بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

برخی از نتایج تجزیه مقدار تکین

مؤلف:

افسانه سالاری

استاد راهنما:

دکتر مریم خسروی

استاد مشاور:

دکتر حسین مؤمنایی کرمانی

آبان ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: افسانه سالاری	امضاء:
استاد راهنما: دکتر مریم خسروی	امضاء:
استاد مشاور: دکتر حسین مؤمنایی کرمانی	امضاء:
داور اول : دکتر عظیم ریواز	امضاء:
داور دوم: دکتر غلامرضا آقاملائی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر عالمه شیخ حسینی	امضاء:

تقدیم به

سه وجود مقدس

پدرم،

مادرم،

همسرم.

تشکر و قدردانی

شکر و سپاس بی‌پایان خدایی که بشر را آفرید و به او قدرت اندیشیدن عطا نمود و از دریای بیکران لطف خود او را سیراب نمود.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بر خود لازم می دانم از کلیه کسانی که تا به امروز یاری‌ام نموده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

به خصوص از استاد فرزانه و دلسوز سرکار خانم دکتر مریم خسروی که در کلیه مراحل انجام این پژوهش با خوشرویی یاری و راهنمایی‌ام نمودند و استاد گرامی جناب آقای دکتر حسین مومنایی که وقت خود را بی‌شائبه در اختیار من گذاشته و زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند؛

پدر و مادر عزیزم که الفبای زندگی را به من آموختند و همواره مشوق من در دوران تحصیل بودند؛

همسرم... امید زندگی ام که تهیه این اثر را مدیون مهر و همیاری او می‌دانم؛

و همه دوستان و عزیزانی که تا به امروز، به بهار زندگی‌ام وسعت بخشیدند و در قلبم جاودانه‌اند، کمال تشکر را دارم و از ایزد متعال سلامتی و سعادت ایشان را خواستارم.

چکیده

مسئله زیر را در نظر می گیریم: ماتریس های $m \times n$ حقیقی (مختلط) $A_1, ..., A_N$ داده شده است. ماتریس های متعامد (یکانی) P و Q را به گونه ای پیدا کنید که $P^*A_1Q, ..., P^*A_NQ$ دارای فرم قطری بلوکی مشترک با احتمالاً بلوک‌های قطری مستطیلی باشند. این مسئله تجزیه همزمان مقدار تکین نامیده می‌شود. در حالتی که $N = 1$ این تجزیه به تجزیه مقدار تکین ماتریس A_1 کاهش می‌یابد. در این پایان نامه، مفهوم $*$-جبر ماتریسی را بیان و با کمک نظریه‌ای از $*$-جبر و دومدول نشان می‌دهیم که ظریف‌ترین تجزیه همزمان مقدار تکین وجود دارد و منحصر به فرد است. بعلاوه، الگوریتمی برای پیدا کردن این همزمانی، که براساس الگوریتم قطری بلوکی همزمان حاصل می‌شود، ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

تجزیه مقدار تکین، قطری بلوکی کردن، $*$-جبر ماتریسی، دومدول، مقدار ویژه.

مقدمه

سیلوستر [۱] در سال ۱۸۸۹ قضیه تجزیه مقدار تکین برای ماتریس‌های حقیقی مربعی را اثبات کرد. تکنیک تجزیه مقدار تکین یکی از ابزارهای مهم در ارتباط با داده‌های دارای اختلال می‌باشد. برای مثال تجزیه مقدار تکین، در روش حداقل مجذورات، تحلیل مولفه‌های اصلی، تقریب‌های یک ماتریس و غیره مفید است. یکی از مفاهیم جبر خطی مفهوم $*$-جبر ماتریسی است. $*$-جبر ماتریسی در برنامه نویسی نیمه معین و مسائل بهینه سازی ابزاری مفید است. در سال ۲۰۰۹ مورتا [۲] و همکارانش [۱۴] با استفاده از نظریه‌ای از $*$-جبر به قطری بلوکی کردن همزمان خانواده‌ای از ماتریس‌های متقارن حقیقی پرداختند. همزمان با کار آنها، مورتا در مقاله دیگری [۱۰] با همکاری میهارا [۳] این کار را برای خانواده دلخواه از ماتریس‌های حقیقی انجام داد. در سال بعد مورتو و میهارا [۱۳] مفهومی با نام تجزیه همزمان مقدار تکین را معرفی کردند. آنها برای خانواده متناهی از ماتریس‌های حقیقی A_i ، $i = 1, ...N$ که لزوما مربعی نیستند، به دنبال ماتریس‌های متعامد P و Q بودند به طوری که $P^\top A_i Q$ ماتریسهای با ساختار قطری بلوکی یکسان باشند. آنها همچنین، شرط لازم و کافی برای داشتن تجزیه مقدار تکین همزمان از این خانواده را بیان و اثبات کردند. البته در سال ۱۹۷۴ گیبسون[۴] [۲] با استفاده از روش دیگری به قطری ساختن همزمان خانواده‌ای از ماتریس‌های مستطیلی

