دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان :

حل معادلات دیفرانسیل جزیی با روش ترکیبی تبدیل لاپلاس و تکرار تغییرات به کمک برنامه نویسی در محیط متلب

استاد راهنما :

دکتر حسن حسین زاده

استاد مشاور :

دکتر ماشاالله متین فر

نگارش :

سیده معصومه حسینی

شهریورماه ۱۳۹۱

قدردانی:

حمد و سپاس پروردگار هستی را که به استعانت از او توفیق آن را پیدا کردم تا از اقیانوس بیکران علم و دانش توشه ای برگیرم.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر حسن حسین زاده ابراز می دارم که با راهنمایی های دلسوزانه شان مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند.

همچنین از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر ماشاالله متین فر به خاطر کمک های بی دریغ شان به اینجانب صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می کنم. در نهایت سپاس بی شائبه دارم از اساتید محترم گروه و جناب آقای محمد سعیدی که در ادامه مسیر من را یاری نموده اند و خانواده عزیزم بالأخص همسر خوبم که همواره مشوق اصلی من در تمامی دوران تحصیل بودند و موفقیت خود را از آغاز دوره تحصیل تاکنون مرهون زحمات آنها هستم.

سیده معصومه حسینی- شهریورماه ۱۳۹۱

تقدیم :

پدر و مادرم به خاطر همه فداکاری های بی دریغشان

و همسر خوبم و دختران مهربانم.

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا مقدمه ای کوتاه از حساب تغییرات را بیان می کنیم و با مفهوم تغییر تابعک آشنا می شویم که این مفهوم برای یافتن فرینه تابعک ها مورد استفاده قرار خواهد گرفت. همچنین شرایط لازم را برای فرینه به دست خواهیم آورد. سپس به تبدیل لاپلاس، خواص آن و برخی از قضایای مربوط به آن می پردازیم. در ادامه به ایده های اساسی و پایه ای روش تکرار تغییرات و روش تجزیه لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل جزیی می پردازیم. سپس روش جدیدی ارائه می دهیم که ترکیبی از روش لاپلاس و روش تکرار تغییرات می باشد. و در نهایت دستگاه معادلات دیفرانسیل را به روش جدید مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین مقایسه ایی بین روش تکرار تغییرات و روش جدید انجام می دهیم که در اغلب موارد نتیجه این مقایسه برتری عددی روش جدید است.

کلمات کلیدی:

روش تکرار تغییرات؛ ضریب لاگرانژ؛ روش تجزیه لاپلاس؛ معادلات شرودینگر؛ معادله کلین- گوردن.

فهرست مطالب

پیش گفتار

با گسترش سریع علوم غیر خطی، تمایل دانشمندان و مهندسین به روش های تحلیلی روز به روز در حال افزایش است. با این که حل تحلیلی مسائل خطی به کمک کامپیوتر های امروزی بسیار ساده است، اما حل مسائل غیر خطی چه به صورت عددی وچه به صورت تحلیلی با مشکلات زیادی همراه می باشد. بنابراین یافتن روش ها و تکنیک هایی که به وسیله ی آن بتوان مسائل غیر خطی را حل نمود، از اهداف دانشمندان و مهندسین می باشد. در راستای این کار، پروفسور « جی هوان هی [۱] » در سال ۱۹۹۷، « روش تکرار تغییرات(VIM) » را ارائه نمود[۱۵، ۱۶، ۱۷]. و این روش را بر معادلات دیفرانسیل معمولی($ODEs$) و معادلات دیفرانسیل جزیی ($PDEs$) غیر خطی مورد استفاده قرار داد. پس از آن در سال ۱۹۹۸، پروفسور « هی » روش VIMغیرخطی با عوامل غیر خطی از نوع ضرب کانولوشن به کار گرفت . و نیز در سال ۲۰۰۰، سیستم معادلات معمولی مستقل را با استفاده از روش VIMحل نمود[۱۸]. وی در سال ۲۰۰۶، در مقاله ی [۱۹]مفاهیم روش VIMرا به گونه ایی کلی بیان کرد. در باره ی همگرایی روش تکرار تغییرات نیز پژوهش هایی انجام شده است[۵، ۶]. ونیز اصلاحاتی از این روش نیز توسط محققین ارائه شده است.

