بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

براي دريافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد

رشته‌ی رياضي کاربردی

عنوان :

بررسی وجود جواب‌های موضعی و مثبت برای معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل

استاد راهنما:

دکتر محمد جهانشاهی

استاد مشاور:

دکتر شهرام رضاپور

پژوهشگر:

جواد مردوخی

شهریور /۱۳۹۲

تبریز/ ایران

تقدیم به

مادرم

که مقدس‌ترین واژه در لغت‌نامه دلم است

سپاس‌گزاری

من بی تو دمی قرار نتوانم کرد　　احسان تو را شمار نتوانم کرد
گر بر تن من زفان شود هر مویی　　یک شکر تو از هزار نتوانم کرد.

ابتدا لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوار و عزیزم، جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم که با راهنمایی‌ها و قرار دادن بی‌دریغ دانش و تجربه ارزنده خویش در اختیارم، توانستم این مجموعه را به پایان برسانم.
تشکرات قلبی خود را به جناب آقای دکتر شهرام رضاپور، که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را متقبل شدند و در محضر ایشان نکته‌ها آموختم، تقدیم می‌کنم.
از استاد گرامی و ارجمند، جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که زحمت داوری را تقبل فرمودند و از پیشنهادات و انتقادات ایشان نهایت استفاده را برده‌ام نیز سپاس‌گزارم.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان پر مهر پدر و مادرم که حامیان همیشگی‌ام در راه پایان‌ناپذیر کسب علم و دانش بوده‌اند.

جواد مردوخی
شهریور ۱۳۹۲
تبریز / ایران
mardookhi_javad@hotmail.com

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا مفاهیم مشتق و انتگرال کسری به ترتیب از نوع ریمان-لیوویل و کاپوتو ارایه می‌گردد و خاصیت‌های مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری بیان و اثبات می‌گردند. سپس در ادامه نظریه وجود جواب‌های مثبت دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل کسری که شامل مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل می‌باشند را با استفاده از مباحث فضاهای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت ارایه می‌کنیم.

در نهایت وجود جواب‌های مثبت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را با استفاده از نظریه فضاهای باناخ مرتب شده و مخروط نرمال ارایه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضاهای باناخ، نقطه ثابت، مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل، مخروط ، عملگرهای فشرده.

پیشگفتار

نظریه نقاط ثابت یکی از شاخه‌های مهم در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در ریاضیات و همچنین در سایر علوم دارد. از مسائل عمده ای که در این شاخه با آن روبرو هستیم، وجود نقطه ثابت و پیدا کردن آن در صورت وجود است. قضیه نقطه ثابت براوور [۱] و قضیه نقطه ثابت باناخ [۲] از جمله قضایای بنیادی این شاخه هستند.

در سال ۱۹۱۲ براوور ثابت کرد اگر خودنگاشتی پیوسته از یک گوی یکه از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم، آنگاه این نگاشت یک نقطه ثابت دارد. این قضیه که به قضیه نقطه ثابت براوور معروف است، در سایر زمینه‌ها نظیر نظریه بازیها، اقتصاد، سیستم‌های دینامیکی و غیره کاربردهای فراوانی دارد که برای مطالعه می توان به [۱] و [۵] مراجعه کرد.

شاودر [۳] در سال ۱۹۳۰ با قرار دادن یک مجموعه فشرده محدب از یک فضای باناخ به جای گوی یکه، قضیه براوور را تعمیم داد. در سال ۱۹۴۱، تعمیم قضیه نقطه ثابت براوور روی چندتابعی ها توسط کاکوتانی [۴] صورت گرفت. سال ۱۹۵۱ دوگندجی [۵] ثابت کرد که گوی یکه بسته در فضای نرمدار، یک فضای نقطه ثابت است اگر و فقط اگر آن گوی فشرده باشد. نوعی دیگر از تعمیم قضیه براوور روی فضاهای جزئاً مرتب در سال ۱۹۵۵ توسط تارسکی [۶] صورت گرفت.