---

[۱] Sylvester

[۲] Murota

[۳] Maehara

[۴] Gibson

پرداخت.

ما در این پایان نامه، به بررسی تجزیه همزمان مقدار تکین با استفاده از $*$-جبرهای ماتریسی می‌پردازیم. برای این منظور، مطالب را در چهار فصل تنظیم نموده‌ایم. در فصل اول، برخی تعاریف و قضایا در رابطه با ماتریس‌ها و $*$-جبرهای ماتریسی را بیان نموده‌ایم. فصل دوم را به بیان و اثبات قضیه ساختار در نظریه $*$-جبرها، اختصاص داده‌ایم. در فصل سوم به کاربرد قضیه ساختار در تجزیه هر $*$-جبر ماتریسی و به بیان الگوریتم‌های متناظر با این قضیه پرداخته‌ایم و در نهایت در فصل آخر به تجزیه همزمان مقدار تکین پرداخته‌ایم و با استفاده از الگوریتم‌های فصل سوم الگوریتم‌هایی برای این همزمانی ارائه داده‌ایم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

مطالب این فصل، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند، در دو بخش تنظیم شده‌اند. در بخش نخست، مطالبی از آنالیز ماتریسی و نظریه گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش دوم از این فصل، با نظریه $*$-جبرهای ماتریسی آشنا شده و به بیان قضایایی در این رابطه می‌پردازیم. لازم به یادآوری است که در سراسر این پایان نامه، $\mathbb{R}^n$ نمایشگر فضای برداری تمام n تایی‌های از اعداد حقیقی و $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ نمایشگر مجموعه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{K}$ است، که $\mathbb{K}$ نشان دهنده میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و یا حلقه تقسیم اعداد کواترنیون $\mathbb{H}$ می‌باشد. در حالتی که $m = n$، به جای $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ از نماد $M_n(\mathbb{K})$ استفاده می‌کنیم.

۱.۱ مطالبی از ماتریس‌ها و مروری بر نظریه گراف‌ها

قبل از شروع، لازم به ذکر است که مطالب این بخش را می‌توان با جزئیات بیشتر در [۳]، [۴]، [۵]، [۶] و [۸] مشاهده نمود. در سراسر این پایان نامه، برای ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$، نماد A^* به جای $\bar{A}^\top$ به‌کار می‌رود.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه $\mathbb{H} = \{a+ib+jc+kd : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$، با ضرب‌های تعریف شده $j = ki = -ik$، $i = jk = -kj$، $k = ij = -ji$ و $i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱$، **حلقه** تقسیم اعداد کواترنیون(چهارگانی) نامیده می‌شود. علاوه بر این، ماتریس‌هایی با درایه‌های موجود در $\mathbb{H}$ ماتریس‌های کواترنیون نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید V زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. زیرفضای متمم متعامد V با نماد $V^\perp$ نشان داده می‌شود و به صورت $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top y = ۰ \ \forall \ y \in V\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. تعداد اعضای پایه V بعد V نامیده می‌شود و با نماد $dimV$ نمایش داده می‌شود.