با توجه به این که مفاهیم اصلی روش تکرار تغییرات در شاخه ایی از ریاضیات به نام « حساب تغییرات » می باشد لذا بر آن شدیم تا ابتدا توضیح مختصری از حساب تغییرات را به عنوان فصل اول بیان کنیم که برگرفته از مرجع [۳، ۱۲]می باشد و همچنین توضیح مختصری از تبدیلات لاپلاس و خواص آنها در این فصل بیان می کنیم. سپس در فصل دوم مفاهیم و اصول روش تکرار تغییرات را بیان می کنیم و این روش و روش تجزیه لاپلاس را برای حل انواع

[۱] Ji Huan He

معادلات دیفرانسیل به کار خواهیم گرفت. در فصل سوم روش جدیدی به نام « روش ترکیبی تکرار تغییرات و تبدیل لاپلاس $(LVIM)$ »رامطرح می کنیم که در این روش از معادلات دیفرانسیلی که جواب دقیق آنها مشخص می باشد، تبدیل لاپلاس گرفته، سپس معادلات دیفرانسیل جدید را با استفاده از روش VIMحل کرده، و در آخر از جواب، لاپلاس معکوس می گیریم. در فصل آخر این روش را بر روی دستگاه معادلات دیفرانسیل پیاده می کنیم. همچنین مقایسه ایی میان روش VIMو روش $LVIM$انجام می دهیم که نتیجه ی این مقایسه در اغلب موارد، برتری عددی روش $LVIM$است.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ تابعک و مسائل تغییراتی

تابعک ها نقش مهمی را در بسیاری از مسائل آنالیز، مکانیک ، هندسه و... ایفا می کنند. به وسیله تابعک ها ، به هر عضو مجموعه ای دلخواه از توابع می توان عدد حقیقی را نسبت داد، لذا تابعک نوعی تابع است که در آن متغیرهای مستقل، خود، تابع (یا منحنی) می باشد. لذا تابعک را می توان به صورت زیر تعریف کرد :

تعریف ۱.۱.۱ : *اگر Ω مجموعه ای از توابع و $\Re$ مجموعه ی اعداد حقیقی باشد، آنگاه $J : \Omega \to \Re$ را یک تابعک می نامیم.*

در زیر چند مثال از تابعک آورده شده است .

مثال ۱.۱ : *مجموعه ی همه ی منحنی های با طول متناهی را در نظر بگیرید. در این صورت به هر منحنی از این مجموعه، می توان عدد معینی را نسبت داد، که این عدد را می توان طول منحنی در نظر گرفت .بنابراین طول منحنی یک تابعک می باشد، که روی همه ی منحنی های با طول متناهی تعریف شده است.*

مثال ۲.۱ : *فرض کنید $y(x)$ یک تابع دلخواه به طور پیوسته مشتق پذیر باشد که روی بازه $[a, b]$ تعریف شده است.در این صورت عبارت :*

$$J[y] = \int_a^b y'^{۲}(x)dx,$$

یک تابعک روی مجموعه ی همه توابع به طور پیوسته مشتق پذیر تعریف شده روی بازه $[a, b]$ می باشد.

مثال ۳.۱ : *برای یک مثال کلی تر، فرض کنید $F(x, y, z)$ ، یک تابع پیوسته باشد.در این صورت عبارت:*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

یک تابعک روی مجموعه ی همه توابع به طور پیوسته مشتق پذیر تعریف شده روی بازه ی $[a, b]$ می باشد.با انتخاب توابع مختلف $F(x, y, z)$ ، در مثال فوق ، تابعک های مختلف به دست می آید.به طور مثال، اگر :

$$F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2},$$

در این صورت:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

که طول منحنی به معادله $y = y(x)$ را می دهد و همان تابعک مثال ۱ .۱ است و یا اگر:

$$F(x, y, z) = z^2,$$

در این صورت:

$$J[y] = \int_a^b y'^2(x)dx,$$

که همان تابعک مثال ۱ .۲ می باشد.

