بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فنی و مهندسی

گروه تحصیلات تکمیلی مهندسی صنایع

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان پایان نامه:

ارایه مدلی برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی قطعی و فازی ناسازگار در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

استاد راهنما : جناب آقای دکتر علیرضا غلامی

نگارش: محمد جواد صفری

1389

چکیده

تست سازگاری یکی از مراحل مهم فرآیند تحلیل سلسله مراتبی است. وقتی ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار می شود مجددا باید توسط تصمیم گیرنده مورد بازبینی قرار گیرد. ولی در مواردی ممکن است تصمیم گیرنده در دسترس نباشد یا فرصت تجدید نظر نداشته باشد. در این تحقیق مدلی بر اساس بردار ویژه برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی ارایه شده است. در مدل ارایه شده تابع هدف به صورت حداقل کردن حداکثر مقدار ویژه ماتریس در نظر گرفته شده است. دو شاخص δ و σ برای اندازه گیری نزدیکی ماتریس اولیه و ماتریس تعدیل شده مطرح شده اند که در مدل ارایه شده این شاخص ها به صورت محدودیت در نظر گرفته شده اند. چون ماتریس مقایسات زوجی باید معکوس باشد ، شرط معکوس بودن ماتریس نیز در محدودیت ها اعمال شده است. مدل پیشنهادی برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی فازی نیز توسعه داده شده است. با ارایه مثال برگرفته از مقالات ، مدل حل شده است و نتایج آن با روش های دیگری که برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی موجودند، مقایسه گردیده است. نتایج مقایسات نشان می دهد که مدل ارایه شده با مقادیر δ و σ کمتری به جواب مطلوب می رسد و اطلاعات ماتریس اولیه بیشتر حفظ می شود. همچنین ساختاری نرم افزاری طراحی شده است که اجرا و کاربردی بودن مدل را تسهیل می کند.

کلمات کلیدی: تحلیل سلسله مراتبی ، تعدیل ماتریس ناسازگار ، تست سازگاری ، حداکثر مقدار ویژه

تشکر و قدردانی

دوران تحصیلات تکمیلی فرصتی برایم مهیا نمود تا در محضر استادی باشم که اسوه علم واخلاق می باشد.از استاد راهنمایم آقای دکتر غلامی به پاس راهنمائی های کارگشایش در طول تحصیل وانجام رساله سپاسگزارم. هم چنین از اساتید داور جناب آقای دکتر محقر و جناب آقای دکتر جعفری برای مطالعه پایان نامه و ارائه نظرات بسیار مفیدشان تشکر می کنم.

فهرست مطالب

فصل ۱ – کلیات ۱

۱-۱- مقدمه..... ۲

۱-۲- بیان مسئله..... ۳

۱-۳- اهداف تحقیق..... ٤

۱-٤- سوالات تحقیق..... ٤

۱-۵- مفروضات تحقیق..... ٤

۱-٦- ضرورت تحقیق..... ۵

فصل ۲ – ادبیات و پیشینه تحقیق..... ۷

۲-۱- فرآیند تحلیل سلسله مراتبی..... ۸

۲-۲- مفهوم سازگاری..... ۹

۲-۳- روش های مختلف تست سازگاری ماتریس مقایسات زوجی..... ۱۰

۲-۳-۱- شاخص ناسازگاری هندسی..... ۱۰

۲-۳-۲- شاخص ناسازگاری با استفاده از میانگین هارمونیک..... ۱۱

۲-۳-۳- شاخص ناسازگاری با استفاده از بردار ویژه برای ماتریس..... ۱۲

۲-۳-٤- شاخص ناسازگاری بازه ای..... ۱۵

۲-٤- روش های مختلف برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی..... ۱٦