در فصل اول به مفاهیم و قضایای اصلی که پیش‌نیاز فصل‌های آتی نیز می‌باشد پرداخته‌ایم. فصل دوم را به حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری اختصاص داده‌ایم و در آن مفاهیم مشتق و انتگرال کسری از جمله مشتق و انتگرال ریمان–لیوویل و همچنین مشتق کاپوتو را معرفی کرده و به بررسی وجود این نوع مشتقات و انتگرال‌ها بر روی توابع خواهیم پرداخت. فصل سوم به معادلات دیفرانسیل کسری

[۱] Brouwer

[۲] Banach

[۳] Schauder

[۴] Kakutani

[۵] Dugundji

[۶] Tarski

با مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل اختصاص دارد. در این فصل به بررسی وجود جواب‌های مثبت این نوع معادلات می‌پردازیم و برای این منظور از یک فضای باناخ مانند X و یک مخروط در این فضای باناخ مانند K استفاده خواهیم نمود، سپس عملگری را به صورت $T : K \longrightarrow K$ تعریف نموده و در نهایت از فشردگی این عملگر و قضایای نقطه ثابت برای جستجو جواب‌های مثبت استفاده خواهیم نمود. در فصل چهارم به دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل می‌پردازیم و جواب‌های مثبت برای این دستگاه‌ها را با استفاده از مفهوم نقطه ثابت و مخروط‌های نرمال جستجو خواهیم نمود.

این پایان‌نامه بیشتر بر اساس [۲۱]،[۱۳]،[۴۱]،[۱۲] تهیه و تنظیم شده است.

فصل ۱

قضایا وتعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

این فصل را به مفاهیم بنیادین و قضایای اصلی اختصاص داده‌ایم که به عنوان پیش نیاز فصل‌های آتی نیز می‌توان از آن نام برد. در بخش اول به مفهوم یک معادله دیفرانسیل و بحث در مورد جواب یا جواب‌های آن پرداخته‌ایم و مهمترین قسمت آن ارتباط بین جواب یک مساله مقدار اولیه با یک معادله انتگرالی می‌باشد که انگیزه استفاده از مفهوم نقطه ثابت در حل معادلات دیفرانسیل را روشن می‌کند. در بخش دوم به معرفی معادلات انتگرالی و در بخش سوم مفاهیمی از آنالیز حقیقی مانند هم‌پیوستگی و قضیه آرزلا-آسکولی را بیان کرده‌ایم. بخش چهارم به فضاهای باناخ اختصاص داشته و در بخش پنجم به طور تقریبا مفصلی نگاهی تاریخی و تحلیلی به مفهوم نقطه ثابت، شاخه‌ها و قضایای اصلی آن انداخته‌ایم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۱. اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، معادله‌ای که شامل تابع f و مشتقات آن نسبت به متغیر x باشد را یک معادله دیفرانسیل عادی و یا به اختصار معادله دیفرانسیل می‌نامیم.
اگر f یک تابع دو متغیره و یا بیشتر باشد، معادله‌ای که شامل f و مشتقات جزئی آن باشد را یک معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامیم.

به عبارت ساده‌تر می‌توانیم بگوییم که یک معادله دیفرانسیل، رابطه‌ای است که بین تابع مجهول y و مشتقات آن برقرار است.

در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n بصورت زیر نشان داده می‌شود.

$$F(x, y, y', y^{۲}, ..., y^{n}) = ۰ \tag{۱.۱}$$

هر گاه بتوان y^n را بصورت صریح بر حسب $x, y, y', y^{n-۱}$ نوشت، آنگاه می‌توان معادله (۱.۱) را بصورت

$$y^n = f(x, y, y', ..., y^{n-۱}) \tag{۲.۱}$$

نشان داد. معادله (۲.۱) حالت استاندارد (۱.۱) است.
فرض کنید f تابعی حقیقی و پیوسته روی $D \subset \mathbb{R}^{n+۱}$ باشد. منظور از جواب معادله (۲.۱) روی J که $J \subseteq D$، تابعی حقیقی مانند ϕ است که روی J تعریف شده و $\phi \in C^n(J)$ باشد، به طوری که برای هر $x \in J$ داشته باشیم

$$(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{n-۱}(x)) \in D$$

و

$$\phi^n(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{n-۱}(x))$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $(x_۰, c_۱, c_۲, ..., c_n) \in D$ باشد. مسئله مقدار اولیه مربوط به معادله مرتبه nام (۲.۱) بصورت زیر می‌باشد.

