دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

ساختارهای دارای هسته باز ت- کمینه

استاد راهنما

جعفر صادق عیوضلو

استاد مشاور

سعید صالحی پور مهر

پژوهشگر

فاطمه صادقی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر عزیز، مادر مهربانم،
و برادران و خواهرانم

بنام خدا

و مَن لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **جعفر صادق عیوضلو** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**سعید صالحی پور مهر** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.
از تمام دوستان دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

فاطمه صادقی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: صادقی نام: فاطمه

عنوان: ساختارهای دارای هسته باز ت- کمینه

استاد راهنما : جعفر صادق عیوضلو

استاد مشاور : سعید صالحی پور مهر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۱۰۰

کلید واژه‌ها: ساختار ت- کمینه، هسته باز، محمول موروثی، تناهی یکنواخت، کمال تعریف‌پذیر.

چکیده

هسته باز یک بسط از یک ترتیب خطی چگال، یک ساختار تقلیل یافته از آن است که توسط گردایه همه مجموعه‌های تعریف‌پذیر باز آن بسط تولید می‌شود. در این پایان نامه که بر مبنای [۵] نوشته می‌شود، بسط‌هایی از ترتیب‌های خطی چگال که هسته باز ت- کمینه دارند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. اولین نتیجه شرایطی را فراهم می‌آورد که تحت آن شرایط هر بسط از یک گروه مرتب چگال دارای هسته باز ت- کمینه است.

در گام بعدی، دو رده از ساختارهایی که خودشان ت- کمینه نیستند، اما دارای هسته باز ت- کمینه‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. اولین رده زوج‌های چگال از بسط‌های ت- کمینه از گروه‌های مرتب می‌باشد و دومین رده بسط‌هایی از ساختارهای ت- کمینه با محمولات موروثی می‌باشد. ویژگی «وجود توابع تعریف‌پذیر یکانی با گراف چگال در صفحه» دو رده مذکور را از هم متمایز می‌گرداند. در واقع، اولین رده دارای ویژگی مذکور است، در حالی که دومی چنین نیست. ویژگی مذکور با ویژگی‌های جالب دیگری از جمله «تناهی یکنواخت»، «کمال تعریف‌پذیر» مرتبط می‌شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

این پایان‌نامه براساس [۵] نوشته می‌شود. در طی این نوشته $\mathfrak{R}$ نشان‌دهنده‌ی یک بسط مرتبه اول دلخواه ثابت از یک ترتیب خطی چگال $(R,<)$ که فاقد نقاط انتهایی است، می‌باشد.

ساختار $\mathfrak{R}$ ت-کمینه است هرگاه هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر (با پارامتر) از R برابر اجتماع متناهی از نقاط و بازه‌های باز باشد. با ترکیب توانائی تعریف‌پذیری، ابزارهای نظریه مدل و وفور مثال‌های جالب، ت-کمینگی یک زمینه غنی برای آنچه که توپولوژی رام نامیده شده است و یک تعمیم وسیع از هندسه نیم‌جبری می‌باشد، فراهم آورده است. در این زمینه می‌توان به رساله‌ی پژوهشی [۱۴] و مقاله مروری [۱۷] مراجعه نمود. اما توسعه‌ی ت-کمینگی تحت تاثیر ملاحضات نظریه مدلی صرف نیز بوده است، برای مثال منابع [۴۱، ۴۰، ۳۸، ۳۰، ۱۱] در این جهت می‌باشند. این نوشته بیشتر در رده‌ی اخیر قرار می‌گیرد، زیرا تمرکز اصلی در آن روی پیشرفت نظریه مدل عمومی ساختارهای مرتب است تا فراهم آوردن آن در کاربردهای سایر شاخه‌های ریاضی. در طی این نوشته، DLO نشان دهنده‌ی نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون نقاط انتهایی در زبان $\{<\}$ می‌باشد.

