توانیم بنویسیم به صورت زیر است:

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{n_i\}} g\{n_i\} e^{-\beta \sum_\varepsilon n_\varepsilon \varepsilon} \quad (1-40)$$

و $g\{n_\varepsilon\}$ ضریب وزن آماری برای توزیع $\{n_i\}$ است و جمع \sum روی همه‌ی حالت‌هایی است که قید (۱-۳۹) را ارضا می‌کنند تابع وزن آماری در حالت‌های مختلف به صورت زیر است:

$$g_{B.E}\{n_\varepsilon\} = 1 \quad (1-41)$$

$$g_{F.D}\{n_\varepsilon\} = \begin{cases} 1 & \text{if all } n_\varepsilon = 0 \text{ or } 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1-42)$$

$$g_{MB}\{n_\varepsilon\} = \prod_\varepsilon \frac{1}{n_\varepsilon!} \quad (1-43)$$

ابتدا در مورد آمار ماکسول-بولتزمان کار می‌کنیم با جایگزینی (۱-۴۳) در (۱-۴۰) به دست می‌آوریم:

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{n_\varepsilon\}} \left[\left(\prod_\varepsilon \frac{1}{n_\varepsilon!} \right) \prod_\varepsilon (e^{-\beta \varepsilon})^{n_\varepsilon} \right] = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_\varepsilon\}} \left[\left(\frac{N!}{\prod_\varepsilon n_\varepsilon!} \prod_\varepsilon (e^{-\beta \varepsilon})^{n_\varepsilon} \right) \right] \quad (1-44)$$

با استفاده از نظریه‌ی چند جمله‌ای داریم:

$$Q_N(V, T) = \frac{1}{N!} \left[\sum_{\epsilon} e^{-\beta\epsilon} \right]^N = \frac{1}{N!} [Q_1(V, T)]^N \quad (1-45)$$

با کمی محاسبه خواهیم داشت:

$$Q_1 = \sum e^{-\beta\epsilon} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{2\lambda V}{\lambda^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon = \frac{V}{\lambda^3} \quad (1-46)$$

که λ میانگین طول موج گرمایی ذرات است در نتیجه داریم:

$$Q_N(V, T) = \frac{VN}{N! \lambda^3 N} \quad (1-47)$$

بنابراین کل ترمودینامیک این سیستم را می‌توان به دست آورد. برای مثال تابع پارش بزرگ سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D(Z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} Z^N Q_N(V, T) = \exp(ZV/\lambda^3) \quad (1-48)$$

در حالت های بوز-انیشترین و فرمی-دیراک با جایگزینی (۱-۴۱) و (۱-۴۲) در (۱-۴۰) خواهیم داشت:

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_i\}} (e^{-\beta \sum_{\epsilon} n_{\epsilon} \epsilon}) \quad (1-49)$$

منشا تفاوت بین دو حالت کوانتومی، بوز-انیشترین و فرمی-دیراک، مربوط به مقادیر n_{ϵ} می‌باشد، برای این دو حالت (B-E, F-D) تابع پارش بزرگ را می‌نویسیم:

$$D(Z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \left[Z^N \sum_{\{N_{\epsilon}\}} e^{-\beta \sum_{\epsilon} n_{\epsilon} \epsilon} \right] = \sum_{N=0}^{\infty} \left[\sum_{\{N_{\epsilon}\}} \prod_{\epsilon} (Ze^{-\beta\epsilon})^{n_{\epsilon}} \right] \quad (1-50)$$

جمع دو گانه در (۱-۵۰) [اولی روی تعداد n_{ϵ} تحت قید ثابت بودن N ، و جمع بعدی روی تمام مقادیر محتمل

N] معادل با جمع روی تمام مقادیر محتمل n_{ϵ} مستقل از دیگری است- در این جا می‌توانیم بنویسیم:

$$D(Z, V, T) = \sum_{n_0, n_1, \dots} [(Ze^{-\beta\epsilon_0})^{n_0} (Ze^{-\beta\epsilon_1})^{n_1} \dots] = \left[\sum_{n_0} (Ze^{-\beta\epsilon_0})^{n_0} \right] \left[\sum_{n_1} (Ze^{-\beta\epsilon_1})^{n_1} \right] \dots \quad (1-51)$$