بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

مشخص سازی R - دوگانی در فضاهای باناخ و پایداری g - باناخ قابها

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا عبداله پور

استاد مشاور:

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر:

اعظم یاری

خرداد ۹۳

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

مشخص سازی R – دوگانی در فضاهای باناخ و پایداری g – باناخ قابها

پژوهشگر:

اعظم یاری

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
دکتر محمدرضا عبداله پور	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	استادیار	
دکتر عباس نجاتی	استاد مشاور	دانشیار	
دکتر محمدرضا مطلبی	داور	استادیار	

خرداد ۹۳

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب اعظم یاری دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۱۲۲۴۰۳۱۳۵ که در تاریخ خرداد ۹۳ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "مشخص سازی R - دوگانی در فضاهای باناخ و پایداری g - باناخ قابها " دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: اعظم یاری

امضا

تاریخ

تقدیم به

تقدیم به منجی عالم بشریت،

مهدی موعود (عج) که با حضورش، هستی به آرامش می رسد.

تقدیم به پدر و مادرم مهربانم،

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایشان همه رنج بوده

و وجودشان برایم همه مهر.

تقدیم به همسرم،

اسطوره ی زندگیم پناه خستگیم و امید بودنم

و تقدیم به همه کسانی که در یکایک لحظه های زندگیم همراه و همدلم بوده اند.

سپاس گزاری...

ای هستی بخش، وجود مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست ذره ذره‌ی وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که در سایه‌ی الطاف الهی و استعانت پروردگار متعال پژوهش و نگارش این پایان‌نامه به اتمام رسید بر خویشتن واجب می‌دانم که مراتب شکر و قدردانی خود را به تمامی خوبانی که در این امر یاریم نمودند به جای آورم.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها، تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیرممکن بود.

از همسرم که سایه مهربانیش سایه‌سار زندگیم می‌باشد و با قلبی آکنده از عشق و معرفت، محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش را برای من فراهم آورده است و مرا در رسیدن به اهداف عالی یاری می‌رساند و در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از استاد صبور و مهربانم، آقای دکتر عبداله پور که با راهنمایی‌ها و کمک‌های دلسوزانه‌شان همواره امید و کوشش را در من زنده کرده‌اند نهایت سپاس و قدردانی را دارم، هرچند یقین دارم که خداوند متعال خود پاداش زحمات ایشان را به بهترین نحو عطا خواهد کرد.

از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر نجاتی که مشاوره پژوهش را بر عهده داشتند، سپاسگزارم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر مطلبی داور محترم که زحمت بازخوانی و بررسی این پایان‌نامه بر عهده ایشان بود، کمال تشکر را دارم.

اعظم یاری

نام خانوادگی: یاری نام: اعظم

عنوان پایان‌نامه:

مشخص سازی R – دوگانی در فضاهای باناخ و پایداری g – باناخ قابها

استاد راهنما: دکتر محمدرضا عبداله‌پور

استاد مشاور: دکتر عباس نجاتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع: خرداد ۹۳ تعداد صفحات: ۶۳

چکیده

در این پایان‌نامه، خاصیت R – دوگانی را در فضاهای باناخ مورد مطالعه قرار می‌دهیم و چند مشخص سازی از دنباله‌های R – دوگان در فضاهای باناخ را بدست می‌آوریم. از طرف دیگر در ارتباط با خاصیت R – دوگانی، فضای باناخی را معرفی می‌کنیم که برای آن فضا، پایه p – ریس با کرانهای بالا و پایین برابر یک، وجود نداشته باشد. نهایتا نتایجی را درباره‌ی پایداری g – باناخ قابها تحت آشفتگی بدست می‌آوریم.

کلیدواژه‌ها: g – باناخ قاب، پایداری، پایه‌های p – ریس، دوگانگی، R – دوگان‌ها، p – قاب‌ها، g – قاب.

فهرست

مقدمه

مفهوم قاب‌های گسسته برای فضای هیلبرت[1]، برای اولین بار توسط دافین[2] و شیفر[3] (۱۹۵۲) برای مطالعه‌ی مسائلی در زمینه‌ی سریهای فوریه‌ی[4] غیرهارمونیک تعریف شده است.