تذکر ۱.۱.۱ : *f روی $[a, b]$ به طور پیوسته مشتق پذیر است هرگاه f و f' پیوسته باشند .*

شاخه ای از حساب تابعک ها وجود دارد، که بیشترین پیشرفت را داشته و هدف آن پیدا کردن بیشینه و کمینه تابعک ها ست. این شاخه، «حساب تغییرات» و مسائل پیرامون آن، «مسائل تغییراتی »نامیده می شوند.در زیر مثالی از مسائل تغییراتی آورده شده است:

مثال ۴.۱ : *پیدا کردن کوتاه ترین منحنی از نظر طول که دو نقطه ی مشخص از صفحه مانند $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را به هم وصل می کند یعنی یافتن $y = y(x)$ به طوری که تابعک :*

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

به مقدار کمینه خود برسد.

هر یک از مسائل تغییرات شامل تابعکی است که می تواند به صورت $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$ نوشته شود. چنین تابعک هایی دارای خاصیت محلی سازی می باشند. یعنی اگر منحنی $y = y(x)$ را به قسمت های مجزایی تقسیم کنیم، و مقدار تابعک را در هر قسمت حساب کنیم. در این صورت مجموع مقادیر تابعک ها در قسمت های مجزا برابر مقدار تابعک در کل منحنی می شود.

بنابراین به طور تقریبی می توان مسأله تغییراتی را به صورت مسأله پیدا کردن نقاط فرینه تابع n متغیره ی $J(y_1, y_2, ..., y_n)$ تلقی کرد، که با میل دادن n به سمت بی نهایت می توان به جواب دقیق مسأله رسید. لذا با توجه به روند فوق، تابعک ها می توانند توابعی با بی نهایت متغیر که همان مقادیر تابع $y = y(n)$ در نقاط مجزا می باشند، در نظر گرفته شوند، و نیز می توان حساب تغییرات را در تناظر با حساب دیفرانسیل به شمار آورد.

تغییر تابعک، تعیین شرط لازم برای یک فرینه

در این بخش مفهوم تغییر (یا دیفرانسیل) یک تابعک را مشابه مفهوم دیفرانسیل یک تابع n متغیره بیان می کنیم.

تعریف ۲.۱.۱ *: Ω رایک فضای نرم دار خطی در نظر بگیریدو فرض کنید که بتوان عدد$\varphi[h]$ را به هر عضو $h \in \Omega$ تخصیص داد، یا به عبارت دیگر فرض کنید φ یک تابعک تعریف شده روی Ω باشد، گوییم φ یک تابعک خطی است هرگاه :*

۱. *برای هر $h \in \Omega$ وبرای هر عدد حقیقی α داشته باشیم :* $\varphi[\alpha h] = \alpha\varphi[h]$

۲. *برای هر $h_1, h_2 \in \Omega$ داشته باشیم :* $\varphi[h_1 + h_2] = \varphi[h_1] + \varphi[h_2]$

در زیر مثالی از تابعک خطی ارائه شده است:

مثال ۵.۱ : *فرض کنید نقطه x_0 نقطه ی ثابتی در بازه ی $[a,b]$ باشد ، تابعک φ را به صورت زیر تعریف می کنیم :*

$$\varphi : C[a,b] \longrightarrow R$$

$$\varphi[h] = h(x_0),$$

در این صورت φ تابعک خطی روی $C[a,b]$ می باشد.