۲-٤-۱- تعدیل با استفاده از میانگین هندسی..... ۱۷

۲-٤-۲- تعدیل ماتریس مقایسات زوجی فازی با استفاده از میانگین هندسی..... ۲۲

۲-٤-۳- روش ابتکاری ارایه شده توسط D.Cao..... ۲۸

۲-۵- روش های مختلف محاسبه اوزان در فرآیند سلسله مراتبی..... ۳۲

۲-۵-۱-روش حداقل مربعات ۳۲

۲-۵-۲- روش حداقل مربعات لگاریتمی ۳۳

۲-۵-۳-روش بردار ویژه..... ۳٤

۲-۵-٤- روش های تقریبی..... ۳٤

۲-۵-۵-روشهای مختلف محاسبه اوزان در سالهای اخیر..... ۳۵
فصل ۳- روش تحقیق..... ٤۲
۳-۱- مقدمه..... ٤۳
۳-۲- بیان شاخص ها..... ٤۳
۳-۳- طراحی مدل..... ٤٤
۳-۳-۱- تعاریف..... ٤٤
۳-۳-۲- معلومات..... ٤٤
۳-۳-۳- مجهولات..... ٤٤
۳-۳-٤- تابع هدف..... ٤٤
۳-۳-۵- محدودیت ها..... ٤۵
۳-٤- روش حل..... ٤۹
۳-٤-۱- Add کردن Solver نرم افزار Excel..... ٤۹
۳-٤-۲- چگونگی استفاده از Solver..... ۵٤
فصل ٤ - محاسبات و نتایج بدست آمده..... ۵٦
٤ -۱- مقدمه ۵۷
٤-۲- مدل نهایی..... ۵۷
٤-۳- مقایسه نتایج با مقالات دیگر..... ٦۲
٤-٤- مزیت های مدل ارایه شده نسبت به سایر روش ها..... ٦۵
٤-۵- توسعه مدل برای ماتریس مقایسات زوجی فازی..... ٦۵
٤-۵-۱-بیان مسئله..... ٦۵
٤-۵-۲- تعریف..... ٦٦
٤-٦-روش ارائه شده برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی فازی..... ٦۷
٤-۷- جمع بندی..... ۷۲
فصل ۵ - نتیجه گیری و تحقیقات آتی..... ۷۳
فصل ٦- منابع..... ۷۵

فهرست جداول

جدول۲-۱- ترجیحات زوجی..... ۹

جدول۲-۲- شاخص های مختلف بررسی ناسازگاری.....۱٦

جدول ۲-۳- نتایج استفاده از روش میانگین هندسی با $\lambda=0.5$.....۲۱

جدول۲-٤- نتایج استفاده از روش میانگین هندسی با $\lambda=0.98$.....۲۲

جدول۲-۵- روش های مختلف تعدیل ماتریس مقایسات زوجی ۳۲

جدول ۲-٦- روش های مختلف محاسبه اوزان آلترناتیوها از ماتریس مقایسات زوجی.....٤۰

جدول٤-۱- درایه های ماتریس اولیه..... ٦۰

جدول٤-۲- تغییرات CR و λ_{max} با افزایش δ و σ ٦۱

جدول ٤-۳- نتایج مدل ارایه شده در مقایسه با مقاله D.Cao در CR=0.060 .....٦۲

جدول٤-٤- نتایج مدل ارایه شده در مقایسه با مقاله D.Cao در CR=0.099 ..... ٦۳

جدول٤-۵- اوزان محاسبه شده آلترناتیوها ۷۰

فهرست اشکال

شکل ۳-۱Office button در نرم افزار Excel ۵۰

شکل ۳-۲ Excel option در نرم افزار Excel ۵۰

شکل ۳-۳ Add-Ins در نرم افزار Excel ۵۱

شکل ۳-٤ Solver Add-In در نرم افزار Excel..... ۵۲

شکل ۳-۵ ادامه Solver Add-in در نرم افزار Excel ۵۳

شکل ۳-٦ Solver در نرم افزار Excel..... ۵٤

شکل ۳-۷ پنجره Solver parameters..... ۵٤

نمودار ٤-۱ تغییرات CR با افزایش مقادیر δ ٦۲

نمودار ٤-۲ مقدار تغییرات هر درایه ماتریس با استفاده از مدل ارایه ارایه شده ٦۳

نمودار ٤-۳ تغییرات هر درایه ماتریس با استفاده از روش مقاله D.Cao و همکاران ۲۰۰۸ ..... ٦٤