در این نوشتار $M_n(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ و $M_n(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ به ترتیب، نمایشگر مجموعه ماتریس‌های مختلط و کواترنیون $n \times n$ است که به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شوند و بعد آنها به ترتیب، $۲n^۲$ و $۴n^۲$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$. در این صورت:

۱) ماتریس A جایگشتی نامیده می‌شود اگر دقیقا یک درایه در هر سطر و ستون از آن برابر با یک باشد و مابقی درایه‌های آن صفر باشد؛

۲) ماتریس A خودتوان نامیده می‌شود هرگاه $A^۲ = A$؛

۳) ماتریس A یکانی نامیده می‌شود هرگاه $A^*A = I$؛

۴) ماتریس A نرمال نامیده می‌شود هرگاه $AA^* = A^*A$؛

۵) ماتریس A متقارن نامیده می‌شود هرگاه $A = A^\top$؛

۶) ماتریس A متعامد نامیده می‌شود هرگاه $AA^\top = A^\top A = I$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$. عدد مختلط λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A نامیده می‌شود هرگاه بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$ موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$. در چنین حالتی، x را یک بردار ویژه‌ی A متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامند. همچنین، مجموعه مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف A و آن را با نماد $\sigma(A)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه

$$x^*Ax > ۰$$

برای هر $۰ \neq x \in \mathbb{C}^n$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی A یا حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی A را رتبه A و آن را با نماد $rank(A)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و W زیرفضایی از $\mathbb{C}^n$ باشد. در این صورت، W یک زیرفضای A-پایا نامیده می‌شود هرگاه $AW \subseteq W$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ و $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. در این صورت، جمع مستقیم A و B با نماد $A \oplus B$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & B \end{bmatrix} \in M_{m+p,n+q}(\mathbb{C}).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ و $B = [b_{ij}] \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. در این صورت، ضرب کرونکر(تانسور) A و B با نماد $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود و به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \cdots & a_{۱n}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & \cdots & a_{۲n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱}B & a_{m۲}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{C}).$$

قضیه ۱.۱.۱۱. [۶] *فرض کنید ضرب دو ماتریس A و C و همچنین ضرب دو ماتریس B و D تعریف شده باشد. در این صورت:*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \qquad (A \otimes B)^{\top} = (A^{\top} \otimes B^{\top}).$$

قضیه ۱.۱.۱۲. [۶] *فرض کنید A و B دو ماتریس دلخواه مختلط باشند. دراین صورت، ماتریس‌های جایگشتی مناسب P و Q وجود دارند به طوری که*

$$(A \otimes B) = P(B \otimes A)Q.$$

قضیه ۱.۱.۱۳. [۶] *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $B \in M_m(\mathbb{C})$. اگر $\sigma(A) = \{\lambda_۱, ..., \lambda_n\}$ و $\sigma(B) = \{\mu_۱, ..., \mu_m\}$، آنگاه*

$$\sigma(A \bigotimes B) = \{\lambda_i \mu_j \ : i = ۱, ..., n, \ j = ۱, ..., m\}.$$

قضیه ۱.۱.۱۴. (تجزیه شور[۱]). [۵] *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند. در این صورت، ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری که*

$$U^* A U = T = [t_{ij}],$$

که T یک ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های قطری $t_{ii} = \lambda_i$ است. به عبارت دیگر، ماتریس A هم‌ارز یکانی با یک ماتریس بالا مثلثی است. اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$ و تمام مقادیر ویژه آن حقیقی باشند، آنگاه ماتریس U حقیقی و متعامد است.

---

[۱] Schur decomposition

تعریف ۱۵.۱.۱. نمایش حقیقی از ماتریس‌های مختلط $m\times n$ با نماد $\mathcal{C}_{m,n} \subset M_{2m,2n}(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیرتعریف می‌شود:

$$\mathcal{C}_{m,n} = \left\{ \begin{bmatrix} C(z_{11}) & \dots & C(z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(z_{m1}) & \cdots & C(z_{mn}) \end{bmatrix} : z_{11}, z_{12}, ..., z_{mn} \in \mathbb{C} \right\}, C(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

همچنین، نمایش حقیقی از ماتریس‌های کواترنیون $m \times n$ با نماد $\mathcal{H}_{m,n} \subset M_{4m,4n}(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H}_{m,n} = \left\{ \begin{bmatrix} H(h_{11}) & \dots & H(h_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H(h_{m1}) & \cdots & H(h_{mn}) \end{bmatrix} : h_{11}, h_{12}, ..., h_{mn} \in \mathbb{H} \right\},$$

که

$$H(a+ib+jc+kd) = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

برای سادگی قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{C}_{n,n} = \mathcal{C}_n, \qquad \mathcal{H}_{n,n} = \mathcal{H}_n.$$

قضیه ۱۶.۱.۱. [۵] *اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$، آنگاه ماتریس متعامد $Q \in M_n(\mathbb{R})$ وجود دارد به*

طوری که

$$Q^\top AQ = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix} \qquad 1 \le k \le n,$$

هر A_i ماتریس حقیقی 1×1 متناظر با مقدار ویژه حقیقی و یا ماتریسی 2×2 به صورت $C(a+bi)$ است که $a+bi$ مقدار ویژه‌ای از A است.