مثال ۶.۱ : *تابعک φ را به صورت زیر تعریف می کنیم :*

$$\varphi : C^n[a,b] \longrightarrow R$$

$$\varphi[h] = \int_a^b [f_0(x)h(x) + f_1(x)h'(x) + ... + f_n(x)h^{(n)}(x)]dx,$$

که در آن $i = 0, 1, ..., n$ ، $f_i(x)$ ، توابع معلومی در $C[a,b]$ می باشند یک تابعک خطی روی $C^n[a,b]$ می باشد.

حال فرض کنید در مثال فوق برای هر تابع $h(x)$ ، متعلق به مجموعه ای از توابع، برابر صفر شود، در این صورت در مورد توابع $f_i(x)$ ها چه می توان گفت ؟ لم زیر که به «لم اساسی حساب تغییرات» معروف است بعضی از نتایج در این رابطه را به دست می دهد.

لم ۱.۱.۱ : *فرض کنید $\alpha(x)$ تابع پیوسته ای روی بازه ی $[a,b]$ باشد، و برای هر $h(x) \in C[a,b]$ به طوری که $h(a) = h(b) = 0$ ، داشته باشیم:*

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0,$$

در این صورت برای هر $x \in [a,b]$ داریم: $\alpha(x) = 0$ [۳]

لم ۲.۱.۱ : *فرض کنید $\alpha(x)$ تابع پیوسته ای روی بازه ی $[a,b]$ باشد، و برای هر $h(x) \in C[a,b]$ به طوری که $h(a) = h(b) = 0$ داشته باشیم:*

$$\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0,$$

در این صورت برای هر $x \in [a,b]$ خواهیم داشت: $\alpha(x) = c$ ، که c عدد ثابتی می باشد.[۳]

لم ۳.۱.۱ : فرض کنید$\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابع پیوسته ای روی بازه ی $[a,b]$ باشند و برای هر $h(x) \in C^1[a,b]$ به طوری که: $h(a) = h(b) = 0$ داشته باشیم :

$$\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = 0, \tag{1.1}$$

در این صورت تابع $\beta(x)$ مشتق پذیر است، و برای هر $x \in [a,b]$ خواهیم داشت: $\beta'(x) = \alpha(x)$. [۳]

۲.۱ تعریف تغییر تابعک (دیفرانسیل تابعک)

فرض کنید تابعک$J[y]$ روی فضای خطی نرم دار تعریف شده باشد. در این صورت نمو $J[y]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\Delta J[y;h] = J[y+h] - J[y]$$

برای سادگی $\Delta J[y,h]$ را با $\Delta J[h]$ نشان می دهیم. زیرا اگر y تابعی معین و ثابت باشد، در این صورت $\Delta J[h]$ یک تابعک از h است و در حالت کلی غیر خطی است. فرض کنید که :

$$\Delta J[y;h] = \varphi[h] + \varepsilon\|h\|,$$

که $\varphi[h]$ تابعکی خطی می باشد و $\varepsilon \longrightarrow 0$ زمانی که $\|h\| \longrightarrow 0$.

لازم به ذکر است که h تابعی در فضای نرم دار خطی ایی که تابعک روی آن تعریف شده است، می باشد و نرم$\|.\|$ همان نرم خطی مربوطه است. در این صورت تابعک $\Delta J[h]$ را دیفرانسیل پذیر یا تغییرپذیر نامند. و بزرگترین قسمت خطی $\Delta J[h]$ را تغییر یا دیفرانسیل $J[h]$ نامند و با نماد$\delta J[h]$ نمایش می دهند که با $\Delta J[h]$ به اندازه $\varepsilon\|h\|$که عبارت بسیار کوچکی است، شامل مراتب بالاتر از یک برای $\|h\|$است، اختلاف دارد. پس تغییر یک تابعک همواره خود یک تابعک خطی می باشد.