نمودار ٤-٤ مقدار تغییرات هر درایه با استفاده از روش Xu و Wei در سال ۱۹۹۹..... ٦٤

نمودار ٤-۵ مقدار تغییرات هر درایه ماتریس فاصله ای با استفاده از مدل ارایه شده..... ٦۹

فصل اول- کلیات

۱-۱- مقدمه

تصمیم گیری[1] بخش مهمی از زندگی شخصی و شغلی هریک از ما را تشکیل می دهد. منابع و فرصت ها محدودند و شایسته نیست که با اخذ تصمیمات نادرست هدر روند. بنابراین ضروریست همواره ضمن در نظر داشتن این محدودیت، از طریق شناخت فرآیند تصمیم گیری و کسب مهارت در مراحل مختلف آن ، تا آنجا که ممکن است ضریب خطا را در اخذ تصمیمات کاهش داد.

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی[2] با تجزیه مسائل مشکل و پیچیده آنها را به شکلی ساده تبدیل کرده و به حل آنها می پردازد. این روش کاربردهای فراوانی در مسائل اقتصادی و اجتماعی پیدا کرده است و در سال های اخیر در امور مدیریتی نیز به کار رفته است.

یکی از مراحل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی تشکیل ماتریس مقایسات زوجی[3] بر اساس نظر خبرگان و تصمیم گیرندگان می باشد. بر روی ماتریس مقایسات زوجی تست سازگاری[4] انجام می شود. اگر سازگاری ماتریس غیر قابل قبول باشد می توان ماتریس ها را به تصمیم گیرندگان برای تجدید نظر برگرداند تا ماتریس جدید تشکیل دهند و این فرآیند را آنقدر تکرار کرد که ماتریس با سازگاری قابل قبول بدست آید این روش در عمل به دلایل زیر ممکن است امکان پذیر نباشد:

۱) دسترسی به تصمیم گیرندگان و خبرگان نداشته باشیم.
۲) ممکن است در قضاوت های مجدد نیز ماتریس ناسازگار بدست آید.
۳) اگر تعداد مقایسات زیاد باشد تشکیل ماتریس بسیار وقت گیر و هزینه بر خواهد بود.

لذا روش هایی برای استفاده از ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار[5] و تعدیل[6] این ماتریس ارایه شده اند. در این پایان نامه مدلی برای تعدیل و محاسبه اوزان از ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار ارایه شده است. همچنین مدل ارایه شده برای استفاده در ماتریس مقایسات زوجی فاصله ای[7] و فازی توسعه داده شده است.

---

[1] . Decision Making
[2] . Analytic Hierarchy Process
[3] . Comparison Matrix
[4] . Consistency Test
[5] . Inconsistent Comparison Matrix
[6] . Modify
[7] . Interval Comparison Matrix

۱-۲- بیان مسئله

در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی عناصر به صورت زوجی مقایسه می شوند سپس با استفاده از این ماتریس، وزن عناصر محاسبه می گردد. ماتریس مقایسات زوجی به صورت زیر نشان داده می شود که در آن a_{ij} ترجیح عنصر i ام نسبت به عنصر j ام است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

همچنین ماتریس مقایسات زوجی می تواند به صورت فاصله ای باشد که در زیر نشان داده شده است. ماتریس مقایسات زوجی فاصله ای بیان می کند که مقدار ترجیح عنصر i به j تقریبا در فاصله $[l_{ij},U_{ij}]$ می باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & [l_{12},u_{12}] & \cdots & [l_{1n},u_{1n}] \\ [l_{21},u_{21}] & 1 & \cdots & [l_{2n},u_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [l_{n1},u_{n1}] & [l_{n2},u_{n2}] & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

در حالتی که ناسازگاری ماتریس بیش از حد مجاز باشد می توان در درایه های ماتریس به گونه ای تغییرات ایجاد کرد که ماتریس را تا حدودی سازگار نمود. تغییرات در درایه های ماتریس باید به گونه ای باشد که اطلاعات اولیه که از تصمیم گیرنده گرفته شده است در حد مطلوبی حفظ شود. لذا هرچه تغییرات در درایه های ماتریس کمتر باشد اطلاعات ماتریس اولیه بیشتر حفظ می شود. در این پایان نامه مدلی به منظور کم کردن میزان ناسازگاری ماتریس قطعی به گونه ای که حداقل تغییرات در درایه ها به

وجود آید نوشته شده است. این مدل برای حالتی که درایه های ماتریس مقایسات زوجی به صورت فازی هستند توسعه داده شده است.