$$y^n = f(x, y, y', ..., y^{n-۱}),$$

$$y(x_۰) = c_۱, \quad y'(x_۰) = c_۲, \; ... \; , y^{n-۱}(x_۰) = c_n \tag{۳.۱}$$

تعریف ۳.۱. تابع ϕ جواب مسئله مقدار اولیه (۳.۱) است اگر ϕ جواب معادله (۲.۱) بوده و در شرایط

$$\phi(x_۰) = c_۱, \quad \phi'(x_۰) = c_۲, \; ... \; , \phi^{n-۱}(x_۰) = c_n \tag{۴.۱}$$

صدق کند.
یکی از دلایل مهم مطالعه سیستم‌ها آن است که هر معادله مرتبه nام را می‌توان بصورت یک سیستم n معادله‌ای مرتبه اول تبدیل کرد. برای مشاهده این مطلب، n متغیر جدید $y_۱, y_۲, ..., y_n$ را بصورت

$$y_۱ = y, \quad y_۲ = y', \; ... \; , y_n = y^{n-۱}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، معادله مرتبه nام (۲.۱) بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} y'_۱ &= y_۲ \\ y'_۲ &= y_۳ \\ &\vdots \\ y'_n &= f(x, y_۱, y_۲, ..., y_n) \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

بیان هم‌ارزی معادله مرتبه nام (۲.۱) و سیستم معادلات (۵.۱) به صورت زیر است.

قضیه ۴.۱. [۹] *هرگاه $\phi(x)$ یک جواب معادله مرتبه nام (۲.۱) باشد، در این صورت، توابع*

$$\phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{n-۱}(x)$$

یک مجموعه جواب برای (۵.۱) هستند. برعکس، اگر توابع $\phi_۱(x), ..., \phi_n(x)$ یک مجموعه جواب برای (۵.۱) باشند، آنگاه $\phi(x) = \phi_۱(x)$ یک جواب برای معادله مرتبه nام (۲.۱) است.

حال می‌توان قضیه وجود و منحصر بفردی جواب را برای معادله مرتبه nام (۲.۱) با استفاده از سیستم معادلات (۵.۱) بصورت زیر بیان کرد.

قضیه ۵.۱. [۹] *فرض کنید D دامنه‌ای در $\mathbb{R}^{n+۱}$ و $f(x, y_۱, ..., y_n)$ تابعی باشد که روی D تعریف شده و پیوسته است و در شرط لیپ‌شیتس با ثابت L صدق می‌کند. همچنین، فرض کنید $(x_۰, c_۱, ..., c_n)$ یک نقطه درونی[1] در D باشد و ناحیه*

$$S = \{(x, y_۱, ..., y_n) : \ |x - x_۰| \leq a, |y_۱ - c_۱| \leq b_۱, ..., |y_n - c_n| \leq b_n\}$$

کاملا در داخل D قرار بگیرد. در این صورت، مسئله مقدار اولیه (۳.۱) دارای جواب منحصر بفردی روی بازه $[x_۰ - h, x_۰ + h]$ است.

در پایان این بخش یک لم اساسی بیان و اثبات میشود که رابطه بین جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه

$$y' = f(x, y), \qquad y(\tau) = \xi \tag{۶.۱}$$

و معادله انتگرالی

$$\phi(x) = \xi + \int_\tau^x f(s, \phi(s))ds \tag{۷.۱}$$

[1] Interior point

را نشان می‌دهد که ایده اصلی استفاده از مفهوم نقطه ثابت و عملگرهای انتگرال نیز می‌باشد و در فصل ۳ به تفصیل در مورد آن بحث خواهد شد. برای آشنایی با معادلات انتگرالی بخش بعد را به این گونه معادلات اختصاص داده‌ایم.