بنابراین نمو و تغییر تابعک $J[h]$ ، هر دو تابعک هایی از دو متغیر مستقل $y(x)$ و$h(x)$ هستند، و بهتر است بنویسیم:

$$\Delta J[y;h] = \delta J[y;h] + \varepsilon\|h\|,$$

قضیه ۱.۲.۱ : *دیفرانسیل یک تابعک دیفرانسیل پذیر یکتاست .*[۳]

۳.۱ فرینه در حساب تابعک ها

تعریف ۱.۳.۱ : *گوییم تابعک $J[h]$ در نقطه ی (منحنی) $y = \widehat{y}$ دارای فرینه می باشد، هرگاه $J[y] - J[\widehat{y}]$ در هر همسایگی از منحنی $y = \widehat{y}$ تغییر علامت ندهد.*

البته بسته به نوع فضای C یا C^1 دو نوع فرینه تعریف می شود :

1. *گوییم تابعک $J[y]$ در نقطه ی (منحنی) $y = \widehat{y}$ دارای فرینه ضعیف می باشد، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و برای هر y که $\|y - \widehat{y}\|_1 < \varepsilon$ نتیجه بگیریم، که: $J[y] - J[\widehat{y}]$ تغییر علامت ندهد، که نرم $\|.\|_1$ همان نرم تعریف شده در فضای نرم دار خطی C^1 می باشد.*

2. *گوییم تابعک $J[y]$ در نقطه ی (منحنی) $y = \widehat{y}$ دارای فرینه قوی می باشد، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و برای هر y که $\|y - \widehat{y}\|_0 < \varepsilon$ نتیجه بگیریم که $J[y] - J[\widehat{y}]$ تغییر علامت ندهد، که نرم $\|.\|_0$ همان نرم تعریف شده در فضای نرم دار خطی C می باشد.*

با توجه به این که تابعک هایی که معمولا در حساب تغییرات در نظر گرفته می شوند، نسبت به صورت $\|.\|_1$ پیوسته می باشند. لذا پیدا کردن فرینه ضعیف آسان تر از فرینه قوی یک تابعک می باشد.

قضیه ۱.۳.۱ : *شرط کافی برای آنکه تابعک تغییر پذیر یا دیفرانسیل پذیر $J[y]$ در نقطه ی (منحنی) $y = \widehat{y}$ مقدار فرینه داشته باشد، این است که تغییرش در $y = \widehat{y}$ صفر شود. یا به عبارت دیگر برای هر h پذیرفتنی، داشته باشیم* :[۳]

$$\delta J[\widehat{y}; h] = \delta J[h] = 0,$$

تذکر ۱.۳.۱ : متناظر با قضیه بالا را برای توابعی که در آنالیز کلاسیک مطرح می شوند، را نیز داریم، در آنالیز کلاسیک، شرط لازم برای آن که تابع یک متغیره f ، در نقطه ای دارای کمینه باشد آن است که مقدار مشتق اول در آن نقطه صفر شود ($df = ۰$) . اما این یک شرط کافی نیست، بلکه اگر در همان نقطه مشتق دوم منفی باشد، در آن صورت آن نقطه، یک نقطه ی کمینه تابع f است.

مشابه همین مطلب را می توان در مورد تابعک ها و در بحث های پیشرفته حساب تغییرات مشاهده کرد.

قضیه ۲.۳.۱ : فرض کنید تابعک $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$ روی مجموعه ای از توابع مانند $y(x)$، که دارای مشتق اول پیوسته در بازه ی$[a,b]$ باشند و در شرایط مرزی$y(a) = A$ و $y(b) = B$ صدق کنند، تعریف شده باشد. در این صورت شرط لازم برای آن که تابعک $J[y]$ دارای یک فرینه در نقطه ی $y = y(x)$ باشد، این است که $y(x)$ در معادله زیر ، (مشهور به معادله اویلر) صدق کند[۳]:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = ۰.$$

منحنی های جواب معادله اویلر را «منحنی های فرینه ساز» می نامند. از آن جا که معادله اویلر یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی دوم است لذا جواب عمومی آن دارای دو ثابت دلخواه مانند $C_۱$ و $C_۲$ است که این دو مقدار ثابت با استفاده از شرایط مرزی داده شده یعنی$y(a) = A$ و $y(b) = B$ به دست می آید.