قضیه ۱.۱.۱۷. [۵] *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$. آنگاه A متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس متعامد $Q \in M_n(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد به طوری که*

$$Q^\top AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

که برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

تعریف ۱.۱.۱۸. ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ به طور یکانی قطری شدنی نامیده می‌شود هرگاه ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{C})$ یافت شود به طوری که U^*AU یک ماتریس قطری باشد که درایه‌های قطری آن همان مقادیر ویژه A هستند.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $B \in M_n(\mathbb{C})$. در این صورت، ماتریس A و B همزمان به طور یکانی قطری شدنی نامیده می‌شوند هرگاه ماتریس یکانی $V \in M_n(\mathbb{C})$ یافت شود به طوری که V^*AV و V^*BV قطری باشند.

قضیه ۱.۱.۲۰. *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$. آنگاه ماتریس A نرمال است اگر و فقط اگر*

A به طور یکانی قطری شدنی باشد.

قضیه ۲۱.۱.۱. [۵] *فرض کنید $\zeta \subseteq M_n(\mathbb{C})$. آنگاه خانواده ζ همزمان به طور یکانی قطری شدنی است اگر و تنها اگر ζ یک خانواده از ماتریس‌های نرمال باشد که دو به دو با هم جابه‌جا می‌شوند.*

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$. آنگاه ماتریس A معین مثبت است اگر و تنها اگر A به طور یکانی قطری شدنی باشد و تمام مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند.*

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنید $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. آنگاه*

$$rankA = rankA^{\top} = rankA^{*} = rankAA^{*}.$$

قضیه ۲۴.۱.۱. (تجزیه مقدار تکین). [۵] *فرض کنید $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ و $rankA = k$. در این صورت، A به صورت $A = V\Sigma W^{*}$ نوشته می‌شود که $V \in M_m(\mathbb{C})$ و $W \in M_n(\mathbb{C})$ یکانی هستند و ماتریس $\Sigma = [\sigma_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ که در آن برای هر $i \neq j$، $\sigma_{ij} = ۰$. همچنین، $\sigma_{۱۱} \geq \sigma_{۲۲} \geq ... \geq \sigma_{kk} > \sigma_{k+۱,k+۱} = ... = \sigma_{qq} = ۰$ که $q = \min\{m, n\}$. σ_{ii}ها ریشه‌ی دوم نامنفی مقادیر ویژه AA^{*} می‌باشند. این اعداد، مقادیر تکین ماتریس A نامیده می‌شوند. ستون‌های V بردارهای ویژه AA^{*} و ستون‌های W بردارهای ویژه $A^{*}A$ هستند که به ترتیب، بردارهای تکین چپ و راست ماتریس A نامیده می‌شوند. علاوه بر این، اگر A حقیقی باشد، آنگاه V و W حقیقی هستند.*

در ادامه، به بیان تعاریف و قضایایی از نظریه گراف‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهتدار با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. در این صورت:

۱) یک مسیر در گراف G به طول $k - ۱$ متشکل است از دنباله‌ای از رئوس به صورت $i_۱ \rightarrow i_۲ \rightarrow ... \rightarrow i_k$ به طوری که i_jها، به جز احتمالا ابتدا و انتها، متمایزند؛

۲) یک دور در گراف G مسیری است که ابتدا و انتهایش یکسان باشند؛

۳) گراف G همبند نامیده می‌شود هرگاه بین هر دو راس متمایز آن مسیری وجود داشته باشد؛

۴) هر گراف (بدون جهت) همبند فاقد دور یک درخت نامیده می‌شود؛

۵) گراف G یک درخت جهتدار نامیده می‌شود هرگاه G بدون در نظر گرفتن جهت‌ها یک درخت باشد؛

۶) یک زیرگراف از گراف G، قسمتی از آن گراف است که مجموعه رئوسش زیرمجموعه‌ای از رئوس G باشد؛

۷) یک درخت فراگیر از گراف G زیرگرافی از آن گراف است که شامل تمام رئوس G و همچنین، یک درخت باشد؛

۸) یک مولفه همبند از گراف G، زیرگراف همبند ماکزیمالی از G می‌باشد.