لم ۶.۱. [۹] *فرض کنید $f \in C(D)$ و (τ, ξ) یک نقطه درونی D بوده، به طوری که $\tau \in J$ باشد. در این صورت، ϕ یک جواب مساله مقدار اولیه (۶.۱) روی بازه $[a,b]$ با شرط اولیه $\phi(\tau) = \xi$ است اگر و تنها اگر ϕ یک جواب معادله انتگرالی (۷.۱) روی بازه $[a,b]$ باشد.*

برهان. اگر ϕ جوابی از مساله مقدار اولیه (۶.۱) روی $[a,b]$ باشد، آنگاه $\phi(\tau) = \xi$ و

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$\int_\tau^x \phi'(s)ds = \int_\tau^x f(s, \phi(s))ds.$$

در نتیجه، داریم

$$\phi(x) - \phi(\tau) = \int_\tau^x f(s, \phi(s))ds$$

یا

$$\phi(x) = \xi + \int_\tau^x f(s, \phi(s))ds$$

لذا ϕ جواب معادله انتگرالی (۷.۱) است.

برعکس: فرض کنید ϕ جواب معادله (۷.۱) باشد. پس $\phi(\tau) = \xi$ و با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

بنابراین، ϕ جواب مساله مقدار اولیه (۶.۱) روی $[a,b]$ است. □

۳.۱ معادلات انتگرال فردهلم و ولترا

تعریف ۷.۱. معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال خواهد بود.

معادلات دیگری نیز وجود دارند با نام معادلات دیفرانسیل انتگرالی، که به تعریف آنها اکتفا خواهیم کرد.

تعریف ۸.۱. معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می‌باشند.

*معادلات انتگرالی به دو نوع معادلات انتگرال **ولترا**[۲] و معادلات انتگرال **فردهلم**[۳] تقسیم می‌شوند که در ادامه به آنها می‌پردازیم.*

تعریف ۹.۱. شکل استاندارد معادله انتگرال خطی ولترا بصورت

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ u(t)dt \qquad (8.1)$$

می‌باشد که در آن $x \in \mathbb{R}$، λ مقدار ثابت و $u(x)$ تابع مجهول معادله انتگرال بوده و زیر علامت انتگرال بصورت خطی ظاهر می‌شود. در صورتی که $f(x) = 0$، معادله انتگرال همگن و در غیر اینصورت ناهمگن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. معادله انتگرال ولترا با توجه به مقدار $\varphi(x)$ در معادله بالا به دو گروه اصلی تقسیم بندی می‌شوند.

۱) *زمانی که $\varphi(x) = 0$ باشد.*

در این حالت معادله (۸.۱) بصورت

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ u(t)dt = 0$$

تبدیل می‌گردد و به معادله انتگرال ولترای نوع اول معروف است، که در این حالت مجهول معادله فقط زیر علامت انتگرال وجود دارد.

۲) *زمانی که $\varphi(x) \neq 0$ باشد.*

در این صورت معادله (۸.۱) با تقسیم طرفین تساوی بر تابع $\varphi(x)$ بصورت

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k_1(x,t)\ u(t)dt$$

تبدیل گشته که در آن $g(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ و $k_1(x,t) = \frac{k(x,t)}{\varphi(x)}$ و به معادله انتگرال ولترای نوع دوم معروف است و مجهول معادله علاوه بر زیر علامت انتگرال در خارج آن نیز وجود دارد.

تعریف ۱۱.۱. شکل استاندارد معادله انتگرال خطی فردهلم بصورت

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (9.1)$$

می‌باشد که در آن $u(x)$ تابع مجهول معادله انتگرال بوده و زیر علامت انتگرال بصورت خطی ظاهر می‌شود.

---

[۲] Volterra

[۳] Fredholm

معادله انتگرال فردهلم نیز بطور مشابه با توجه به مقدار $\varphi(x)$ در معادله (۹.۱) به دو گروه مهم تقسیم بندی می‌شوند.

۱) اگر $\varphi(x) = ۰$ باشد.

