بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر (عج)

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض
گرایش آنالیز

عنوان پایان نامه:

فضای هم مدار متناظر با یک قاب پیوسته

استاد راهنما

دکترمحمدعلی دهقان

دانشجو:

محمدعلی حسنخانی فرد

خرداد ۱۳۸۷

مدیر تحصیلات تکمیلی
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش محض آقای محمدعلی حسنخانی‌فرد

تحت عنوان:

فضای هم‌مدار متناظر با یک قاب پیوسته

در تاریخ ۸۷/۳/۲۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..عالی.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار　　امضاء

۲- داور خارج از گروه دکتر اکبر نظری با مرتبه‌ی استادیار　　امضاء

۳- داور داخل گروه دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار　　امضاء

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بـر
نتـــایج مطالعـــات، ابتکـــارات و
نوآوری ناشی از تحقیق موضوع
پایان‌نامـه متعلـق بـه دانـشگاه
ولی‌عصر رفسنجان است

سپاسگزاری

خدای بزرگ را شاکرم که به من کمک کرد تا این تحقیق را به پایان برسانم . اینک که با عنایت خداوند متعال این پایان نامه به سرانجام رسید، وظیفه خود می دانم از خانواده عزیزم تشکر نمایم که همیشه در مشکلات مرا یاری کردند. برایتان آرزوی سلامتی و موفقیت دارم.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر دهقان که در تمام طول این مدت مرا از راهنمایهای ارزنده شان بی نصیب نگذاشتند، تشکر می نمایم. از خدای بزرگ آرزوی سلامتی و سرافرازی برای ایشان و خانواده محترمشان دارم.

همچنین از داوران محترم این پایان نامه جناب آقای دکتر نظری و جناب آقای دکتر صفاپور، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، سرکار خانم دکتر سعیدی سپاسگذاری می نمایم.نیز از همه دانشجویان ورودی ۸۳ و ۸۴ که در طول مدت تحصیل مرا یاری کردند تشکر می کنم.

تقدیم به روح پدر و پدرخانم بزرگوارم و بهترین عزیزانم

مادر و مادر خانم مهربانم، همسر فداکارم و فرزند دلبندم ابوالفضل

بسمه تعالی

چکیده

یک قاب پیوسته خانواده‌ای از بردارها در یک فضای هیلبرت است که هر عضو دلخواه فضا را با یک نمایش پیوسته تولید می کنند. ما متناظر با یک قاب پیوسته فضای باناخی می سازیم که فضای هم مدار نامیده می شود. یک قاب پیوسته تعمیم یافته یک خانواده از عملگر های خطی و کراندار روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است که هر عضو دلخواه $\mathcal{H}$ را با یک نمایش پیوسته تولید می کنند. قاب های پیوسته تعمیم یافته تعمیم طبیعی قاب های پیوسته و قاب های گسسته در فضاهای هیلبرت هستند که شامل تعداد زیادی از تعمیم های جدید قاب ها می شوند. در این رساله ما برای یک قاب پیوسته تعمیم یافته فضاهای باناخ مناسبی متناظر می کنیم که فضای هم مدار تعمیم یافته نامیده می شوند، مشروط بر این که قاب در یک شرط انتگرالی خاص صدق کند. همچنین دو کلاس از فضاهای هم مدار تعمیم یافته وابسته به یک قاب پیوسته تعمیم یافته، دوگان استاندارد و بعضی نتایج آنها مورد مطالعه هستند.