اخیرا تعمیمات مختلفی از قاب‌ها برای فضای هیلبرت معرفی شده است. تازه‌ترین این تعمیمات متعلق به سان[5] (۲۰۰۶) می‌باشد. در این تعمیم، سان خانواده‌ای از عملگرهای کراندار را روی فضاهای هیلبرت انتخاب کرده و این سیستم را یک قاب تعمیم یافته یا g – قاب نامیده است. اگر $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ یک g – قاب برای فضای هیلبرت H باشد، آنگاه هر $f \in H$ می‌تواند بصورت $f = \sum_{i\in J} \Lambda_i^* \Lambda_i S^{-1} f$ نمایش داده شود.

در مقالات (گروشنیگ[6] و همکاران، ۱۹۹۱) و (کاسازا[7] و همکاران، ۱۹۹۹) مفهوم قاب‌ها به فضاهای باناخ تعمیم داده شده است و g – باناخ قاب‌ها برای یک فضای باناخ X نسبت به یک BV – فضا در مقاله (عبداله پور[8] و همکاران، ۲۰۰۷) تعریف شده است. بالان[9] (۱۹۹۷)؛ فاویر [10]و همکاران (۱۹۹۵)؛ سان (۲۰۰۷) پایداری قاب‌ها را در فضای هیلبرت مورد مطالعه قرار داده‌اند. کنگ[11] (۲۰۰۴) ؛ زو[12] و همکاران (۲۰۰۲)؛ پاوان کومار [13]و همکاران (۲۰۰۷)؛ کریستنسن[14] و همکاران (۱۹۹۷)؛ جاین [15]و همکاران (۲۰۰۶) پایداری قاب‌ها را در فضاهای باناخ مورد بحث قرار داده‌اند.

در راستای تعمیم اصل دوگانی قاب‌های گابور کاسازا و همکارانش (۲۰۰۴) مفهوم R – دوگان دنباله‌های

---

[1] Hilbert
[2] Duffin
[3] Schaeffer
[4] Fourier
[5] Sun
[6] Grochenig
[7] Cassazza
[8] Abdollahpour
[9] Balan
[10] Favier
[11] Xu Rongcong
[12] Zhou
[13] Pawan Kumar
[14] Christensen
[15] Jain

معین در فضاهای هیلبرت را معرفی کردند. مشخص سازی‌های متفاوت از R – دوگانی، بوسیله‌ی کریستنسن و همکارانش (۲۰۱۱) بدست آمد. همچنین مفهوم R – دوگانها توسط خیائو[1] و زو (۲۰۰۹) برای فضاهای باناخ تعمیم داده شده است.

این پایان‌نامه براساس مقالات، بررسی پایداری g – باناخ قاب‌ها (وانگ گانگ، ۲۰۱۱) و مشخص سازی R – دوگانی در فضاهای باناخ (کریستنسن و همکاران، ۲۰۱۲) در سه فصل نوشته شده است که

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دوم پایداری g – باناخ قابها در فضاهای باناخ را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم مشخص سازی R – دوگانی در فضای باناخ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[1] Xiao

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. مجموعه‌ی X را یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ می‌نامند هرگاه برای هر $(x,y) \in X \times X$، یک بردار مانند $x + y \in X$ نظیر شود که دارای خواص زیر باشد

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $x + y = y + x$؛

(۲) به ازای هر $x, y, z \in X$، $x + (y + z) = (x + y) + z$؛

(۳) به ازای هر $x \in X$، عضو یکتایی مانند $0 \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ ؛}$$

(۴) به ازای هر $x \in X$، عضو یکتایی مانند $-x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \text{ ؛}$$

(۵) به هر زوج (α, x) که در آن $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، بردار $\alpha x \in X$ نظیر شود به‌طوری‌که $1.x = x$ و $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ و دو قانون پخش‌پذیری زیر به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ برقرار باشد.

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad , \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، X را فضای برداری مختلط، و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، X را فضای برداری حقیقی گوییم.