در نتیجه معادله (۹.۱)به شکل زیر درخواهد آمد

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t) = ۰$$

که به معادله انتگرال فردهلم نوع اول معروف است.

۲) اگر $\varphi(x) \neq ۰$ باشد.

در این صورت معادله (۹.۱) بصورت زیر خواهد بود.

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k_۱(x,t)\ u(t)dt$$

که به معادله انتگرال فردهلم نوع دوم معروف است.

قضیه ۱۲.۱. [۳۷] *اگر معادله انتگرال همگن $u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)$ تنها جواب بدیهی $u(x) = ۰$ داشته باشد، در این صورت معادله ناهمگن $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)dt$ تنها یک جواب دارد و بلعکس. اگر معادله همگن جواب غیر بدیهی داشته باشد، در این صورت معادله ناهمگن متناظر یا جواب ندارد و یا بینهایت جواب وابسته به تابع $f(x)$ دارد.*

قضیه ۱۳.۱. [۳۷] *اگر معادله همگن $u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)dt$ با هسته متقارن $k(x,t) = k(t,x)$، جواب یا جواب‌های غیر بدیهی $\{u_j(x)\}$ متناظر با $\lambda = \lambda_j$ داشته باشد، در این صورت معادله ناهمگن متناظر $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)dt$ یک جواب دارد اگرو تنها اگر*

$$\int_a^b f(x)\ u_j(x)dx = ۰$$

یعنی $f(x)$ بر توابع ویژه $u_j(x)$ متعامد باشد.

قضیه ۱۴.۱. [۳۷] *اگر معادله همگن $\psi(x) = \lambda \int_a^b k(t,x)\ \psi(t)dt$ جواب یا جواب‌های غیر بدیهی $\{\psi_j(x)\}$ داشته باشد که $\psi_j(x) = \lambda_j \int_a^b k(t,x)\ \psi_j(t)dt$.در این صورت معادله انتگرال ناهمگن*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)dt$$

یک جواب دارد اگر و تنها اگر

$$\int_a^b f(x)\ \psi_j(x)dx = ۰$$

۴.۱ مفاهیمی از آنالیز حقیقی

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید M یک مجموعه ناتهی باشد.$(M, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) به ازای هر $x \in M$، $x \leq x$.

۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$.

۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.
اگر علاوه بر شرایط بالا شرط زیر را هم داشته باشیم آنگاه $(M, \leq)$ یک مجموعه تماما مرتب نامیده می‌شود.

۴) به ازای هر دو عنصر دلخواه $x, y \in M$ داریم $x \leq y$ یا $y \leq x$.
به عبارت دیگر، در این وضع هر دو عنصر دلخواه x, y با یگدیگر قابل مقایسه‌اند.

تعریف ۱۶.۱. مجوعه P یک مجموعه محدب است اگر به ازای هر $x, y \in P$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in P$$

و تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ که $I \subseteq \mathbb{R}$، محدب است اگر به ازای هر $x, y \in I$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

تعریف ۱۷.۱. دنباله توابع (f_n) که $f_n : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ به تابعی مانند f همگرای یکنواخت است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$(وابسته به ε ولی نه به $x \in D$) وجود داشته باشد به قسمی که با ازای هر $n \geq K(\varepsilon)$ و $x \in D$ داشته باشیم

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

حد یک دنباله از توابع پیوسته مانند (f_n) ممکن است پیوسته نباشد به عنوان مثال اگر برای $n \in N$ و $x \in [۰, ۱]$ دنباله توابع را بصورت $f_n(x) = x^n$ در نظر بگیریم بدیهی است که f_n ها

پیوسته می‌باشند ولی حد این دنباله را اگر با f نشان دهیم خواهیم داشت

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$$

که در نقطه ۱ پیوسته نیست.
با ذکر این مثال قضیه زیر را خواهیم آورد که همگرایی یکنواخت دنباله توابع پیوسته برای تضمین پیوستگی تابع حد کافی است.

