بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۰ /۱۱/ ۲۵

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی ومهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

موضوع :

ایده آلهای اول وابسته به کوهمولوژی موضعی و اصل موضعی - سراسری فالتینگ

016270

استاد راهنما

پروفسور حسین ذاکری

تدوین

سید شهاب ارکیان

مهر ۱۳۸۰

بسمه تعالی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

واحد ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای سید شهاب ارکیان دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

ایده‌آلهای اول وابسته به کوهمولوژی موضعی و اصل موضعی - سراسری فالتینگ

در روز سه‌شنبه مورخ ۸۰/۱۰/۱۸ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۶/۸ شانزده و هشت دهم می‌باشد.

۱- عالی ☐
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☑
۴- قابل قبول ☐
۵- غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر حسین ذاکری	دکتر کاظم خشیارمنش	دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن ۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم به :

پدرم، گرامیداشت آیین فداکاری

مادرم، نکوداشت آیین مهربانی

همسرم، پاسداشت آیین وفاداری

حمد باد ملکی را که ملک دو جهان در تصرف اوست.

ذات احدیت را شکر می کنم که انسان را فکرت آموخت و این توفیق را بر من عطا کرد تا با دانش ریاضی آشنا شده و از نتیجه دستاوردهای ریاضیدانان توشه ای گرفته و یاریم نمود تا کار تدوین این پایانامه را به اتمام برسانم. و اما من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق از تمامی معلمان گرانمایه ای که چون شمع و پروانه سوختند و پروانه جانم را بدین مرحله رساندند، سپاسگزاری نمایم بویژه در این رابطه بر خود لازم میدانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین ذاکری که در طول تدوین این پایان نامه راهگشا و راهنمایی ارزشمند برای اینجانب بوده اند قدرانی نموده و تشکر صمیمانه خود را تقدیم ایشان کنم. همچنین از آقایان دکتر خشایار منش و دکتر طاهری زاده که قبول زحمت نموده و با تشریف فرمایی خود در جلسه دفاعیه به عنوان داوران جلسه بنده را سرفراز نمودند نهایت سپاس و قدردانی را دارم.از ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر آقای دکتر اسماعیل بابلیان به خاطر زحمات بیدریغشان و نیز از مساعدتهای کارکنان موسسه ریاضیات دکتر مصاحب تشکر و قدر دانی می نمایم.

ارکیان

مهر ۱۳۸۰

فهرست

پیشگفتار

این پایان نامه بر مبنای مرجع[۱۳] تدوین گردیده است · درایـن پایان نامـه از مفاهیـم تئـوری مدولهای کسرهای تعمیم یافته وفیلتر رشته های منظم برای مطالعه مدولهای کوهمولوژی موضعی استفاده شده است ·

درحقیقت، ابتدا تحت شرایط خاص، ایده‌آلهای اول وابسته به اولین مدول کوهمولوژی موضعی متناهیاً تولیدنشده را مشخص می‌کنیم و سپس در حالت خاصی نشان می‌دهیم که اگر a و b ایده‌آلهای حلقه نوتری R با شرط $b \subseteq a$ و M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد به قسمی که به ازای هر ایده‌آل اول p از R عددی طبیعی مانند $k(p)$ موجود باشد که؛

$$b^{k(p)} H^i_a R_p(M_p) = \text{۰} \quad \text{برای هر } i < n$$

آنگاه عددی طبیعی و ثابت مانند k موجود است که؛

$$b^k H^i_a(M) = \text{۰} \quad \text{برای هر } i < n$$

فصل اول

نتایج مقدماتی

در این فصل، تعاریف، نتایج و قضایای بنیادین را یادآوری می‌کنیم. این مطالب در فصلهای بعد موردنیاز است. این فصل به چهار بخش تقسیم شده است؛

در بخش اول ابتدا نمادهای به‌کاررفته در این پایان‌نامه را معرفی نموده، سپس برخی از مفاهیم، نکات و قضایای جبر جابجایی و جبر همولوژیک را یادآوری می‌کنیم. به‌دلیل به‌کارگیری مفهوم حد مستقیم در پاره‌ای از قضایای فصلهای آتی، در بخش دوم به معرفی و تشریح این مفهوم می‌پردازیم. در بخش سوم مختصراً همبافت کزول را معرفی می‌کنیم. در این پایان‌نامه از مفهوم مدول کسرهای تعمیم‌یافته به‌عنوان ابزار کار استفاده شده است، لذا بخش چهارم را به معرفی مدول کسرهای تعمیم‌یافته و ذکر برخی از قضایای موردنیاز در ارتباط با آن اختصاص داده‌ایم.