در ضمن معادله ی اویلر به همراه دو شرط مرزی را «شرایط ایستایی» نامند، که جواب مسأله تغییراتی از شرایط ایستایی به دست می آید.

برای واضح تر شدن موضوع به ذکر یک مثال مبادرت می شود:

مثال ۷.۱ : کوتاه ترین مسیر(از نظر طول) که دو نقطه ی مشخص از صفحه مانند $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ را به هم وصل می کند، را پیدا کنید.

حل :می دانیم که برای به دست آوردن چنین منحنی می بایستی انتگرال طول قوس یعنی تابعک :

$$J[y] = \int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{۱ + y'^۲(x)}dx, \qquad (۲.۱)$$

به مقدار کمینه خود برسد، و با توجه به اینکه در این مثال متغیر های x و y در انتگرالده ظاهر نشده اند، لذا $F_x =$ $F_y = 0$ و نیز حتی $F_{y'x} = F_{y'y} = 0$ ، بنابراین طبق معادله اویلر داریم :

$$F_y - \frac{d}{dy}F_{y'} = F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}y' - \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}y'' = F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = -F_{y'y'}y'' = 0,$$

لذا معادله اویلر به صورت زیر تعریف می شود :

$$F_{y'y'}y'' = 0, \tag{۳.۱}$$

اما چون :

$$F(y') = \sqrt{1 + y'^2} \Longrightarrow F_{y'y'} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

لذا از معادله(۳.۱) نتیجه می شود :

$$y'' = 0,$$

بنابراین :

$$y'' = 0 \Longrightarrow y' = C_1 x \Longrightarrow y = C_1 x + C_2,$$

حال با توجه به شرایط مرزی، یعنی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$، ثابت های C_1 و C_2 مشخص می شوند :

$$y_1 = C_1 x_1 + C_2 \qquad , \qquad y_2 = C_1 x_2 + C_2$$

جواب دستگاه می شود :

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad , \qquad C_2 = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

پس :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{۴.۱}$$

این همان خط مستقیمی است که دو نقطه ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را به هم وصل می کند و تابع فرینه ساز تابعک (۱ .۲) می باشد. ولی از هندسه می دانیم که تابعک (۱ .۲) هیچ منحنی بیشینه سازی ندارد ولی یک منحنی کمینه سازی دارد، پس به این طریق نتیجه می گیریم که (۱ .۴) عقلاً کوتاه ترین مسیر (منحنی) متصل کننده دو نقطه است .

لازم به ذکر است که در مسائل تغییراتی که نقاط انتهایی ثابت نیستند، می بایستی ابتدا جواب های عمومی معادله اویلر: " $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ " را یافته و با در نظر گرفتن شرایط مرزی طبیعی:

$$F_{y'}|_{x=a} = 0, \qquad F_{y'}|_{x=b} = 0$$

(که به کمک $\delta J = 0$ محاسبه می شود)، مقادیرثابت های موجود در جواب عمومی را یافته تا جواب نهایی مسأله حاصل شود .

تذکر ۱ .۳ .۲ : در مسائل تغییراتی با نقاط انتهایی ممکن است مقدار تابع در یکی از نقاط ابتدا یا انتها معلوم باشد، و در دیگری نامعلوم ، آنگاه یکی از دو شرط مرزی طبیعی استفاده می شود.

برای اینکه به نقش شرایط مرزی در مسائل تغییراتی پی ببریم، مثال زیر را مورد توجه قرار می دهیم :

مثال ۱ .۸ : تابعک زیر را در نظر بگیرید :

$$J[y] = \int_0^1 y'^2\, dx,$$

منحنی فرینه ساز تابعک فوق را نسبت به هر یک از شرایط داده شده پیدا کنید .

الف) نقاط انتهایی ثابت شده $y(0) = 0$ و $y(1) = 1$ (ثابت)

ب) نقاط انتهایی آزاد، که $y(0)$ و $y(1)$ تعیین نشده اند(متغیر)

الف) با توجه به این که در انتگرالده متغیرهای x و y ظاهر نشده اند قبلاً محاسبه کردیم که معادله اویلر به صورت $F_{y'y'}y'' = 0$ خواهد بود.