قضیه ۱.۱۸. [۷] *فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته به دامنه D باشد و فرض کنید این دنباله در D به تابع f همگرای یکنواخت باشد، در این صورت f در D پیوسته است.*

هم‌پیوستگی[۴]

هم‌پیوستگی یک خانواده از توابع، یعنی اعضای خانواده مثل هم پیوسته بوده و نمودار آنها شبیه هم باشد. در فصل سوم و چهارم برای اثبات فشردگی یک عملگر یا به عبارت دیگر خانواده‌ای از توابع به مفهوم هم‌پیوستگی نیاز خواهیم داشت. حال سوال اینجاست که هم‌پیوستگی چه ارتباطی با فشردگی می‌تواند داشته باشد.
مجموعه‌های فشرده در $\mathbb{R}^n$ طبق قضیه هانیه بورل دسته‌بندی شدند و همچنین در یک فضای متریک کلی مانند (Y,d) یک مجموعه فشرده بود اگر و تنها اگر کامل و کلا کراندار باشد. حال برای دسته‌بندی زیر مجموعه‌های فشرده از فضای $C(X)$ (فضای توابع پیوسته بر فضای متریک فشرده X) به هم‌پیوستگی نیاز خواهیم داشت.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید F خانواده‌ای از توابع مانند f باشد که از فضای متریک فشرده (X,d) به توی فضای متریک (Y,d') تعریف شده‌اند، در این صورت F را بر X هم‌پیوسته گوییم هر گاه:

$$\forall\, \varepsilon > ۰ \,\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)\ s.t\ f \in F\ ,\ x_۱, x_۲ \in X,\ \ d(x_۱, x_۲) < \delta \Rightarrow d'(f(x_۱), f(x_۲)) < \varepsilon$$

اگر F مجموعه تک عضوی $F = \{f\}$ بوده و F هم‌پیوسته باشد آنگاه f بطور یکنواخت پیوسته است. از طرفی با توجه به تعریف هم‌پیوستگی می‌توان ثابت کرد که هر خانواده متناهی از توابع پیوسته یکنواخت، هم‌پیوسته است.

[۴] equicontinuity

در ادامه به بررسی سه قضیه مهم خواهیم پرداخت که شرط هم‌پیوستگی برای آنها اساسی خواهد بود. البته لازم به ذکر است که مولفان متعددی از اسم‌گذاری‌های متفاوتی برای این سه قضیه استفاده نموده‌اند. در این جا ما اسم‌گذاری کتاب توپولوژی مانکرز[۵] را مبنا قرار داده‌ایم.
در قضیه بولتزانو داشتیم که هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}^n$ یک زیر دنباله همگرا دارد، قضیه زیر که منسوب به ریاضیدان ایتالیایی، سزار آرزلا[۶] می‌باشد، همتای بینهایت بعدی قضیه بولتزانو است.

قضیه ۱.۲۰. *(قضیه آرزلا)*
فرض کنید X فشرده بوده و به ازای $n = 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $f_n \in C(X)$ و خانواده $\{f_n\}$ بر X هم‌پیوسته و نقطه به نقطه کراندار باشند. در این صورت

۱) *(f_n) بر X به طور یکنواخت کراندار است.*

۲) *(f_n) شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.*

برهان. به [۳۱] رجوع شود. $\square$

قضیه ۱.۲۱. *(قضیه آسکولی)*
فرض کنید X فشرده باشد و همچنین فرض کنید $F \subseteq C(X)$. اگر $\overline{F}$ بستار F در $C(X)$ باشد در این صورت $\overline{F}$ فشرده است اگر و تنها اگر F هم‌پیوسته و نقطه به نقطه کراندار باشد.

برهان. به [۳۱] رجوع شود. $\square$

به عنوان یک فرع از قضیه بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که F فشرده است اگر وتنها اگر بسته، کراندار و همپیوسته باشد. بیشتر مولفان این فرع را قضیه آرزلا-آسکولی می‌نامند که ما به تبعیت از کتاب توپولوژی مانکرز، این اسم را برای قضیه بعدی نگاه داشته‌ایم.