۱-۳- اهداف تحقیق

ماتریس مقایسات زوجی ممکن است ناسازگار باشد. هدف از این تحقیق ارایه روشی برای استفاده از اینگونه ماتریس ها می باشد. به این منظور مدل جدیدی برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار قطعی و محاسبه اوزان از ماتریس ارایه شده است. با توجه به اینکه ماتریس مقایسات زوجی می تواند به صورت فازی باشد، ارایه روشی برای تعدیل اینگونه ماتریس ها هدف دیگر در این پایان نامه است. از دیگر اهداف این تحقیق تسهیل استفاده از نتایج حاصله در حوزه های گوناگون می باشد. لذا ساختاری نرم افزاری برای حل مدل و تعدیل ماتریس و محاسبه اوزان طراحی شده است.

۱-٤- سوالات تحقیق

آیا هر ماتریس ناسازگاری را می توان تعدیل کرد؟
مدل ارایه شده در چه مواقعی کاربرد دارد؟
چه مقدار تغییرات در ماتریس مجاز است؟
آیا اشتباهات تصمیم گیرنده در ماتریس مقایسات زوجی را مشخص می کند؟

۱-۵- مفروضات تحقیق

در این تحقیق فرض کرده ایم تصمیم گیرنده در انجام مقایسات زوجی مرتکب اشتباه نشده است.
همچنین تعدیل ماتریس صرفا بر اساس شاخص نسبت ناسازگاری[1] معرفی شده توسط آقای ساعتی انجام شده است و تغییرات شاخص ها و روش های دیگر برای اندازه گیری ناسازگاری ماتریس بررسی نمی شود.

[1] . Consistency Ratio

۱-٦- ضرورت تحقیق

وقتی ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار است می توانیم اقدامات زیر را انجام دهیم :

۱) ماتریس را به تصمیم گیرنده (DM) برای بازبینی برگردانیم.

۲) از روش هایی برای تعدیل ماتریس استفاده کنیم.

در اقدام اول اگر بخواهیم ماتریس را به تصمیم گیرنده برگردانیم ممکن است مشکلات زیر به وجود آید:

۱) ممکن است تصمیم گیرنده در دسترس نباشد.

۲) ممکن است DM به دلایلی فرصت انجام مقایسات مجدد را تا مدتها نداشته باشد.

۳) هیچ تضمینی نیست که انجام مجدد مقایسات باعث تولید ماتریسی با CR مناسب شود.

٤) اگر تعداد درایه های ماتریس مقایسات زیاد باشد زمان و هزینه زیادی صرف می شود.

٥) اگر DM سوال کند ماتریس را چگونه تغییر دهم ، باید بتوان وی را راهنمایی کرد.

در اقدام دوم برای تعدیل می توانیم از نرم افزار Expert Choice استفاده کنیم. این نرم افزار فقط یک درایه از ماتریس که بیشترین تاثیر را در ناسازگاری دارد مشخص می کند و مناسب ترین عدد برای آن درایه را تعیین می کند و شاخص های مختلف مطرح شده برای مناسب بودن تعدیل را در نظر نمی گیرد. به عنوان مثال فرض کنید ماتریس ناسازگار اولیه به صورت زیر باشد که در آن مقدار CR=0.032 می باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار Expert Choice ماتریس تغییر یافته به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 16.6 & 5 & 5 \\ 1/16.6 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که درایه سطر اول ستون دوم از ۲ به ۱۶.۶ تغییر یافته است . این تغییرات زیاد اطلاعات گرفته شده از DM را حفظ نمی کند. در چنین شرایطی ، استفاده از روش هایی برای تعدیل ماتریس مقایسات زوجی ضرورت می یابد.

فصل دوم: ادبیات و پیشینه تحقیق

۲-۱- فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP)

یکی از کارآمد ترین تکنیک های تصمیم گیری فرآیند تحلیل سلسله مراتبی است که اولین بار توسط T.L.Saaty در ۱۹۸۰ مطرح شد . که بر اساس مقایسه های زوجی بنا نهاده شده و امکان بررسی آلترناتیوهای مختلف را به تصمیم گیرندگان می دهد .