فهرست مندرجات

۱ قاب های پیو سته ۶

۱.۱ مقدمات ۶

۲.۱ قاب های پیوسته ۱۴

۲ فضاهای هم مدار ۳۰

۱.۲ جبرهای باناخ توابع انتگرالی و وزنها ۳۰

۲.۲ فضای هم مدار متناظر بایک قاب پیوسته ۵۰

۳.۲ موضعی سازی قاب های پیوسته ۸۵

۳ فضاهای هم مدار تعمیم یافته ۱۰۴

۱.۳ قاب های پیوسته تعمیم یافته ۱۰۴

۲.۳ فضای هم مدار تعمیم یافته ۱۱۴

۴ واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۱۲۱

۵ واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۱۲۴

پیشگفتار

مشخصه اصلی یک پایه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ این است که هر $f \in \mathcal{H}$ می تواند به عنوان یک ترکیب خطی از عناصر f_k با ضرایب یکتا نشان داده شود. یک قاب نیز دنباله ای چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعضای $\mathcal{H}$ است که اجازه می دهد هر $f \in \mathcal{H}$ به صورت یک ترکیب خطی از عناصر f_k نوشته شود که به هر جهت ضرایب متناظر لزوما یکتا نیستند. بنابراین یک قاب ممکن است پایه نباشد که در نگاه اول به نظر بی استفاده می آید، اما در عمل این خاصیت تبدیل به یک مزیت شده است. یعنی ما در انتخاب ضرایبی که برای کاربردهای واقعی تناسب دارند، آزادی داریم.

تاریخ قابها مثال خوبی از توسعهٔ ریاضیات است. قابها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ در مقالهٔ بنیادی توسط دافین و شفر[1] معرفی شدند[6]. آنها از آن به عنوان ابزاری برای مطالعه سریهای فوریه غیر هارمونیک استفاده کردند. از قرار معلوم در آن زمان اهمیت این مفهوم توسط جامعه ریاضی تشخیص داده نشد و تقریبا ۳۰ سال طول کشید تا نگرش های بعدی به ظهور برسند. در سال ۱۹۸۰ یانگ[2] کتابی نوشت که شامل حقایقی اساسی در زمینهٔ سریهای فوریه غیر هارمونیک بود. قابها در چکیده آن معرفی شدند ومجددا در متن سریهای فوریه غیر هارمونیک قرار گرفتند. سپس در سال ۱۹۸۵ وبا شروع دورهٔ نظریه موجک دوبشی، گراسمان و میر[3][5] مشاهده کردند که می توان از قابها برای پیدا کردن سری توابع در $L^2(\mathbb{R})$ درست شبیه به همان بسطی که در پایه های متعامد یکه استفاده می شود، بهره

[1] Duffin and schaefer

[2] Young

[3] Daubechies, Grossman and Meyer

گرفت. این زمانی بود که بسیاری از ریاضیدانها به اهمیت موضوع پی بردند، این نکته با توجه به مقاله اساسی دوبشی و کتابش و مقاله تحقیقی مشترک هیل —والنات [۴] روشن تر شد. از آن موقع تا کنون شمار مقالاتی که به موضوع قابها پرداخته اند به نحو چشمگیری افزایش یافته است. اکنون خلاصه ای از مطالب این پایان نامه ارائه می دهیم.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است، در فصل اول مقدماتی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی بویژه برخی مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه عملگرها روی فضاهای هیلبرت، همچنین مبانی نظریه قابهای پیوسته در فضاهای هیلبرت آورده شده است.

در فصل دوم ابتدا جبرهای باناخ توابع انتگرالی معرفی شده و در ادامه برای یک فضای تابعی Y که در دو شرط خاص صدق می کند و متناظر با یک قاب پیوسته، دو فضای هم مدار COY و $\widetilde{COY}$ ساخته و قضایای مربوطه ارائه شده است. در ادامه این فصل با استفاده از مفهوم موضعی سازی قابهای پیوسته حالاتی که دو فضای هم مدار ذکر شده مساوی می شوند آورده شده است.

در فصل سوم ابتدا قابهای پیوسته تعمیم یافته تعریف شده و بعضی قضایای مقدماتی آنها ثابت می شود. سپس طی مراحلی شبیه آنچه در فصل دو آمده است، فضاهای هم مدار با این قابها ساخته شده است.