قضیه ۱.۲۲. *(قضیه آرزلا-آسکولی)*
X فشرده و $F \subseteq C(X)$ را در نظر بگیرید. حال اگر F هم‌پیوسته و نقطه به نقطه کراندار باشد آنگاه

۱) *F کراندار کلی است.*

۲) *$\overline{F}$ فشرده است.*

و این دقیقا تعریف فشردگی نسبی یک خانواده از توابع است و در فصل سوم و چهارم برای فشردگی یک عملگر از این قضیه استفاده خواهد شد.

---

[۵] Munkres

[۶] Cesare Arzela

برهان. به رجوع شود.[۳۱]

□

۵.۱ فضاهای باناخ و عملگرهای خطی کراندار

تعریف ۲۳.۱. می‌گوییم دنباله (f_n) در یک فضای خطی نرم‌دار یک دنباله کوشی است هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده یک N وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای همه عددهای $n \geq N$ و $m \geq N$ داشته باشیم

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

تعریف ۲۴.۱. یک فضای خطی نرم‌دار، کامل گفته می‌شود هر گاه هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد. یعنی برای هر دنباله کشی (f_n) در این فضا یک عنصر f متعلق به این فضا وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$f_n \longrightarrow f$$

فضای باناخ یک فضای برداری نرم‌دار است که تحت متریک $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد.

تعریف ۲۵.۱. نگاشت T از یک فضای برداری X در یک فضای برداری Y یک نگاشت خطی یا یک عملگر خطی نامیده می‌شود هر گاه برای هر x_1, x_2 متعلق به X و همه عددهای حقیقی α_1, α_2 داشته باشیم

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

اگر X, Y فضاهای برداری نرم‌دار باشند عملگر خطی T را کراندار می‌گوییم هر گاه یک عدد ثابت M موجود باشد به گونه‌ای که برای همه x ها داشته باشیم

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

تعریف ۲۶.۱. مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y را با $B(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۷.۱. [۳۵] *فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی و X, Y فضاهای نرم‌دار باشند، آنگاه*

۱) *T پیوسته است اگر و تنها اگر کراندار باشد.*

۲) *اگر T در یک نقطه پیوسته باشد آنگاه T پیوسته است.*

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد.نگاشت $T : X \longrightarrow X$ لیپ‌شیتس[۷] نامیده می‌شود اگر یک ثابت مانند $K > ۰$ که ثابت لیپ‌شیتس نامیده می‌شود وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(T(x), T(y)) \leq K\ d(x,y)$$

اگر فضای مورد نظر یک فضای نرم‌دار هم باشد می‌نویسیم

$$\|T(x) - T(y)\| \leq K\ \|x - y\|$$

یک نگاشت لیپ‌شیتس با $k < ۱$ یک نگاشت انقباضی[۸] نامیده می‌شود.

۶.۱ نگاهی تحلیلی و تاریخی به مفهوم نقطه ثابت

نظریه نقطه ثابت یکی از شاخه‌های میان رشته‌ای در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در خود ریاضیات و سایر علوم دارد. این نظریه دارای سه مسئله عمده می‌باشد که عبارتند از: وجود نقطه ثابت، پیدا کردن آن در صورت وجود و ساختار مجموعه نقاط ثابت. این نظریه همچنین دارای سه زیر شاخه نسبتا مجزا در فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک و گسسته است. قضیه نقطه ثابت براور، اصل انقباض باناخ و قضیه نقطه ثابت تارسکی به ترتیب قضیه‌های بنیادی و نقطه آغاز هر یک از شاخه‌ها محسوب می‌شوند. در ادامه قضیه‌ها و نتایج کلاسیک در هر سه حوضه را به صورت خلاصه بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد.x را یک نقطه ثابت نگاشت T گویند هر گاه داشته باشیم

$$T(x) = x$$

همچنین مجموعه X را دارای خاصیت نقطه ثابت گوییم اگر هر تابع پیوسته روی آن دارای حداقل یک نقطه ثابت باشد. مجموعه همه نقاط ثابت T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Fix(T) = \{x \in X \ \mid T(x) = x\}$$

این نکته قابل توجه است که وجود نقطه ثابت برای نگاشت T با وجود ریشه برای یک نگاشت

[۷] Lipschitz

[۸] contraction map