بخش اول (۱.۱)، علامات و نتایج مقدماتی

در سراسر این پایان‌نامه مجموعه اعداد طبیعی را با حرف $\mathbf{N}$ و مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان داده‌ایم. همچنین بجز در مواردی که صریحاً ذکر شود R را برای نشان‌دادن حلقه‌ای جابجایی، نوتری و یکدار به‌کار برده‌ایم و از M برای نمایش یک R ـ مدول دلخواه استفاده کرده‌ایم. منظور از $\mathrm{Spec}(R)$ مجموعه همه ایده‌آلهای اول حلقه R است. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد، مجموعه $\{p \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{a} \subseteq p\}$ را با $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم. رادیکال $\mathfrak{a}$ را به‌صورت زیر تعریف کرده و آن را با علامت $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ یا $\sqrt{\mathfrak{a}}$ نشان می‌دهیم؛

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{x \in R | \quad x^n \in \mathfrak{a} \text{ که } n \in \mathbf{N} \text{ وجود دارد}\}$$

مجموعه $\mathrm{Max}(R)$ را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\mathrm{Max}(R) = \{m | \text{ است } R \text{ یک ایده‌آل ماکسیمال } m\}$$

ایده‌آل $\bigcap_{m \in \mathrm{Max}(R)} m$ را رادیکال جیکبسون R گوییم و با علامت $j(R)$ نشان می‌دهیم. حلقه R را نوتری گوییم هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند؛

(i) هر گردایه غیرخالی از ایده‌آلهای R یک عضو ماکسیمال با نسبت شمول دارد.

(ii) هر زنجیر صعودی از ایده‌آلهای R سرانجام متوقف می‌شود.

(iii) هر ایده‌آل R با تولید متناهی است.

۱.۱.۱ قضیه [لم ۲۱.۸ و صفحه ۱۷۳ و ۱۰]. هرگاه R یک حلقه نوتری باشد آنگاه هر ایده‌آل R شامل توانی از رادیکال خود است.

۱.۱.۲ قضیه [قضیه ۱.۱۱ و صفحه ۸ و ۱۰] (i) اگر p ایده‌آل اولی از حلقه R بوده و $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ایده‌آلهایی از R باشند به‌طوری که $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n \subseteq p$، آنگاه jیی هست که $1 \leqslant j \leqslant n$ و $\mathfrak{a}_j \subseteq P$.

(ii) فرض کنیم $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ $(n \geqslant 2)$ ایده‌آلهای اولی از R و b ایده‌آلی از R باشد. اگر $b \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$، آنگاه jی هست که $1 \leqslant j \leqslant n$ و $b \subseteq \mathfrak{p}_j$.

زیرمجموعه S از R را یک زیرمجموعه بسته ضربی از R گوییم هرگاه

(i) $1 \in S$ و

(ii) برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $x \cdot y \in S$.

۱.۱.۳ نتیجه. اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، آنگاه $R \backslash \mathfrak{p}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است.

فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R و M یک R مدول باشد. در مجموعه $M \times S$ رابطه $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم؛

به‌ازای هر $a, b \in M$ و $s, t \in S$ می‌نویسیم $(a, s) \sim (b, t)$ اگر و تنها اگر $s' \in S$ چنان وجود داشته باشد که $s'(ta - sb) = 0$.