لذا داریم :

$$2y'' = 0 \Longrightarrow y'' = 0 \longrightarrow y = C_1x + C_2$$

که با توجه به شرایط مرزی $y(\circ) = \circ$ و $y(\text{۱}) = \text{۱}$، داریم:

$$C_\text{۱} = \text{۱}, \qquad C_\text{۲} = \circ,$$

لذا جواب، خط $y = x$ می باشد که بازای آن مقدار تابعک برابر یک می شود .

ب) با توجه به این که در این قسمت معادله اویلر همان معادله ی قسمت «الف» می باشد، در نتیجه:

$$\text{۲}y'' = \circ \Longrightarrow y'' = \circ \longrightarrow y = C_\text{۱}x + C_\text{۲}$$

اما شرایط مرزی طبیعی به ما می گوید که می بایستی :

$$F_{y'}|_{x=\circ} = \circ, \qquad\qquad F_{y'}|_{x=\text{۱}} = \circ$$

و نیز می دانیم $F_{y'} = \text{۲}y' = \text{۲}C_\text{۱}$ ، لذا نتیجه می گیریم که $C_\text{۱} = \circ$. بنابراین جواب، خط $y = C_\text{۲}$ می باشد .

۴.۱ تبدیل لاپلاس

به طور کلی در ریاضیات مدام با تبدیلات سر و کار داریم مثلاً عمل مشتق گیری یا انتگرال گیری، تبدیلاتی هستند که به تابع معلوم $f(x)$ توابع $f'(x)$ یا $\int f(x)d(x)$ را نظیر می کنند .

ایده کلی تبدیلات انتگرالی به صورت زیر تعریف می شود :

$$T(f(x)) = F(s) = \int_a^b K(x,s)f(x)dx,$$

که در آن $K(x,s)$ را هسته تبدیل می نامند .

تبدیل لاپلاس [۱] نیز یک تبدیل انتگرالی است که شاید نسبت به کارکرد تبدیل فوریه [۲] در حل مسائل فیزیکی در رتبه دوم قرار دارد . تبدیل لاپلاس به ویژه در حل معادلات دیفرانسیل معمولی که در تجزیه و تحلیل مدار های الکتریکی مطرح می شوند، دارای کاربرد فراوان است. و اساسی ترین کاربرد تبدیل لاپلاس، در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، جزیی، انتگرال و انتگرال دیفرانسیل می باشد .

[۱] Laplace
[۲] Forelh

تعریف ۱.۴.۱ : *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t > 0$ تعریف می گرددرا با نماد $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ یا $F(s)$ نمایش می دهیم و داریم :*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می نامیم و می نویسیم :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$$

تبدیل لاپلاس معکوس به انتگرال بروموویچ [۳] معروف است و بعضاً با عنوان انتگرال معین - فوریه نیز شناخته می شود.

نکته ۱.۴.۱ : *تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس عملگرهای خطی هستند، یعنی هرگاه a و b دو عدد ثابت باشند داریم :*

$$\mathcal{L}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{af(s) + bg(s)\right\} = a\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\} + b\mathcal{L}^{-1}\left\{g(s)\right\}$$

تبدیل لاپلاس بعضی از توابع مهم را در زیر ملاحظه می کنید . توجه به این نکته بسیار اهمیت دارد که حفظ کردن روابط به گونه ای که با داشتن $F(s)$ در هر حالت بتوان سریعاً $f(t)$ را مشخص نمود و به عکس، لازم و ضروری است .

دقت کنید شرط نوشته شده در هر قسمت، شرط همگرا شدن انتگرال مربوط به تعریف تبدیل لاپلاس تابع مورد نظر است، و به تعبیری شرط وجود تبدیل لاپلاس خواهد بود.

[۳] Beromovich