بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

نمایشهای تصویری ۲- گروههای حلقوی

اسدا ...فرامرزی ثالث

استاد راهنما :

دکتر علی ایرانمنش

زمستان ۱۳۷۹

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اعـضـای هیـئـت داوران نـسـخـهٔ نـهایی پایان نامه آقای اسدا... فرامرزی ثالث

تحت عنوان: **نمایشهای تصویری ۲-گروههای حلقوی**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۲- استاد ناظر	آقای دکتر سید احمد موسوی	استادیار	
۳- استاد ناظر	سرکارخانم دکتر اشرف دانشخواه	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی است که در سال ۱۳۷۹ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر علی ایرانمنش، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب اسدالله فرامرزی ثالث دانشجوی رشته ریاضی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: اسدالله فرامرزی ثالث

تاریخ و امضا:

چکیده

هدف این پایان نامه معین کردن همهٔ نمایشهای تصویری تحویلناپذیر ۲- گروههای حلقوی و گروه

$$\varphi = \langle a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ b^{-1}ab = ac,\ c^{-1}ac = a^{1+p},\ c^{-1}bc = b \rangle$$

می‌باشد . بدین منظور ما گروههای نمایش و حاصلضرب شُر این گروهها را محاسبه می‌کنیم سپس در این راستا مجموعهٔ عاملهای این گروهها را در نظر می‌گیریم و با استفاده از گروه جبرهای پیچشی وابسته به این مجموعهٔ عاملها همهٔ نمایشهای تصویری تحویلناپذیرغیر هم ارز این گروهها را معین می‌کنیم .

فهرست مطالب

فصل اول

معرفی
بعضی از مفاهیم اساسی

فصل اول

معرفی بعضی از مفاهیم اساسی :

در این فصل ابتدا گروههای خطی عام و خاص و قضایـای مربـوط بـه آنـها کـه در فصل آخر مورد نیاز است را بیان می‌کنیم و سپس اولیـن و دومیـن گروه کوهمولـوژی و توسیع یک گروه را معرفی می‌کنیم و هـم‌چنیـن فـرض می‌کنیـم G یـک گروه متنـاهی است .

۱-۱ .گروههای خطی و قضایای مربوطه

تعریف ۱-۱-۱. گروه جمعی V را یک فضای برداری روی میـدان F گوینـد هـرگاه یک عمل ضرب تعریف شود که در شرایط زیر صدق کند .

۱- به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را مربوط کند ،

۲- به‌ازای هر α از V , $1\alpha = \alpha$ ،

۳-به‌ازای هر α از V و c_1 و c_2 از F،

$(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ و $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$ ،

٤-به‌ازای هر β و α از V و C از F، $c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنید $m \in N$ و F یک میدان باشد مجموعه همه ماتریسهای ناتکین با درایه‌های در F ، با عمل ضرب ماتریسها تشکیل یک گروه می‌دهند این گروه را گروه خطی معمولی (عام) نامیده و با علامت GL(m ,F) یا $GL_m(F)$ نشان می‌دهیم و در حالتی که $|F| = q$ (p عدد اول $q = p^n$) ، بجای علامت فوق از علامت GL(m,q) یا $GL_m(q)$ استفاده می‌کنیم .

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید $m \in N$ ، F یک میدان و V یک فضای برداری با بعد m روی F باشد مجموعه همه تبدیلات خطی ناتکین از V به V با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند ، این گروه با علامت GL(V,F) و یا GL(V) نشان می‌دهیم و در حالتی که F=GF(q) (p عدد اول $q = p^n$) بجای علامت‌های فوق از GL(v,q) استفاده می‌کنیم .

قضیه ۱-۱-٤. فرض کنید F یک میدان ، V یک فضای برداری و $m \in N$ باشد آنگاه $GL(V,F) \cong GL(m,F)$.

قضیه ۱-۱-٥ . $|GL(m,q)| = (q^m - 1)(q^m - q)\dots(q^m - q^{m-1})$

اثبات : به [١٤] مراجعه شود .

تعریف ۱-۱-٦ . فرض کنید F یک میدان ، V یک فضای برداری و $m \in N$ باشد، مرکز GL(V)عبارتست از $Z(GL(V)) = \{\lambda.1_V | \lambda \in F^*\} = F^*.1_V$

و $PGL(V) = \dfrac{GL(V)}{Z(GL(V))}$ گروه خطی معمولی تصویری نامیده می‌شود .

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید $m \in N$ و F یک میدان باشد مجموعه همه ماتریسهای m×m با درایه‌های در F که دترمینال آنها مساوی ۱ است یک زیر گروه $GL(m,F)$ است ، که به آن گروه خطی خاص گفته می‌شود و با علامت $SL(m,F)$ یا $SL_m(F)$

نشان داده می‌شود و در حالتی که $F = GF(q)$ ، $(q = p^n)$ ، بجای علامت فوق از $SL(m,q)$ یا $SL_m(q)$ استفاده می‌شود.

لم ۱-۱-۸.

الف) $SL(m,q)$ یک زیر گروه نرمال از $GL(m,q)$ است.

ب) $|SL(m,q)| = \frac{|GL(m,q)|}{q-1}$.

اثبات: به [۱٤] مراجعه شود.

لم ۱-۱-۹.

$Z(SL(m,q)) = Z(GL(m,q)) \cap SL(m,q)$ و $|Z(SL(m,q))| = (m, q-1)$

اثبات: به [۱٤] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنید $m \in N$ و F یک میدان باشد گروه $\frac{SL(m,F)}{Z(SL(m,F))}$ را گروه خطی خاص تصویری نامیده و با علامت $PSL(m,F)$ نشان داده می‌شود، اگر F میدان گالوای GF(q) $(q = p^n)$ باشد بجای علامت فوق از $PSL(m,q)$ استفاده می‌شود.

قضیه ۱-۱-۱۱. $|PSL(m,q)| = (q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1}) / (q-1)(m,q-1)$

اثبات : به [۱٤] مراجعه شود.

قضیه (jordan-Moore) **۱-۱-۱۲.** گروههای $PSL(2,q)$ ساده‌اند اگر و فقط اگر $q \geq 2$.

اثبات : به [۱٤] مراجعه شود.

قضیه(jordan-Dickson)**۱-۱-۱۳.** گروههای $PSL(m,q)$ ساده‌اند اگر و فقط اگر $m \geq 3$.

اثبات : به [۱٤] مراجعه شود.

۱-۲.گروههای کوهمولوژی

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه باشد ، G روی X عمل می‌کند هرگاه نگاشتی از G×X بتوی X وجود داشته باشدبطوری که در شرایط زیر صدق کند ،

$$G \times X \to X$$
$$(g,x) \to gx$$

(۱)　$\forall x \in X$ ، $1x = x$ ،

(۲)　$\forall q_1, q_2 \in G, \forall x \in X$ ، $(q_1 q_2)x = q_1(q_2 x)$.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنید G گروه دلخواه و A یک گروه ضربی آبلی باشد و G روی A عمل کند ، نگاشت $f : G \to A$ هومورفیسم متقاطع نامیده می‌شود ، هر گاه

$$f(xy) = {}^{x}f(y)f(x), \qquad \forall x, y \in G$$

مجموعه همه هومورفیسهای متقاطع با عمل ضرب

$$fg(x) = f(x)g(x) \;, \quad \forall x \in G$$

تشکیل یک گروه آبلی می‌دهدکه با $Z^1(G,A)$ نشان داده می‌شود .

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید G یک گروه و A یک گروه ضربی آبلی باشد و G روی A عمل کند و فرض کنید برای $a \in A$ ، نگاشت $f_a : G \to A$ با ضابطه $f_a(x) = {}^{x}a\,a^{-1}$ یک هومورفیسم متقاطع است که به آن هومورفیسم متقاطع اصلی گویند ، مجموعه متشکل از همه هومورفیسم‌های اصلی که با $B^1(G,A)$ نشان داده می‌شود زیرگروهی از $Z^1(G,A)$ می‌باشد .

تعریف ۱-۲-٤. فرض کنید G یک گروه و A یک گروه ضربی آبلی باشد و G روی A عمل کند ، اولین گروه کوهمولوژی که با $H^1(G,A)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$H^1(G,A) = {Z^1(G,A)} \big/ {B^1(G,A)}$$

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنید گروه G روی گروه آبلی A عمل کند نگاشت $\alpha : G \times G \to A$ ۲- همدور (همدوریامجموعه عامل) نامیده می‌شود هرگاه

$$\alpha(x,y)\alpha(xy,z)={}^{x}\alpha(y,z)\alpha(x,yz) \qquad \forall x,y,z\in G.$$

گزاره ۱-۲-۶. اگر α و β دوهمدور باشند آنگاه حاصلضرب $\alpha\beta$ که بصورت زیر تعریف می‌شود نیز یک همدوراست .

$$(\alpha\beta)(x)=\alpha(x)\beta(x), \quad \forall x\in G.$$

تعریف ۱-۲-۷. مجموعه متشکل ازهمه همدورهـای با مقادیر در A یکگروه‌آبلی است که با $Z^2(G,A)$ نمایش می‌دهیم ، عضو همانی $Z^2(G,A)$ همدور با مقدار ۱ است و معکوس هر عضو α از $Z^2(G,A)$ یعنی α^{-1} بصورت زیر است

$$\alpha^{-1}(x,y)=\alpha(x,y)^{-1}, \qquad \forall x,y\in G.$$

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنید گروه G روی گروه آبلی A عمل کند و $t:G\to A$ نگاشتی باشدکه $t(1)=1$ آنگاه نگاشت $\delta_t:G\times G\to A$ با ضابطه $(\forall x,y\in G)$ ، $\delta_t(x,y)={}^{x}t(y)t(x)t(xy)^{-1}$ ، یک همدور است که به آن دوگان مرز می‌گوییم .حال $B^2(G,A)$ را مجموعه دوگان‌مرزها قرار می‌دهیم ، واضح است که $B^2(G,A)$ زیر گروهی از $Z^2(G,A)$ است .

تعریف ۱-۲-۹. فرض کنید گروه G روی گروه آبلی A عمل کند ، دومین گروه کوهمولوژی که با $H^2(G,A)$ نشان داده می‌شود ، گروه خارج قسمتی زیر می‌باشد .

$$H^2(G,A)={}^{Z^2(G,A)}\!\big/_{B^2(G,A)}$$

تعریف ۱-۲-۱۰. به اعضای $H^2(G,A)$ رده‌های کوهمولوژی گفته می‌شود . به هر دو همدور مشمول در یک رده کوهمولوژی ، کوهمولوجوس گوییم ، و رده کوهمولوژی شامل α را با $\bar{\alpha}$ یا $\{\alpha\}$نشان می‌دهیم .

۱-۳. توسیع گروهها

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید $\{G_n\}$ دنباله‌ای از گروهها و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از هومرفیسم‌ها باشد بطوری که $f_n:G_n\to G_{n-1}$ ، آنگاه به رشته

$$\cdots\to G_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}G_n\xrightarrow{f_n}G_{n+1}\to\cdots$$

یک رشته دقیق گوییم هرگاه $\forall n$ $\mathrm{Im}\, f_{n-1}=\mathrm{Ker} f_n$.

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنید A و X و G گروه و α و β هومرفیسم باشند ، به رشته دقیق کوتاه $1 \to A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} G \to 1$ یـک توسـیع از A بـا G گوییـم ، و آنرا با E نشان می‌دهیم .

توسیع فوق را یک توسیع شـکافته گوییـم هـرگاه هومرفیسـم $\gamma : G \to X$ وجـود داشته باشد که $\beta \circ \gamma = 1_G$ ، به این هومرفیسم ، هومرفیسم شکافنده گوییم .

تعریف ۱-۳-۳. هرگاه

$$1 \to A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} G \to 1 \qquad E$$

$$1 \to A \xrightarrow{\alpha'} Y \xrightarrow{\beta'} G \to 1 \qquad E'$$

دو توسیع از A با G باشند آنگاه E را بـا E' هـم‌ارز گوئیـم هـرگاه هومرفیسـمی مانند $\gamma : X \to Y$ وجود داشته باشد بطوری که $\beta' o \gamma = \beta$ و $\gamma o \alpha = \alpha'$.

در واقع γ یک ایزومرفیسم است، پس رابطه فوق متقارن است وهـم‌چنیـن می‌تـوان بررسی کرد که رابطه تعریف شده انعکاسی و متعدی نیز می‌باشد، بنابراین رابطـه فـوق یک رابطه هم‌ارزی است و رده هم‌ارزی E را با $\bar{E}$ نشان می‌دهیم .

تعریف ۱-۳-٤. در توسیع $E : 1 \to A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} G \to 1$ که i نگاشت شـمول است هر نگاشت $t : G \to X$ که $t(1) = 1$ و $f \circ t = 1_G$ ، یـک بخـش از f نـامیده می شود .

قضیه ۱-۳-۵. فرض کنید $E : 1 \to A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} G \to 1$ یک توسـیع از A با G و $t : G \to X$ یک بخش از f باشد ، $\alpha_E : G \times G \to A$ را با ضابطه

$$\alpha_E(x, y) = t(x)t(y)t(xy)^{-1}, \qquad (x, y \in G)$$

تعریف می‌کنیم آنگاه

(۱) فرمول $a \in A, x \in G$ ، $\;^{x}a = t(x)at(x)^{-1}$ ،یـک عمـل از G روی A معین می‌کند که فقط به رده هم‌ارزی $\bar{E}$ از E وابسته است .

(۲) $\alpha_E \in Z^2(G, A)$ ، که $Z^2(G, A)$ با عمل تعریف شده در (۱) معین می‌شود .

(۳) توسیع E شکافته‌است اگر و فقط اگر $\bar{\alpha}_E = 1$.

(٤) اگر G روی A عمل کنـد و $E(G, A)$ مجموعـه همـه رده‌هـای هـم‌ارزی از توسیع‌های A با G ، که با عمل G روی A مشخص می‌شود ، باشد آنگاه نگاشت

$$E(G,A)\to H^2(G,A)$$
$$\overline{E}\to \overline{\alpha}_E$$

یک دوسوئی است .

اثبات : به [11] مراجعه شود .

تعریف ۱-۳-۶ . توسیع $E:1\to A\xrightarrow{\alpha} X\xrightarrow{\beta} G\to 1$ که در آن $\alpha(A)\in Z(X)$ ، یک توسیع مرکزی A با G نامیده می‌شود .

تذکر ۱-۳-۷. اگر E یک توسیع مرکزی از A با G باشد ،آنگاه هر توسیع هم‌ارز با E نیز یک توسیع مرکزی از A با G است .

تعریف ۱-۳-۸. فرض کنید G روی گروه آبلی A عمل کند و H زیرگروه G و $\alpha\in Z^2(G,A)$ باشد و فرض کنید $\alpha_H : H\times H\to A$ تحدید α به $H\times H$ باشد آنگاه با عمل القا شده H روی A از عمل G روی A ، $\alpha_H\in Z^2(H,A)$ و نگاشت $Z^2(G,A)\to Z^2(H,A)$, $\alpha\mapsto\alpha_H$ یک هومومرفیسم است که دوگان مرز را به دوگان مرز می‌برد ، هومومرفیسم القاء شده $H^2(G,A)\to H^2(H,A)$ را نگاشت تحدید نامیده و با Res نمایش می‌دهیم .

تعریف ۱-۳-۹. فرض کنید گروه G روی گروه آبلی A بطور بدیهی عمل کند و N یک زیر گروه مرکزی از G ، و رشته $1\to N\to G\xrightarrow{\pi}\frac{G}{N}\to 1$ دقیق باشد و $\mu:\frac{G}{N}\to G$ یک بخش از π باشد و نگاشت $\lambda:\frac{G}{N}\times\frac{G}{N}\to N$ را با ضابطه

$$\lambda(x,y)=\mu(xy)\mu(y)^{-1}\mu(x)^{-1}\qquad \forall x,y\in\frac{G}{N}$$

تعریف‌می‌کنیم دراین‌صورت $\alpha\circ\lambda\in Z^2\left(\frac{G}{N},A\right)$ و نگاشت

$$\mathrm{Tra}:\mathrm{Hom}(N,A)\to H^2\left(\frac{G}{N},A\right)$$
$$\mathrm{Tra}(\alpha)=\overline{\alpha\circ\lambda}$$

نگاشت خطا نامیده می‌شود .