به سهولت می‌توان دید که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است. دسته هم‌ارزی $(a, s) \in M \times S$ را با علامت a/s نشان می‌دهیم و مجموعه تمام دسته‌های هم‌ارزی را با $S^{-1}M$ نشان می‌دهیم. در $S^{-1}M$ عمل + را چنین تعریف می‌کنیم؛

به‌ازای هر $a/s, b/t \in S^{-1}M$؛ $a/s + b/t = (ta + sb)/st$. به‌سادگی می‌توان دید که $(S^{-1}M, +)$ یک گروه آبلی است. اگر به‌ازای هر $x \in R$ و $a/s \in S^{-1}M$ حاصلضرب اسکالر x در a/s را $x \cdot a/s = xa/s$ تعریف کنیم. آنگاه به‌وضوح دیده می‌شود که این جمع و ضرب اسکالر تعریف شده $S^{-1}M$ را به یک R ـ مدول تبدیل می‌کند. $S^{-1}M$ را مدول کسرهای M نسبت به S می‌نامند.

چون R را می‌توان به‌عنوان R مدول روی خودش درنظر گرفت، به‌ازای هر زیرمجموعه بسته ضربی S از R می‌توان مدول $S^{-1}R$ را روی R ساخت همچنین می‌توان $S^{-1}R$ را به یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار تبدیل کرد. برای این منظور به‌ازای هر $b/t \in S^{-1}R$ و a/s حاصل‌ضرب آنها را

$a/s \cdot b/t = ab/st$ تعریف می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان دید که این عمل خوشتعریف است و $S^{-1}R$ را به یک حلقه تعویض‌پذیر یکدار تبدیل می‌کند. در این حالت $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامیم.

برای هر $p \in \mathrm{Spec}(R)$ قرار می‌دهیم $S = R \backslash p$. در این صورت $S^{-1}R$ را با R_p و $S^{-1}M$ را با M_p نشان می‌دهیم، همچنین اگر a ایده‌آلی از R باشد، ایده‌آل $s^{-1}a$ از حلقه R_p را با aR_p نشان می‌دهیم. R ـ مدول $S^{-1}M$ را می‌توان با تعریف ضرب اسکالر به‌صورت $x/t \cdot a/s = xa/ts$ (برای هر $a/s, x/t \in s^{-1}M$) به یک $S^{-1}R$ مدول تبدیل کرد.

در بخش چهارم تعمیمی از ساختمان مدول کسرها ارائه خواهد شد.

مجموعه $\{p \in \mathrm{Spec}(R) | M_p \neq 0\}$ را با $\mathrm{Supp}(M)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم N و N' در R ـ مدول باشند. قرار می‌دهیم؛

$$N' \underset{R}{:} N = \{r \in R | rN \subseteq N'\}$$

اگر $N' = 0$، $0 :_R N$ را به صورت $\mathrm{Ann}(N)$ می‌نویسیم و آن را ایده‌آل پوچ‌ساز N گوییم. اگر N یک R ـ مدول دوری مانند Rx باشد آنگاه $O :_R N$ را با علامت $\mathrm{Ann}(x)$ نشان می‌دهیم. اگر M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد می‌توان دید که در این صورت

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | O \underset{R}{:} M \subseteq p\}$$

مجموعه $\mathrm{Ass}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | 0 \underset{R}{:} x = p$ هست که M در x عضوی مانند$\}$ را مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به M گوییم. واضح است که $M = 0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ass}(M) = \phi$.

۱.۱.۴ قضیه [قضیه ۶.۵ و صفحه ۳۹ و ۵]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد در این صورت؛

(i) $\mathrm{Ass}(M)$ یک مجموعه متناهی است.

(ii) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$

(iii) مجموعه عناصر می‌نیمال $\mathrm{Ass}(M)$ و $\mathrm{Supp}(M)$ با هم برابرند.

اگر N' زیر مدولی از R ـ مدول N و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$N' :_{N} \langle \mathfrak{a} \rangle = \{n \in N| \quad \mathfrak{a}^t n \subseteq N' \text{ هست که } t \in \mathbf{N}\}$$

زیرمدولی از N است. درواقع $N' :_{N} \langle \mathfrak{a} \rangle = \cup_{t=1}^{\infty}(N' :_{N} \mathfrak{a}^t)$. اگر $N' = 0$؛ آنگاه زیرمدول $N' :_{N} \langle \mathfrak{a} \rangle$ از N را با علامت $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ نشان می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $f : M \to N$ یک R ـ همومرفیسم باشد. در این صورت

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = f|_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)} : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

نیز یک R ـ همومرفیسم است. به‌وضوح می‌توان دید که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور همورد و دقیق چپ از کاتگوری R ـ مدولها و R ـ همومرفیسم‌ها می‌باشد. i ـ امین فانکتور مشتق‌شده $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را با علامت $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان می‌دهیم. لذا، اگر $\ldots \xrightarrow{d^2} I^2 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^{-1}} 0$ یک تحویل انژکتیو برای R ـ مدول M باشد، آنگاه

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) = \ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i))/\mathrm{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1}))$$

$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ را i ـ امین مدول کوهمولوژی موضعی وابسته به M نسبت با ایده‌آل $\mathfrak{a}$ می‌نامیم.

فانکتورکوهمولوژی موضعی برای اولین بار توسط شارپ از هندسه جبری به جبر جابجایی آورده شد و هم‌اکنون مطالعه مدولهای کوهمولوژی موضعی یکی از موضوعات جاری تحقیقات در جبر جابجایی است.

فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد .اگر $H_{\mathfrak{a}}^{0}(M) = M$ آنگاه، M را یک R ـ مدول $\mathfrak{a}$ ـ تابدار گوییم. همچنین اگر $H_{\mathfrak{a}}^{0}(M) = 0$، آنگاه M را نسبت به $\mathfrak{a}$ یک R ـ مدول آزاد از تاب می‌نامیم.

۱.۱.۵ قضیه [نتیجه ۲.۱.۷ و ۱]. (i) فرض کنیم M یک R ـ مدول $\mathfrak{a}$ تابدار باشد، در این صورت $H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) = 0$ برای هر $i > 0$.

(ii) برای هر R ـ مدول M و هر $i > 0$ داریم، $H_{\mathfrak{a}}^{i}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$.

(iii) برای هر R ـ مدول M، از اپی‌مرفیسم $\pi : M \to M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ ایزومرفیسم

$$H_{\mathfrak{a}}^{i}(\pi) : H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{i}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$$

حاصل می‌شود.

۱.۱.۶ قضیه [قضیه ۸.۱.۲ و ۱]. فرض کنیم $c \in R$ و M یک R ـ مدول باشد. در این صورت یک دنباله دقیق از R ـ مدولها و R ـ همورفیسم‌ها به صورت زیر موجود است.

$$0 \to H_{\mathfrak{a}+Rc}^{0}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{0}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{0}(M_c) \to H_{\mathfrak{a}+Rc}^{1}(M) \to$$
$$H_{\mathfrak{a}}^{1}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{1}(M_c) \to \ldots \to H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) \to$$
$$H_{\mathfrak{a}}^{i}(M_c) \to H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i+1}(M) \to \ldots$$

به‌علاوه اگر $f : M \to N$ یک R ـ همومرفیسم بین R ـ مدولها باشد، آنگاه دیاگرام زیر به‌ازای هر $c \in R$ جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i}(M) \arrow[r] \arrow[d, "H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i}(f)"] & H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) \arrow[r] \arrow[d, "H_{\mathfrak{a}}^{i}(f)"] & H_{\mathfrak{a}}^{i}(M_c) \arrow[r] \arrow[d, "H_{\mathfrak{a}}^{i}(f_c)"] & H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i+1}(M) \arrow[d, "H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i+1}(f)"] \\
H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i}(N) \arrow[r] & H_{\mathfrak{a}}^{i}(N) \arrow[r] & H_{\mathfrak{a}}^{i}(N_c) \arrow[r] & H_{\mathfrak{a}+Rc}^{i+1}(N)
\end{tikzcd}$$

۱.۱.۷ قضیه [قضیه ۴.۲.۱ و ۱]. فرض کنیم $f: R \to R'$ یک هومورفیسم حلقه و M' یک R' ـ مدول باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح نامنفی i، $H^i_{aR'}(M') \cong H^i_a(M')$ که در آن aR' توسیع ایده‌آل a از R در R' است.

عضو x از R را یک مقسوم‌علیه صفر روی M گوییم هرگاه $0 \neq y \in M$ موجود باشد که $xy = 0$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر روی R ـ مدول M را با $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم. در گزاره زیرمجموعهٔ $Z_R(M)$ را با استفاده از $\mathrm{Ass}(M)$ مشخص می‌کنیم.

گزاره. $x \in R$ یک مقسوم‌علیه صفر روی M است اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{p\in \mathrm{Ass}(M)} p$. لذا x یک مقسوم‌علیه صفر روی M نیست اگر و تنها اگر برای هر $p \in \mathrm{Ass}(M)$ داشته باشیم $x \notin p$ زیرا؛ فرض کنیم $p \in \mathrm{Ass}(M)$ آنگاه $0 \neq y \in M$ هست که $p = (0 : y)$، لذا برای هر $x \in p$، $xy = 0$. بنابراین برای هر $x \in p$، x یک مقسوم‌علیه صفر روی M است لذا

$$\bigcup_{p\in \mathrm{Ass}(M)} p \subseteq \underset{R}{Z}(M)$$

برعکس. فرض کنیم $x \in \underset{R}{Z}(M)$ در این صورت $0 \neq y \in M$ موجود است که $xy = 0$. ایده‌آل اولی مانند $p \in \mathrm{Ass}(M)$ موجود است که $(0 \underset{R}{:} y) \subseteq p$. لذا $x \in \bigcup_{p\in \mathrm{Ass}(M)} p$. بنابراین

$$\underset{R}{Z}(M) = \bigcup_{p\in \mathrm{Ass}(M)} p$$

تعریف. فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. دنباله $x_1, x_2, \ldots, x_n$ از عناصر R را یک M ـ رشته ضعیف گوییم در صورتی‌که به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم؛

$$(\sum_{t=1}^{i-1} Rx_t)M \underset{M}{:} x_i = (\sum_{t=1}^{i-1} Rx_t)M$$

توجه شود که برای $i = 0$، $\sum_{t=1}^{i} Rx_t$ را بنابه قرارداد ایده‌آل صفر در نظر می‌گیریم. همچنین توجه شود

که دنباله $x_1, \ldots, x_n$ از عناصر R یک M ـ رشته ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر i که

$$x_i \notin Z(M/(\sum_{t=1}^{i-1} Rx_t)M) \quad ، i = 1, 2, \ldots, n$$

فرض کنیم دنباله $x_1, x_2, \ldots, x_n$ از عناصر R یک M رشته ضعیف باشد و

$$M \neq (\sum_{i=1}^{n} Rx_i)M$$

در این صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را یک M ـ رشته گوییم. فرض کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_n \in a$ یک M ـ رشته باشد و $X = \mathrm{Ass}(M/(\sum_{i=1}^{n} Rx_i)M)$. در این صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را یک M ـ رشته ماکسیمال مشمول در a گوییم هرگاه $a \subseteq \bigcup_{p \in X} p$. توجه شود که اگر M با تولید متناهی باشد و $aM \neq M$ آنگاه هر M ـ رشته مشمول در a را می‌توان به یک M ـ رشته ماکسیمال در a گسترش داد. در رابطه با M ـ رشته‌های ماکسیمال قضیه زیر برقرار است.

۱.۱.۸ قضیه [قضیه ۱۶.۶ و صفحه ۱۳۰ و ۵]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری، M یک R ـ مدول با تولید متناهی و a یک ایده‌آل از حلقه R باشد به‌طوری که $aM \neq M$. در این صورت طول تمام M ـ رشته‌های ماکسیمال مشمول در a باهم برابرند و آن برابر با کوچکترین عدد صحیح نامنفی n است که، برای هر $i < n$، $\mathrm{Ext}^i_R(R/a, M) = 0$ و $\mathrm{Ext}^n_R(R/a, M) \neq 0$.

طول هر M ـ رشته ماکسیمال مشمول در a را با $\mathrm{grade}(a, M)$ نشان خواهیم داد. اگر $aM = M$، آنگاه $\mathrm{grade}(a, M)$ را بی‌نهایت می‌گیریم.

۱.۱.۹ قضیه [قضیه ۶.۲.۷ و ۱]. فرض کنیم M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد و $aM \neq M$. در این صورت $\mathrm{grade}(a, M)$ کوچکترین عدد صحیح i است که $H^i_a(M) \neq 0$.

۱.۱.۱۰ قضیه [قضیه ۹.۱.۲ و ۱]. فرض کنیم M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد و $t \in \mathbf{N}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند؛