مثال ۱.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$، نمونه‌ای از یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را خطی می نامیم، هرگاه

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

تعریف ۳.۱.۱. اگر X و Y فضاهای برداری باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را ایزومورفیسم گوییم هرگاه f یک به یک، پوشا و خطی باشد، در این صورت فضای X و Y را ایزومورف گوییم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. یک نرم روی X، تابعی مانند $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است که دارای خواص زیر باشد

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$؛

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

(۳) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geqslant 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی X باشد، آنگاه $(X, \|.\|)$ یا به طور خلاصه X را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ در فضای نرمدار X را معادل گوییم هرگاه ثابت‌های k_1 و k_2 وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$،

$$K_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2\|x\|_1.$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد، نگاشت $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $0 \leqslant d(x,y) < \infty$ و $d(x,y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

(۳) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$؛

اگر d یک متر بر X باشد، (X, d) را یک فضای متری می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. اگر d یک متر بر مجموعه‌ی X باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X را یک دنباله‌ی کوشی گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح مثبت مانند N چنان موجود باشد که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

تعریف ۸.۱.۱. اگر d یک متر بر مجموعه‌ی X باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به نقطه‌ای از X مانند x همگرا گویند

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح مثبت مانند N چنان موجود باشد که برای هر $n \geq N$ داشته باشیم

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X به نقطه‌ای از X همگرا باشد آنگاه d را یک متر تام بر X می‌نامیم و (X, d) فضای متریک تام می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. اگر X یک فضای برداری باشد و به ازای هر $x, y \in X$، قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$، در این صورت d یک متر روی X خواهد بود. لذا هر فضای نرمدار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نرم، یک فضای کامل باشد. یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $1 \leqslant p < \infty$. در این صورت فضای

$$l_p = \Big\{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{1/p} < \infty \Big\}$$

با جمع و ضرب اسکالر مؤلفه‌وار، یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر H یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد، یک ضرب داخلی روی H، تابعی مانند $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ است که دارای خواص زیر است

(۱) به ازای هر $x, y \in H$، $\quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y, z \in H$، $\quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ؛

(۳) به ازای هر $x \in H$، $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ و $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

(۴) به ازای هر $x \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $\quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ؛

اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی بر H باشد، آنگاه $(H, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

در فضای ضرب داخلی $(H, \langle .,. \rangle)$، می‌توان یک نرم برای هر $x \in H$ به صورت $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ تعریف کرد.

تعریف ۱۱.۱.۱. هرگاه فضای ضرب داخلی H، با نرم حاصل از ضرب داخلی، فضای نرمدار کامل باشد، یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا گردد، آنگاه H را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای هیلبرت H را جدایی‌پذیر گویند هرگاه دارای زیر مجموعه چگال شمارش‌پذیر باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر H یک فضای هیلبرت باشد، خانواده‌ی $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در H، متعامد یکه نامیده می‌شود هرگاه $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 1$ وقتی $\alpha = \beta$ و $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0$ وقتی $\alpha \neq \beta$.

تعریف ۱۴.۱.۱. در یک فضای هیلبرت، مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکزیمال را یک پایه‌ی متعامد یکه می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. نگاشت $\varphi : X \to X^{**}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\varphi(x) : X^* \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\varphi(x)(f) = f(x)$ تعریف می‌شود، X را انعکاسی گویند هرگاه φ پوشا باشد.

برای مثال هر فضای هیلبرت H و برای هر $p \geq 1$، l_p انعکاسی است.

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنید $p, q \in (1, \infty)$ و $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ باشد. اگر $x \in l_p$ و $y \in l_q$ آنگاه

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1.1}$$

و

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

رابطه‌ی (۱.۱) را نامساوی هولدر و رابطه‌ی (۲.۱) را نامساوی مینکوفسکی می‌گویند.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. $\tau \subseteq P(X)$ را یک توپولوژی بر S می‌نامیم هرگاه

(۱) $\varnothing, X \in \tau$،

(۲) اگر $E_1, E_2 \in \tau$ آنگاه $E_1 \cap E_2 \in \tau$،

(۳) اگر $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد آنگاه $\cup_{\alpha \in I} E_\alpha \subseteq \tau$. در این صورت هر $E \in \tau$ را یک مجموعه باز در X می‌نامیم.

اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $p \in E \in \tau$ آنگاه E را یک همسایگی p می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را همئومورفیسم گوییم هرگاه f یک به یک، پوشا و خطی باشد، و f و f^{-1} پیوسته باشند. در این صورت فضای X و Y را همئومورف گوییم.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. گوئیم نگاشت $f : X \to Y$ در نقطه $p \in X$ باز است اگر هر وقت V یک همسایگی p باشد، $f(V)$ شامل همسایگی از $f(p)$ باشد. همچنین گوئیم f باز است اگر هر وقت U در X باز باشد، $f(U)$ در Y باز باشد.

واضح است که f باز است اگر و فقط اگر f در هر نقطه از X باز باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. گوئیم نگاشت $f : X \to Y$ در x پیوسته است هرگاه به ازای هر V در همسایگی $f(x)$، U در همسایگی x وجود داشته باشد به طوری که $f(U) \subseteq V$ باشد.

گزاره ۲.۱.۱. (کریستنسن،۲۰۰۳ ،قضیه ۲.۴.۳) فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای H است؛

(ب) به ازای هر $x \in H$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ ؛

(ج) به ازای هر $x \in H$ ، $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$؛

(د) $\overline{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = H$.

۲.۱ عملگرهای کراندار روی فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. برای عملگر $T : X \to Y$، نرم T را با $\| T \|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\| T \| = \sup\{\| T(x) \| :\ x \in X,\ \| x \| \leqslant 1\}.$$

اگر $\infty >\| T \|$، آنگاه T را کراندار می‌نامیم. اگر X و Y دو فضای نرمدار خطی باشند آنگاه عملگر T را خطی کراندار گویند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش خواهیم داد و $B(X,\mathbb{C})$ را با X^* نشان می‌دهیم.

لازم به ذکر است که اگر Y فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ نیز باناخ است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید M زیرفضای بسته از فضای نرمدار X باشد. هرگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از X موجود باشد به طوری که $X=M+N$ و $M\cap N=\{\circ\}$، آنگاه گوییم M در X دارای متمم است. در این حالت گوییم X مجموع مستقیم M و N است و گاهی از نماد $X=M\oplus N$ استفاده می‌شود.

گزاره ۱.۲.۱. (تیلور، ۱۹۸۰،قضیه ۴.۳) فرض کنید M یک زیرفضای بسته از فضای نرمدار X باشد و $x_\circ\in X$. اگر فاصله‌ی M و $x_\circ$ عدد مثبت h باشد آنگاه $x^*\in X^*$ وجود دارد به طوری که $\|x^*\|=۱$ و $x^*(x_\circ)=h$ و برای هر $x\in M$، $x^*(x)=\circ$ است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. اگر $T\in B(X,Y)$ آنگاه عملگر $T^*\in B(Y^*,X^*)$ که در شرط زیر صدق می‌کند

$$T^*(y^*)(x)=y^*(Tx),\quad x\in X,\ y^*\in Y^*$$

عملگر الحاقی T نامیده می‌شود.

در (رودین، ۱۹۷۳) ثابت شده است که اگر $T\in B(X,Y)$، آنگاه $T^*\in B(Y^*,X^*)$ موجود و منحصربه فرد است و $\|T\|=\|T^*\|$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $S,T\in B(X)$. $ST\in B(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(ST)(x)=S(T(x)).$$

همچنین گوییم عملگر $T \in B(X)$ معکوس‌پذیر است اگر $S \in B(X)$ ی چنان موجود باشد که

$$ST = I = TS$$

در این حالت می‌نویسیم $S = T^{-1}$.

گزاره ۲.۲.۱. (رودین، ۱۹۷۳، نتیجه ۱۲.۲)

(الف) هرگاه F یک نگاشت خطی پیوسته از فضای باناخ X بروی فضای باناخ Y باشد، آنگاه F باز است.

(ب) هرگاه F در قسمت(۱) صدق کرده و یک به یک باشد، آنگاه $F^{-1} : Y \to X$ خطی و کراندار و

$$\exists a, b \ \ , \forall x \quad a\|x\| \leq \|F(x)\| \leq b\|x\|$$

می‌باشد.

گزاره ۳.۲.۱. (رودین، ۱۹۸۷،قضیه ۱۰.۵) اگر X و Y فضاهای باناخ و T یک نگاشت خطی کراندار از X بروی Y باشد که یک به یک نیز باشد، آنگاه T^{-1} یک نگاشت خطی کراندار از Y بروی X می‌باشد.