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی با تجزیه مسائل مشکل و پیچیده آنها را به شکلی ساده تبدیل کرده و به حل آنها می پردازد. این روش کاربردهای فراوانی در مسائل اقتصادی و اجتماعی پیدا کرده است و در سال های اخیر در امور مدیریتی نیز به کار رفته است.

در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی عناصر هر سطح نسبت به عنصر مربوطه خود در سطح بالاتر به صورت زوجی مقایسه شده و وزن آنها محاسبه می گردد. در این مقایسه ها تصمیم گیرندگان از قضاوت های شفاهی استفاده خواهند کرد ، به گونه ای که اگر عنصر **i** با عنصر **j** مقایسه شود تصمیم گیرنده خواهد گفت که اهمیت **i** بر **j** یکی از حالات زیر است:

- کاملا مرجح یا کاملا مهم تر یا کاملا مطلوبتر
- ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت خیلی قوی
- ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت قوی
- کمی مرجح یا کمی مهمتر یا کمی مطلوبتر
- ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت یکسان

این قضاوتها توسط ساعتی به مقادیر کمی بین ۱ تا ۹ مطابق جدول زیر تبدیل شده اند که به صورت اعداد معکوس نیز برای ارجحیت های ضعیف، قابل استفاده می باشند.

جدول ۲-۱: ترجیحات زوجی

ترجیحات (قضاوت شفاهی)		مقدار عددی
کاملا مرجح یا کاملا مهم تر و یا کاملا مطلوبتر	Extremely Prefered	۹
ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت خیلی قوی	Very Strongly Prefered	۷
ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت قوی	Strongly Prefered	۵
کمی مرجح یا کمی مهم تر یا کمی مطلوبتر	Moderately Prefered	۳
ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت یکسان	Equally Prefered	۱
ترجیحات بین فواصل فوق		۲،٤،٦،۸

۲-۲- مفهوم سازگاری

یکی از مراحل تحلیل سلسله مراتبی کنترل سازگاری تصمیم است به عبارت دیگر همواره در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی می توان میزان سازگاری تصمیم را محاسبه نمود و نسبت به خوب و بد بودن و یا قابل قبول و مردود بودن آن قضاوت کرد.

اگر A دو برابر B اهمیت داشته باشد و B سه برابر C مهم باشد چنانچه A شش برابر C اهمیت داشته باشد این قضاوت را سازگار می گوییم. در عمل اینگونه نیست که تصمیمات و قضاوت های انسان همواره سازگار باشد در عمل ممکن است ترجیح A بر C نزد این شخص یکی از حالات زیر باشد:

الف : برابر شش

ب : مخالف شش

در حالت الف (که ترجیح A بر C برابر ٦ است) ماتریس مقایسه زوجی به شرح زیر خواهد بود:

$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت ماتریس P_1 یک ماتریس سازگار تعریف شده است. حال چنانچه این ترجیح (ترجیح A بر C) مخالف شش باشد (مثلا ٤ باشد) در این صورت ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر خواهد بود.

$$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس P_2 یک ماتریس ناسازگار نامیده شده است.

در ماتریس های سازگار محاسبه وزن ساده بوده و از طریق نرمالیزه کردن عناصر ستون ها به دست می آید و مقدار ناسازگاری ماتریس برابر صفر است در حالی که در ماتریس های ناسازگار محاسبه وزن مشکل تر بوده و مقدار ناسازگاری نیز مخالف صفر است که باید محاسبه گشته و در صورتی که محدوده قابل قبول باشد، مبنای محاسبه اوزان قرار گیرد. ساعتی پیشنهاد می کند که اگر ناسازگاری ماتریس بیشتر از ۰.۱ باشد بهتر است تصمیم گیرنده در قضاوت های خود تجدید نظر کند.

۲-۳- روش های مختلف تست سازگاری ماتریس مقایسات زوجی

۲-۳-۱- شاخص ناسازگاری هندسی(GCI)[1]

Juan Aguaron و همکاران در سال ۲۰۰۳ یک شاخص ناسازگاری هندسی به صورت (۲-۱) تعریف می کنند که در آن (۲-۲) مقدار خطا می باشد.