قضیه ۲۶.۱.۱. [۳] *هر گراف همبند دارای درخت فراگیر می‌باشد.*

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید R یک رابطه دوتایی روی مجموعه A باشد. رابطه دوتایی R^t روی A را بستار متعدی R می‌نامیم هرگاه R^t یک رابطه تعدی باشد و R زیر مجموعه‌ای از R^t باشد و علاوه بر این، اگر S رابطه تعدی شامل R باشد آنگاه R^t زیرمجموعه‌ای از S است. به عبارت دیگر، بستار متعدی از R کوچکترین رابطه تعدی شامل R است.

به همین ترتیب، بستار تقارنی نیز تعریف می‌شود. واضح است که بستار تعدی از یک رابطه تقارنی و بازتابی یک رابطه هم ارزی است.

۲.۱ نظریه $*$- جبرهای ماتریسی

در این بخش به معرفی $*$-جبرهای ماتریسی روی میدان اعداد حقیقی می‌پردازیم و برخی از قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که مطالب این بخش از [۱]، [۷]، [۹] و [۱۵] استخراج شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر نگاشت

$$A \times A \longmapsto A$$

$$(x, y) \longmapsto xy,$$

به ازای هر $x, y, z \in A$ و $\alpha \in F$ در تساوی‌های

۱. $x(yz) = (xy)z$

۲. $x(y + z) = xy + xz$

۳. $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

صدق کند، آنگاه A یک جبر روی F نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A یک جبر روی F باشد. فضای برداری M روی F یک A-مدول چپ نامیده می‌شود هرگاه نگاشت

$$A \times M \longmapsto M$$

$$(a, m) \longmapsto am,$$

در خواص زیر صدق کند:

۱. برای هر ثابت $a \in A$، نگاشت $m \longmapsto am$ روی M خطی باشد؛

۲. برای هر ثابت $m \in M$، نگاشت $a \longmapsto am$ روی A خطی باشد؛

۳. برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$، تساوی $a_1(a_2)m = (a_1a_2)m$ برقرار باشد.

A - مدول راست، نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود. علاوه بر این، M یک A - مدول نامیده می‌شود هرگاه هم A - مدول راست و هم A - مدول چپ باشد و برای هر $a, b \in A$ و $m \in M$،

$$a(mb) = (am)b.$$

مثال ۱.۲.۳. $M_n(\mathbb{R})$ یک $\mathbb{R}$ - مدول است.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید M یک A - مدول باشد. در این صورت، مجموعه ناتهی $N \subseteq M$ زیرمدول M نامیده می‌شود هرگاه N با همان عمل جمع و ضرب در اسکالر M یک A - مدول باشد.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید M یک A - مدول باشد. در این صورت، M نیم ساده نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر زیرمدول K از M، زیرمدول دیگری مانند P یافت شود به طوری که

$$M = K \bigoplus P.$$

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت، R نیم ساده نامیده می‌شود هرگاه R به عنوان R - مدول، نیم ساده باشد.

تعریف ۱.۲.۷. مجموعه $\mathcal{T} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ یک زیرجبر یا جبر ماتریسی روی $\mathbb{R}$ نامیده می‌شود هرگاه $I_n \in \mathcal{T}$ و برای هر $A, B \in \mathcal{T}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha A + \beta B, AB \in \mathcal{T}.$$

تعریف ۱.۲.۸. زیرجبر $\mathcal{T}$ یک $*$ - زیرجبر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A \in \mathcal{T}$، $A^* \in \mathcal{T}$.

مثال ۱.۲.۹. مجموعه تمام ماتریس‌های حقیقی بالا مثلثی $n \times n$ یک زیرجبر می‌باشد، ولی یک $*$ - زیرجبر نیست.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنید $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ دو زیرجبر باشند. آنگاه نگاشت $\rho : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ یک همریختی نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند: