بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم لیلا کرامتی** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان: **«توصیف طیفی مضارب یکه و رادیکال در جبرهای باناخ»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر حکیمه ماهیار	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی-پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی (محض)** است که در سال **۱۳۸۹** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سید مسعود امینی**، مشاوره سرکار خانم دکتر **فرشته سعدی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **لیلا کرامتی** دانشجوی رشته **ریاضی (محض)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **لیلا کرامتی**

تاریخ و امضا: **۱۳۸۹/۱۲/۲۴**

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **لیلا کرامتی** دانشجوی رشته **ریاضی(محض)** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه/ رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هرگونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواه نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: لیلا کرامتی

تاریخ: ۱۳۸۹/۱۲/۲۴

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

توصیف طیفی مضارب یکه و رادیکال در جبرهای باناخ

توسط

لیلا کرامتی

استاد راهنما

دکتر سید مسعود امینی

استاد مشاور

دکتر فرشته سعدی

اسفند ۱۳۸۹

تقدیم به:

اسطوره های همیشه جاودان زندگیم

آنان که عاشقانه دوستشان دارم

پدر و مادر عزیزم

که تلاش و کوشش را با همتی بی دریغ ره توشه ام ساختند، تا به من بیاموزند شایسته زیستن را

و خواهرم آرزو

تشکر و قدردانی

پروردگارا، مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست‌مایه ای برای تجارب، بلکه تکیه گاهی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن خود و دیگران. خداوندا تو را سپاس، که در لحظه لحظه زندگی یار و یاورم بودی، از دریچه لطف بر من منت نهاده و وجود تشنه ام را جرعه ای از علم و معرفت حیات بخشیدی.

به اتمام رساندن این تحقیق را مدیون مساعدت های افراد بی شماری هستم که با اهداء صمیمانه ترین سپاس ها، به حکم ادب مراتب قدردانی خود را ابراز می دارم.

از حمایت های پدر و مادرم که هر چه شور و شوق و آرزو در دل دارند، به من بخشیدند و هر آنچه دارم پس از خدا مدیون بزرگواری و صبوری این عزیزان است، بی نهایت سپاسگزارم.

زحمات و تلاش های ارزنده و بی شائبه استاد راهنمای محترم، جناب آقای دکتر امینی که بدون تردید شاگردی ایشان یکی از بزرگترین افتخارات زندگی من است را خالصانه ارج نهاده، کمال تشکر را دارم.

از استاد مشاور عزیزم، سرکار خانم دکتر سعدی که با دقت نظر در تمامی مراحل تحقیق وقت گرانبهایشان را صرف راهنمایی من نموده، صمیمانه سپاسگزارم.

در پایان از تمامی دوستان عزیزم که هر کدام با وجودشان، کلامشان و حمایت هایشان این دوره را برایم خاطره انگیز ساختند، تشکر می کنم.

با تشکر

لیلا کرامتی

اسفند ۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به توصیف طیفی رادیکال ژاکوبسن جبر باناخ A برحسب چند پارامتر طیفی پرداخته می شود. به خصوص نشان داده می شود که برای عضو وارون ناپذیر a متعلق به جبر باناخ A، اگر تعداد عناصر موجود در طیف ax به ازای هر x متعلق به یک همسایگی دلخواه از همانی، کمتر یا مساوی تعداد عناصر موجود در طیف x باشد، آنگاه a به رادیکال ژاکوبسن جبر باناخ A تعلق دارد. همچنین توصیف‌هایی طیفی از اسکالرها، یعنی مضارب یکه جبر باناخ A، ارائه می شود. نشان داده می شود که هرگاه عضو a متعلق به جبر باناخ نیم‌ساده A دارای این ویژگی باشد که تعداد عناصر موجود در طیف ax به ازای هر x متعلق به یک همسایگی دلخواه از همانی، کمتر یا مساوی تعداد عناصر موجود در طیف x باشد، آنگاه a مضربی از همانی است. به علاوه، توصیف طیفی جدیدی از جبرهای باناخ جابه‌جایی ارائه خواهد شد. به خصوص، نشان داده می شود جبر باناخ A جابه‌جایی است اگر و تنها اگر تعداد اعضای موجود در طیف، تحت همه جایگشت‌های سه‌تایی از عناصر متعلق به یک همسایگی از همانی، ثابت بماند.

این پایان‌نامه براساس مرجع‌های اصلی [9] و [10] تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی : جبر باناخ، رادیکال ژاکوبسن، طیف، مضرب همانی، شبه پوچ‌توان، نیم‌ساده، جابه‌جایی

فهرست مندرجات

مقدمه

برای یک جبر باناخ مختلط یکدار A، یکی از مفاهیم مهم و آشنا رادیکال ژاکوبسن [1] است که بنا به تعریف اشتراک هسته نمایش‌های تحویل‌ناپذیر پیوسته روی A یا به طور معادل اشتراک ایده‌آل‌های ماکسیمال چپ (راست) از A است. توجه به مبحث رادیکال ژاکوبسن به خاطر نقشی که در پیوستگی خودکار همریختی‌های جبر باناخ (به عنوان مثال مساله برد چگال) دارد، حائز اهمیت است. می دانیم برای جبر باناخ A یک توصیف شناخته شده از رادیکال A که با $Rad(A)$ نمایش داده می شود عبارت است از:

$$Rad(A) = \{a \in A : \ \sigma(ax) = \{0\} \ , \ \forall x \in A\}$$

که در حقیقت یک توصیف طیفی ضربی برای رادیکال است (در اینجا $\sigma(.)$ نمایانگر طیف می باشد). همچنین هر عضو $Rad(A)$ یک عضو شبه پوچ‌توان A است. در حالتی که A جابه‌جایی باشد مجموعه اعضای شبه پوچ‌توان که با نماد $QN(A)$ نشان داده می شود، همان $Rad(A)$ است. در [17] شرایط کلی‌تری که تحت آن این دو مجموعه یکی هستند بررسی شده است. شاید مهمترین توصیف طیفی رادیکال ژاکوبسن نتیجه بدست آمده توسط زِمانک [2] و اُپتیت [3] در [6] و [17] باشد که بر اساس آن عضو $a \in A$ به رادیکال A تعلق دارد اگر و تنها اگر $\sigma(a+x) = \sigma(x)$ برای هر $x \in A$، که این نیز معادل است با اینکه $\rho(a+x) = 0$ برای هر عضو شبه پوچ‌توان $x \in A$ که در حقیقت توصیف‌های طیفی جمعی برای $Rad(A)$ هستند. جالب توجه است که مدتها قبل از ارائه توصیف‌های جمعی

[1] Jacobson

[2] Zemanek

[3] Aupetit

برای رادیکال، توصیف‌های ضربی (البته با توجه کمتری) مطرح شده بودند. زِمانک، محک جمعی $\rho(a+x)=0$ برای هر عضو شبه پوچ‌توان $x\in A$ را با محک ضربی $\rho(ax)=0$ برای هر x در A، مقایسه کرد و بیان کرد که در محک ضربی نمی توان x را به عناصر متعلق به $QN(A)$ محدود کرد. زیرا طبق استدلال زمانک، اگر داشته باشیم $Rad(A)=\{a\in A:\quad \rho(ax)=0\quad ,\forall x\in QN(A)\}$، آنگاه برای جبرهایی با $QN(A)=\{0\}$ مانند A، باید داشته باشیم $Rad(A)=A$ که این امکان پذیر نمی باشد.[10]

بنابراین سوالی که پیش می آید این است که در توصیف ضربی رادیکال ژاکوبسن، تحت چه شرایطی می توان x را محدودتر کرد؟

شاید اولین قدم در این راستا توصیف زیر باشد که در [18] آمده است.

$$Rad(A)=\{a\in A:\quad \sigma(ax)=\{0\}\quad ,\forall x\in \mathbf{1}+QN(A)\}$$

در این پایان نامه سعی بر ارائه توصیف‌های طیفی ضربی برای رادیکال ژاکوبسن و همچنین شناسایی مضارب یکه و شناسایی جبرهای باناخ جابه‌جایی برحسب پارامترهای طیفی است.

ساختار پایان‌نامه که مرجع‌های اصلی آن [9] و [10] می باشد، در یک نگاه کلی به شرح زیر است:

در فصل اول به مقدمات و پیش نیازهای لازم از جبرهای باناخ و C^*-جبرها، توابع زیرهمساز و مفهوم ظرفیت پرداخته و بعضی از نمادهای مورد نیاز معرفی می شوند.

در فصل دوم، ابتدا در بخش دوم توصیف‌های طیفی جمعی رادیکال ژاکوبسن مطرح می شوند. سپس در بخش سوم، به توصیف طیفی ضربی رادیکال برحسب پارامترهای طیفی نظیر شعاع طیفی، عدد اصلی طیف، آرگومان طیف و ... پرداخته خواهد شد و مثال‌هایی که ضرورت فرضیات را نشان می دهد ارائه می کنیم. نشان داده می شود برای عضو وارون ناپذیر a متعلق به جبر باناخ A، اگر تعداد عناصر موجود در طیف ax به ازای هر x متعلق به یک همسایگی دلخواه از همانی، کمتر یا مساوی تعداد عناصر موجود در طیف x باشد، آنگاه a به رادیکال ژاکوبسن جبر باناخ A تعلق دارد.

در فصل سوم در ادامه کار انجام شده در فصل دوم، مضارب یکه جبر باناخ A برحسب پارامترهای طیفی ذکر شده، مورد بررسی قرار می گیرند و همچنین به ارائه مثال‌هایی مرتبط با موضوع می پردازیم. نشان داده می شود که هرگاه برای عضو a در جبر باناخ نیم‌ساده A، تعداد عناصر موجود در طیف ax به ازای هر x متعلق به یک همسایگی دلخواه از همانی، کمتر یا مساوی تعداد عناصر موجود در طیف x باشد، آنگاه a مضربی از همانی است.

در فصل چهارم به بررسی عناصر پایای ضربی تحت پارامترهای شعاع طیفی، نرم و آرگومان پرداخته و طیف چنین عناصری را تحلیل می کنیم. نشان داده می شود برای جبر باناخ A و $a \in A$، اگر برای هر x متعلق به جبر A، $\rho(ax) = \rho(x)$ در این صورت یا $\sigma(a) \subseteq S(۰, ۱)$ و یا $\sigma(a) = \overline{B(۰, ۱)}$.
به خصوص، هرگاه A یک C^*-جبر باشد $\sigma(a) \subseteq S(۰, ۱)$ و عضو a یکانی است.

در فصل پنجم توصیف طیفی جدیدی از جبرهای باناخ جابه‌جایی بیان می کنیم. به ویژه خواهیم دید جبر باناخ A جابه‌جایی است اگر و تنها اگر تعداد اعضای موجود در طیف، تحت همه جایگشت‌های سه‌تایی از عناصر متعلق به یک همسایگی از همانی، ثابت بماند.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل، بعضی از تعاریف و قضایای اساسی مربوط به جبرهای باناخ و C^*-جبرها، توابع زیرهمساز و مفهوم ظرفیت که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت، مطرح می شود.

در این پایان‌نامه، جبر باناخ A یک جبر مختلط یکدار با عضو یکه $\mathbf{1}$ می باشد.

مرجع‌های اصلی این فصل [3]، [9]، [10] و [16] می باشند.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فضای برداری A روی میدان اعداد مختلط، یک جبر مختلط نامیده می شود هرگاه به همراه ضربی برای هر $x,y,z \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

الف) $x(yz) = (xy)z$،

ب) $(x+y)z = xz + yz$،

ج) $x(y+z) = xy + xz$،

د) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

تعریف ۲.۲.۱ فضای برداری نرم‌دار کامل، فضای باناخ نامیده می شود.
به عبارت دیگر $(X, \|.\|)$ فضای باناخ است هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم جبر مختلط A به همراه نرم $\|.\|$ یک فضای باناخ باشد و به علاوه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$، آنگاه A یک جبر باناخ نامیده می شود. اگر برای هر دو عضو دلخواه $x, y \in A$، داشته باشیم $xy = yx$ آنگاه A را یک جبر باناخ جابه‌جایی می نامند. هرگاه A یکه ضربی داشته باشد، آن را جبر باناخ یکدار گوییم و یکه A با $\mathbf{1}$ نشان داده می شود. در این صورت عضو x از A وارون پذیر نامیده می شود هرگاه عضوی مانند y از A موجود باشد طوری که $xy = yx = \mathbf{1}$. عضو y یکتاست، آن را وارون x نامیم و با $x^{-۱}$ نمایش می دهیم. به علاوه مجموعه تمام عناصر وارون پذیر جبر باناخ یکدار A، با $G(A)$ نشان داده می شود.

مثال ۱.۲.۱ فرض کنیم K فضای هاسدورف فشرده باشد. در این صورت $C(K)$، فضای باناخ توابع پیوسته مختلط مقدار روی K، با ضرب نقطه‌وار و سوپریمم نرم یک جبر باناخ جابه‌جایی یکدار است.

بدیهی است هر زیرجبر بسته از $C(K)$، برای فضای هاسدورف فشرده K، خود یک جبر باناخ است. به عنوان مثال برای زیرمجموعه فشرده K از صفحه مختلط، جبر $A(K)$ متشکل از توابع پیوسته روی K و تحلیلی روی درون K، زیرجبر بسته ای از $C(K)$ و یک جبر باناخ جابه‌جایی یکدار است. در حالتی که $K = D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ۱\}$، $A(K)$ جبر قرصی نامیده می شود.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $B(X)$، جبر عملگرهای خطی کراندار روی X، با عمل ترکیب به عنوان ضرب و نرم عملگری یک جبر باناخ غیر جابه‌جایی یکدار است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و N زیر فضای بسته ای از X باشد. فضای خارج قسمتی X/N همراه با نرم خارج قسمتی

$$\|x + N\| = \inf\{\|x + y\| : \ y \in N\}$$

یک فضای نرم‌دار است و اگر X باناخ باشد X/N نیز باناخ است.

همواره می توان یک جبر باناخ بدون یکه مانند A را در یک جبر باناخ یکدار به صورت $A_{\mathbf{1}} = A \oplus \mathbb{C}$ با عمل‌های

$$(x,\alpha) + (y,\beta) = (x+y, \alpha+\beta)\ ,\ \lambda(x,\alpha) = (\lambda x, \lambda\alpha)\ ,\ (x,\alpha).(y,\beta) = (xy+\beta x+\alpha y, \alpha\beta)$$

و نرم $\|(x,\alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$ نشاند. عضو $(۰,۱)$ یکه $A_۱$ است. به وضوح $A_۱$ جابه‌جایی است اگر وتنها اگر A جابه‌جایی باشد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار با یکه $\mathbf{1}$ و x عضوی در A باشد. در این صورت مجموعه

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\quad \lambda\mathbf{1} - x \notin G(A)\}$$

را طیف x در A می نامند.

با توجه به اینکه هر جبر باناخ غیریکدار مانند A را می توان در یک جبر باناخ یکدار مانند $A_{\mathbf{1}}$ نشاند، برای عضو x در جبر باناخ غیریکدار A، طیف x در A به عنوان طیف x در یکدار شده A یعنی $A_{\mathbf{1}}$ تعریف می شود.

تذکر ۱.۲.۱ در حالت کلی طیف یک عضو در یک جبر باناخ یکدار با طیف آن در یک زیرجبر بسته (یکدار) آن متفاوت است. اگر $B \subseteq A$ یک زیرجبر بسته از جبر باناخ A شامل یکه A باشد آنگاه به ازای هر $x \in B$، $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.

از این پس هرگاه ابهامی پیش نیاید برای طیف عضو x از جبر باناخ A به جای $\sigma_A(x)$ نماد $\sigma(x)$ به کار برده می شود. همچنین منظور از $\sigma'(x)$، $\sigma(x) \setminus \{۰\}$ است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت عناصری که طیف آنها فقط از صفر تشکیل شده است، عناصر شبه پوچ‌توان جبر باناخ A نامیده می شوند. مجموعه چنین عناصری با $QN(A)$ نشان داده می شود.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و x عضوی در A باشد. شعاع طیفی x در A که با نماد $\rho(x)$ نشان داده می شود عبارت است از

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(x)\} = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(x)\}$$

قضیه ۱.۲.۱ [3, Thm. 3.2.8] فرض کنیم A یک جبر باناخ و x عضوی در A باشد. در این صورت

الف) $\sigma(x)$ فشرده و غیرتهی است،

ب) برای $\lambda \in \sigma(x)$، $|\lambda| \leq \|x\|$،

ج) $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و x عضوی در A باشد. قطر طیفی x در A که با نماد $\delta(x)$ نشان داده می شود عبارت است از

$$\delta(x) = \max\{|\lambda_1 - \lambda_2| : \ \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(x)\}$$

تعریف ۸.۲.۱ برای $K \subseteq \mathbb{C}$ تعداد عناصر متمایز مجموعه K را با $\#K$ و مجموعه آرگومان‌های اصلی عناصر غیرصفر مجموعه K را با $Arg\ K$ نشان می دهیم. بنابراین برای $K \subseteq \mathbb{C}$ خواهیم داشت $Arg\ K \subseteq (-\pi, \pi]$ و هرگاه $K = \{0\}$، $Arg\ K = \emptyset$.

لم ۱.۲.۱ [3, Cor. 3.4.12] فرض کنیم f یک تابع تحلیلی روی دامنه D از صفحه مختلط به توی جبر باناخ A باشد. هرگاه برای هر $\lambda \in D$، داشته باشیم $\sigma(f(\lambda)) \subset \mathbb{R}$، آنگاه $\sigma(f(\lambda))$ روی D ثابت است.

لم ۲.۲.۱ (ژاکوبسن[۱]) [3, Lem. 3.1.2] فرض کنیم A یک جبر یکدار و x, y دو عضو دلخواه در A باشند. آنگاه برای هر λ مختلط و مخالف صفر، $\lambda\mathbf{1} - xy$ در A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\lambda\mathbf{1} - yx$ در A وارون پذیر باشد.

[۱] Jocobson

بنابراین در جبر باناخ A، برای هر $x,y\in A$ داریم $\sigma(xy)\bigcup\{0\}=\sigma(yx)\bigcup\{0\}$ و در نتیجه برای هر $x,y\in A$، $\rho(xy)=\rho(yx)$.

قضیه ۲.۲.۱ (نگاشت طیفی) [3, Thm. 3.3.3] فرض کنیم A یک جبر باناخ و x عضو دلخواهی در A باشد. مجموعه باز Ω از صفحه مختلط شامل $\sigma(x)$ و خم هموار Γ که $\sigma(x)$ را در Ω احاطه می کند، در نظر می گیریم. در این صورت نگاشت زیر از $H(\Omega)$ (جبر توابع تحلیلی روی Ω) به A، که به صورت

$$f\to f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\quad d\lambda$$

تعریف می شود، دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$،

ب) $(f_1.f_2)(x)=f_1(x).f_2(x)=f_2(x).f_1(x)$،

ج) $\mathbf{1}=1(x)$ و $I(x)=x$ (هرگاه $I(\lambda)=\lambda$)،

د) $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))$.

قضیه ۳.۲.۱ [3, Thm. 3.3.5] فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار، x عضوی از A و α به $\sigma(x)$ تعلق نداشته باشد. در این صورت

$$dist(\alpha,\sigma(x))=\frac{1}{\rho((\alpha\mathbf{1}-x)^{-1})}$$

قضیه ۴.۲.۱ [3, Thm. 3.3.6] فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. هرگاه x عضو دلخواهی در A باشد که $\sigma(x)$ صفر را از بی‌نهایت جدا نکند (یعنی صفر در مولفه بی‌کران $\mathbb{C}\setminus\sigma(x)$ باشد)، آنگاه $y\in A$ وجود دارد طوری که $x=e^y$.

قضیه ۵.۲.۱ [16, Lem. 10.17] فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. برای $n=1,2,...$، $x_n\in G(A)$ و x یک نقطه مرزی $G(A)$ باشد. در این صورت اگر $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\|x_n^{-1}\|=\infty$.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. تابعک خطی χ روی A را کاراکتر نامیم هرگاه ضربی و ناصفر باشد. در حالتی که A یکدار باشد شرط آخر معادل با این است که $\chi(\mathbf{1}) = ۱$.
اگر χ یک کاراکتر روی جبر باناخ جابه جایی یکدار A باشد به راحتی می توان بررسی کرد که برای هر x در A، $\chi(x) \in \sigma(x)$. در نتیجه خواهیم داشت $|\chi(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$ و بنابراین هر کاراکتر، پیوسته است. مجموعه کاراکترها روی جبر باناخ A با نماد $\triangle(A)$ نشان داده می شود.

لم ۳.۲.۱ [3, Thm. 4.1.2] فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی یکدار باشد. آنگاه برای هر $x \in A$، $\sigma(x) = \{\chi(x) : \quad \chi \in \triangle(A)\}$.

لم ۴.۲.۱ [16, Thm. 11.23] فرض کنیم A یک جبر باناخ و x, y دو عضو دلخواه در A باشند طوری که $xy = yx$، آنگاه $\sigma(x+y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y)$ و $\sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)$.

لم ۵.۲.۱ [3, Cor. 3.2.10] فرض کنیم A یک جبر باناخ و x, y دو عضو دلخواه در A باشند طوری که $xy = yx$، آنگاه $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ و $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم K زیرمجموعه فشرده ای از صفحه مختلط باشد. در این صورت

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C} : \ |p(z)| \leq \max_{u \in K} |p(u)| \ \ , \ \forall p \in P_\circ(K)\}$$

که در آن $P_\circ(K)$ جبر چندجمله ای‌های مختلط روی K است. در واقع دیده می شود که $\hat{K}$ برابر است با اجتماع K و مولفه های کراندار $\mathbb{C} \setminus K$.

پیش از بیان قضیه بعد لازم به ذکر است که برای جبر باناخ A مولفه همبندی $G(A)$ که شامل یکه A است با $G_۱(A)$ نمایش داده می شود.

قضیه ٦.۲.۱ [3, Thm. 3.3.7] فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت $G_۱(A)$ برابر است با مجموعه همه حاصل‌ضرب‌های متناهی به شکل $e^{x_۱}...e^{x_n}$ که در آن $x_۱, ..., x_n \in A$.

لم ٦.۲.۱ [3, Lem. 3.1.1] فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد. در این صورت هر ایده‌آل چپ (راست) از A را می توان در یک ایده‌آل ماکزیمال چپ (راست) از A نشاند.