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \log^2 e_{ij} \qquad (۲-۱)$$

$$e_{ij} = a_{ij}.\frac{w_j}{w_i} \qquad (۲-۲)$$

در زیر توضیحاتی در مورد این مقاله ارایه می کنیم:

[1] . Geometric Consistency Index

فرض کنید ماتریس مقایسات زوجی به صورت $A=(a_{ij})$ باشد که بردار ترجیحات آن با روش میانگین هندسی سطری محاسبه شده است. اگر ماتریس کاملا سازگار باشد a_{ij} برابر $\frac{w_i}{w_j}$ خواهد بود. ولی در حالت ناسازگاری اختلاف خواهند داشت. در این مقاله، رابطه (۲-۲) به عنوان مقدار خطا در نظر گرفته شده است که در حالت سازگاری برابر ۱ می باشد و با استفاده از $\text{Log } e_{ij}$ و $\text{Log}(a_{ij}.\frac{w_j}{w_i})$ که در حالت سازگاری ماتریس $\text{Log}(a_{ij}.\frac{w_j}{w_i})$ برابر Log1 می باشد ، تعریف (۳-۲) ارایه شده است.

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(\log e_{ij} - \log 1)^2 \qquad (۳-۲)$$

با توجه به اینکه log1 برابر صفر است لذا رابطه (۲-۳) به صورت (۲-۱) تبدیل می شود.

۲-۳-۲-شاخص سازگاری هارمونیک (HCI)[1]

William E. Stein و Philip J. Mizzi در سال ۲۰۰۷ از میانگین هارمونیک جمع ستون های ماتریس استفاده می کند و از رابطه (۲-٤) برای محاسبه میزان ناسازگاری استفاده می کند.

$$HCI = \frac{[HM_{(s)} - n](n+1)}{n(n-1)} \qquad (٤-۲)$$

در زیر به توضیح این روش می پردازیم:

فرض کنید جمع ستونی ماتریس مقایسات زوجی به صورت $S=(s_1, \ldots, s_n)$ باشد میانگین هارمونیک s_1 تا s_n را با $HM(s)$ نشان می دهیم که به صورت رابطه (۲-۵) می باشد.

$$HM(s) = \frac{n}{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_n}} \qquad (۵-۲)$$

مثال(۲-۱): فرض کنید ماتریس A به صورت شکل زیر باشد.

[1] . Harmonic Consistency Index

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

جمع هر یک از ستون ها را بدست می آوریم.

$S_1=1+1/2+1/4 = 7/4$
$S_2= 2+1+1/3 = 10/3$
$S_3=4+3+1=8$

میانگین هارمونیک جمع های S_1 تا S_3 را محاسبه می کنیم.

$HM(s) = 3.0107$

با استفاده از رابطه ارایه شده در بالا HCI را محاسبه می کنیم.

$HCI=0.0072$

برای همین مثال مقدار λ_{max} =3.0183 خواهد بود.

۲-۳-۳- شاخص ناسازگاری با استفاده از بردار ویژه برای ماتریس مقایسات زوجی فاصله ای

Fang Liu در سال ۲۰۰۹ با استفاده از حدود بالا و پایین ماتریس مقایسات زوجی فاصله ای سازگاری ماتریس را بررسی می کند. در زیر به توضیح این روش می پردازیم.

قضیه ۲-۱ : فرض کنید $R=(r_{ij})n\times n$, $S=(s_{ij})n\times n$ دو ماتریس مثبت هستند λ^{s}_{max} و λ^{R}_{max} به ترتیب بزرگترین مقدار ویژه R ، S می باشند. اگر رابطه(۲-٦) را به صورت زیر داشته باشیم:

$$T(\alpha)=(t_{ij}(\alpha))_{n\times n}=(r_{ij}{}^{\alpha}.s_{ij}{}^{1-\alpha})_{n\times n} \qquad (٦-٢)$$

که در آن $\alpha \in [0,1]$ و $\lambda^{T(\alpha)}_{max}$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $T(\alpha)$ است آنگاه رابطه (۲-۷) برقرار خواهد بود.