[۴] Heil-Walnut

فصل ۱

قاب های پیوسته

۱.۱ مقدمات

در این بخش برخی مفاهیم اولیه و پیش نیازها که در فصل های بعد این پایان نامه مورد نیاز می باشد آورده شده است. این مطالب برگرفته از کتابها و مقالات مختلفی است که جزء مراجع می باشند .

تعریف ۱.۱.۱ [10] گردایه $\mathcal{M}$ اززیرمجموعه های مجموعهٔ X رایک σ—جبرروی X گوییم اگر$\mathcal{M}$ ازخواص زیربهره مند باشد:

۱)$X \in \mathcal{M}$،

۲)هرگاه $A \in \mathcal{M}$ ، آنگاه$A^c \in \mathcal{M}$،

۳)هرگاه‌به ازای$n = ۱, ۲, ۳, \cdots$،$A_n \in \mathcal{M}$ آنگاه $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

تعریف ۲.۱.۱ [10] تابع μ که بر یک $\sigma-$جبرمانند $\mathcal{M}$ تعریف شده و بردش در$[o,\infty]$ باشد یک اندازه مثبت نامیده می شود هرگاه : ۱) $\mu(\emptyset) = ۰$، ۲) برای دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعضای دو به دو مجزا $\mathcal{M}$، $\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$

تعریف ۳.۱.۱ [10] یک تابع اندازه که روی $\sigma-$جبر تولید شده توسط مجموعه های باز تعریف می شود را یک اندازه برل می نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ [10] فرض کنیدμ یک اندازه برل روی فضای توپولوژیک X وE یک زیر مجموعه برل از X باشد. μ روی E منظم خارجی‌است اگر

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E \text{ و} \text{مجموعه‌ی باز } U\}$$

وμ روی E منظم داخلی است اگر:

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ و} \text{مجموعه‌ی فشرده } K\}$$

اگرμ روی همهٔ زیرمجموعه های برل X منظم داخلی وخارجی باشد، گوئیمμ یک اندازه منظم است .

تعریف ۵.۱.۱ [11] یک اندازه رادون رویX یک اندازه برل رویX است که روی زیرمجموعه های فشرده، متناهی ، روی زیرمجموعه ها ی برل، منظم خارجی وروی زیرمجموعه های باز، منظم داخلی است.

تعریف ۶.۱.۱ [17] فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد و $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع با مقادیر حقیقی باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in V$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

ج) (نامساوی مثلث) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

دراین حالت $\|.\|$ یک نرم روی V نامیده می شود و زوج $(V, \|\|)$ را یک فضای نرمدار می گوییم.

اگر V یک فضای نرمدار باشد و برای هر $x, y \in V$ قرار دهیم:$d(x, y) = \|x - y\|$ آنگاه به وضوح d یک متر روی V است.بنابراین هر فضای نرمدار یک فضای متری است. d را متر تولید شده توسط نرم می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ [17] فضای نرمدار X یک فضای باناخ است هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نرم کامل باشد. بدین معنی که هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به متر تولید شده توسط نرم همگرا به یک $x \in X$ باشد.

مثال ۸.۱.۱ [10] فرض کنید $1 \leq p < \infty$ دراین صورت $L^P = \{f : X \longrightarrow C \mid \|f\|_p < \infty\}$ که در آن $\|f\|_p = [\int_X |f(x)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{p}}$ ، یک فضای باناخ است.

تعریف ۹.۱.۱ [10] فرض کنید V یک فضای برداری باشد. تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی بر V گوییم هرگاه :

۱)برای هر $x \in V$ $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $\langle x, x \rangle = 0$ اگر تنها اگر $x = 0$ باشد.

۲)برای هر $x, y, z \in V$، $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

۳)برای هر $x, y \in V$ و هر $\alpha \in C$، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

۴)برای هر $x, y \in V$، $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

زوج $(V, \langle , \rangle)$ را فضای ضرب داخلی گوییم.

لم ۱۰.۱.۱ [10] هر فضای ضرب داخلی با $\|x\| := [\langle x, x\rangle]^{\frac{1}{2}}$ (نرم حاصل ازضرب داخلی) یک فضای نرمداراست.

تعریف ۱۱.۱.۱ [10] فضای ضرب داخلی X که با نرم حاصل ازضرب داخلی باناخ می شود را یک فضای هیلبرت گویند. فضاهای هیلبرت رده خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می دهند. بنابراین تمام قضایای در مورد فضاهای باناخ درباره فضاهای هیلبرت نیز برقرار است.

تعریف ۱۲.۱.۱ [10] فرض کنید H یک فضای هیلبرت و$x, y \in H$. آنگاه بردارهای x وy را متعامد می نامیم(x بررy عمود است) اگر $\langle x, y\rangle = 0$و دراین صورت می نویسیم: $x \perp y$

قضیه ۱۳.۱.۱ [10] فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر x وy درX داریم :

الف) (نامساوی کوشی — شوارتز) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

ب) (نامساوی مثلث) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ج) (قانون متوازی الاضلاع) $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$

تعریف ۱۴.۱.۱ [10] مجموعه $\{u_۱, u_۲, ...\}$ در فضای ضرب داخلی X متعامد گفته می‌شود هرگاه‌برای هر $i \neq j$داشته باشیم $u_i \perp u_j$. به علاوه اگر برای هر $i \geq ۱$ داشته باشیم $\|u_i\| = ۱$ مجموعه را متعامد یکه می نامیم.

قضیه ۱۵.۱.۱ [2] فرض کنید $\{u_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد. دراین صورت شرایط زیر معادلند:

الف) $\{u_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای Hاست.

ب) برای هر $x \in H$ داریم: $x = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$

ج) (اتحاد پارسوال) برای هر $x \in H$ داریم : $\| x \|^۲ = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^۲$

د) $\overline{Span}\{u_n\}_{n=۱}^{\infty} = H$.

تعریف ۱۶.۱.۱ [10] فرض کنید $۰ < p < \infty$. آنگاه $l_p(N)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$l_p(N) := \left\{ \{x_n\}_{n \in N} \quad : \quad \sum_{n \in N} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

قضیه ۱۷.۱.۱ [10] (قضیه فیثاغورث) اگر $f \perp g$ باشد آنگاه :

$$\| f + g \|^۲ = \| f \|^۲ + \| g \|^۲ .$$

تعریف ۱۸.۱.۱ [17] اگر H وK دو فضای هیلبرت باشندو $T : H \longrightarrow K$ یک تبدیل خطی باشد تابع $\|.\|$ روی فضای تبدیل های خطی از H به K رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\| T \| = \sup \{\| Tx \| : x \in H, \| x \| \leq ۱\}$$

اگر$\infty > \| T \|$ گوییم T کراندار است. تابع تعریف شده فوق روی فضاهای تبدیل خطی کراندار ازH به K تشکیل یک نرم می دهد.

تعریف ۱.۱.۱۹ [17] مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی و کراندار از H به K را با نماد $B(H,K)$ نمایش می دهیم و اگر H وK با هم برابر باشند از نماد $B(H)$ به جای $B(H,K)$ استفاده می کنیم و به عناصر آن عملگر می گوییم. همچنین مجموعه همه تبدیلات خطی و کراندار از H به $\mathbb{C}$ را با نماد$H^* = B(H,\mathbb{C})$ نشان داده و آن را دوگان H می نامیم .

قضیه ۱.۱.۲۰ [17] اگر $T \in B(H,K)$ آنگاه عملگر یکتای $T^* \in B(K,H)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in H$ و$y \in K$ داریم :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

بعلاوه $\| T^* \| = \| T \|$ و به T^* الحاقی T گفته می شود.

تعریف ۱.۱.۲۱ [17] فرض کنید $S,T \in B(H)$. آنگاه :

الف) عملگر S خود الحاق است هرگاه $S = S^*$ یعنی برای هر $x,y \in H$ داریم : $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$.

ب) عملگر S مثبت است هرگاه برای هر $x \in H$ ، $\langle Sx, x \rangle$ مثبت باشد و در این حالت می نویسیم : $S \geq 0$

ج) گوییم $T \leq S$ هرگاه $S - T \geq 0$

لم ۲۲.۱.۱ [17] هر عملگر مثبت خود الحاقی است .

تعریف ۲۳.۱.۱ [17] فرض کنید X, Y فضاهای نرمدار باشند. تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ را از پایین کراندار گوییم، هرگاه $B > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ ،

$$B\|x\| \leq \|Tx\|.$$

تعریف ۲۴.۱.۱ [10] نرمهای $\|.\|$ و $\|.\|_1$ را روی فضای برداری X هم ارز گویند، هرگاه اعداد مثبت c_1 و c_2 وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x \in X$،

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_1.$$

قضیه ۲۵.۱.۱ [17] اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت و $T \in B(H_1, H_2)$، آنگاه شرایط زیر برقرارند:

الف) $N(T) = R(T^*)^\perp$،

ب) $N(T^*) = R(T)^\perp$،

ج) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$،

د) $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

قضیه ۲۶.۱.۱ :[10] اگر M یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه:

$$H = M \oplus M^\perp$$

تعریف ۲۷.۱.۱ [17] اگر X یک فضای برداری باشد آنگاه عملگرخطی $P : X \longrightarrow X$ یک تصویرنامیده می شود هرگاه $P^{۲} = P$. اگر M برد عملگر P باشد، آنگاه $P : X \longrightarrow X$ یک تصویر برو گفته می شود.

تعریف ۲۸.۱.۱ [17] فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $P \in B(H)$ چنان باشد که

۱) $P^{۲} = P$،

۲) $H = N(P) \oplus R(P)$.

آنگاه P یک تصویر متعامد نامیده می شود.

قضیه ۲۹.۱.۱ [2] اگر $T_{۱}, T_{۲}, T_{۳}$ سه عملگر خود الحاق روی فضای هیلبرت H باشد و $T_{۱} \leq T_{۲}$ و $T_{۳}$ با $T_{۱}, T_{۲}$ جابجا شود، آنگاه داریم: $T_{۱}T_{۳} \leq T_{۲}T_{۳}$

تعریف ۳۰.۱.۱ [11] یک جبرمختلط A، یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است و ضربی روی A وجود دارد که برای هر $x, y, z \in A$

۱) $x(y + z) = xy + xz$،

۲) $x(yz) = (xy)z$،

۳) $(x + y)z = xz + yz$.

تعریف ۳۱.۱.۱ [11] یک جبرباناخ A یک جبر مختلط است که روی آن نرم وجود دارد، با این نرم یک فضای باناخ است و برای هر $x, y \in A$ داریم:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

تعریف ۳۲.۱.۱ [11] یک برگشت [۱] روی جبر A یک نگاشت $x \longmapsto x^*$ از A به A است که برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in C$

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

۲) $(xy)^* = y^* x^*$،

۳) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$،

۴) $(x^*)^* = x$.

تعریف ۳۳.۱.۱ [11] یک جبرباناخ A مجهز به یک برگشت $x \longmapsto x^*$ از A به A را جبر باناخ * [۲] گویند.

اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم، $\|x^*x\| = \|x\|^2$ آنگاه A یک C^*- جبر نامیده می شود.

۲.۱ قاب های پیوسته

دراین بخش تعریف وخواص قاب های پیوسته روی یک فضای هیلبرت ارائه می شود. تعاریف وقضایای این بخش از مرجع [14] می باشد.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید μ یک اندازه برل روی فضای توپولوژیک X باشد و N اجتماع همه‌ی زیرمجموعه های باز U از X باشد که $\mu(U) = 0$. دراین صورت محمل اندازه‌ی μ که

[۱] Involution

[۲] Banach * algebra