گزاره ۴.۲.۱. (رودین، ۱۹۸۷،قضیه ۱۶.۵) هرگاه M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابعی خطی کراندار بر M باشد، آنگاه f را می‌توان به یک تابعی خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.

گزاره ۵.۲.۱. (کریستنسن، ۲۰۰۳، قضیه ۳.۲.۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $U : X \to X$ کراندار بوده و $\|I - U\| < 1$، آنگاه U وارون‌پذیر است و

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - U)^k$$

و همچنین

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|}.$$

گزاره ۶.۲.۱. (دینگ[۱]، ۲۰۰۳) اگر X یک فضای باناخ باشد و $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1,1)$ و $T : X \to X$ عملگری خطی باشد که در شرط زیر صدق کند

$$\|x - Tx\| \leqslant \lambda_1\|x\| + \lambda_2\|Tx\|, \quad \forall x \in X$$

آنگاه T کراندار و وارون‌پذیر است و برای هر $x \in X$ داریم

$$\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|x\|, \tag{۳.۱}$$

و

$$\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_1}\|x\| \leqslant \|T^{-1}x\| \leqslant \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1}\|x\|. \tag{۴.۱}$$

۳.۱ قاب‌ها و پایه‌های ریس

تعریف ۱.۳.۱. دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت H را یک قاب برای H می‌نامیم هرگاه مقادیر مثبت A و B چنان موجود باشند به طوری که به ازای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A \parallel f \parallel^2 \leqslant \sum_{i\in I} \mid \langle f , f_i \rangle \mid^2 \leqslant B \parallel f \parallel^2 . \tag{۵.۱}$$

A و B را به ترتیب کران پایین و بالای قاب می‌نامیم.

اگر در رابطه‌ی (۵.۱)، $A = B = \lambda$ قاب $\{f_i\}_{i\in I}$، یک قاب $\lambda-$ تنگ نامیده می‌شود و در حالتی که $A = B = 1$ قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ را قاب پارسوال می‌نامیم. اگر به ازای هر $f \in H$، نابرابری سمت راست در رابطه‌ی (۵.۱)، برقرار باشد آنگاه دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله‌ی بسل[۲] در H نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. خانواده‌ی $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ را پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت H نامند هرگاه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای H باشد و $U : H \to H$ یک عملگر کراندار و دوسویی باشد.

[۱] Ding
[۲] Bessel

مثال ۱.۳.۱. پایه‌ی متعامد یکه، یک قاب پارسوال است. زیرا طبق گزاره‌ی ۲.۱.۱، به ازای هر $f \in H$ داریم

$$\|f\|^{2} = \sum_{i\in I} |\langle f, e_i\rangle|^{2}.$$

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌ی متعامد یکه برای H باشد. با تکرار عضو e_1 در $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ و در نظر گرفتن $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ آنگاه $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک قاب با کران‌های $A = 1$ و $B = 2$ می‌باشد، چون $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌ی متعامد یکه است در نتیجه بنابه گزاره‌ی ۲.۱.۱، به ازای هر $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\|f\|^{2} = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^{2} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^{2}\\ &= |\langle f, e_1\rangle|^{2} + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^{2}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^{2} + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^{2}\\ &= 2\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^{2}.\end{aligned}$$

تعریف ۳.۳.۱. اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای H باشد، در آن صورت

$$T : l_2(I) \to H, \qquad T(c_i) = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

که یک عملگر کراندار خواهد بود و آن را عملگر ترکیب قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم. عملگر الحاقی T به صورت زیر است

$$T^{*} : H \to l_2(I), \qquad T^{*}f = \{\langle f\ ,\ f_i\rangle\}_{i\in I},$$

که T^{*} عملگر تجزیه‌ی قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود. با ترکیب عملگرهای T و T^{*} عملگر قاب حاصل می‌شود که به صورت زیر خواهد بود

$$S : H \to H, \qquad Sf = T\,T^{*}f = \sum_{i\in I} \langle f\ ,\ f_i\rangle f_i.$$

S کراندار است، زیرا

$$\|S\| = \|TT^{*}\| \leqslant \|T\|.\|T^{*}\| = \|T\|^{2} \leqslant B.$$