محققین تعمیم‌هایی فراسوی زمینه‌ی ت- کمینگی را که خواص خوبی را همچنان حفظ می‌کنند، بررسی کرده‌اند. یک مثال در این زمینه، گذار به مفهوم ت- کمینگی ضعیف می‌باشد که شرط این‌که هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر برابر اجتماع متناهی از مجموعه‌های محدب تعریف‌پذیر می‌باشد را فراهم می‌کند. در این جهت مقاله [۳۰] را ببینید. در اینجا حرکت در یک جهت عمود بر جهت فوق صورت می‌گیرد به این معنی که ساختارهایی را مورد بررسی قرار می‌دهد که در آن‌ها مجموعه‌های تعریف‌پذیر باز خوش‌رفتارند، در حالت خاص، هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر باز برابر اجتماع متناهی از بازه‌های باز است. این مفهوم که توسط میلر [۱] و اسپیسگر [۲] در [۳۴] معرفی شده است، به طور دقیق به صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. *هسته باز $\Re$ که با $\Re^\circ$ نشان داده می‌شود، ساختار $(R, (U))$ می‌باشد که در آن U در دامنه مجموعه‌های باز تعریف‌پذیر در $\Re$ (از هر چندگانگی) تغییر می‌کند. برای دقت بیشتر $\Re^\circ$ را یک ساختار در زبانی که دقیقاً متشکل از نمادهای محمولی برای مجموعه‌های تعریف‌پذیر باز در $\Re$ می‌باشد، در نظر می‌گیریم. برای نظریه $T \supseteq DLO$، گوئیم نظریه T' یک هسته باز برای T است هرگاه برای هر $\mathcal{M} \models T$ مدل $\mathcal{M}' \models T'$ موجود باشد که $\mathcal{M}^\circ$ با $\mathcal{M}'$ متعارف [۳] (دارای مجموعه‌های تعریف‌پذیر یکسان) شود.*

از آنجا که مجموعه $\{(x, y) \in R^۲ : x < y\}$ یک مجموعه باز تعریف‌پذیر در $\Re$ است پس $\Re^\circ$ بسطی از $(R, <)$ می‌باشد. به علاوه اگر $\Re$ بسطی از یک گروه باشد، آن‌گاه با توجه به این‌که عمل گروه پیوسته است پس گراف آن در $\Re^\circ$ تعریف پذیر است (در واقع گراف عمل گروه زیرمجموعه تعریف پذیر بسته ای از $R^۲$ می باشد.). به طور مشابه، اگر $\Re$ بسطی از یک حلقه باشد، آن‌گاه عمل ضرب آن نیز در $\Re^\circ$ تعریف‌پذیر است. به طور کلی، بعداً خواهیم دید که اگر همه توابع و روابط ابتدایی از $\Re$ به صورت ترکیبات بولی از مجموعه‌های باز باشند آن‌گاه $\Re$ با $\Re^\circ$ متعارف است.

[۱] Miller

[۲] Spesseiger

[۳] Interdefinable

در اینجا بسط‌هایی از ترتیب‌های خطی چگال مورد بررسی قرار می‌گیرند که دارای هسته باز ت-کمینه باشند، تاکید بیشتر روی بسط‌های گروه های مرتب چگال می‌باشد. این برنامه در [۳۴] شروع شد، اما در آنجا تمرکز روی بسط‌های میدان اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ بود و برهان‌های ارائه شده بیشتر مختص $\mathbb{R}$ بودند. در اینجا بیشتر از جنبه نظریه مدلی به مسئله پرداخته می‌شود. از دو جهت نتایج [۳۴] تعمیم داده می‌شود: اول این‌که صرفاً روی میدان اعداد حقیقی کار نمی‌کنیم و دوم این‌که چندین خاصیت نظریه مدلی برای ساختارهایی که دارای هسته باز ت-کمینه هستند مورد امتحان قرار می‌گیرند که این مطالب نیز در [۳۴] مورد توجه نبوده است.
اگر $\mathfrak{R}^\circ$ ت-کمینه باشد، آن‌گاه هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر باز در $\mathfrak{R}$ برابر اجتماعی متناهی از بازه‌هاست. یکی از نتایج اصلی [۳۴] عکس این مطلب را به طور نسبی فراهم می‌آورد: اگر $\mathfrak{R}$ بسطی از $(\mathbb{R}, +, <)$ باشد که شامل یک قطب است، یعنی $\mathfrak{R}$ یک همسانی بین یک بازه کراندار و یک بازه بی‌کران تعریف می‌کند، و هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر باز از $\mathbb{R}$ برابر اجتماع متناهی از بازه‌ها باشد آن‌گاه $\mathfrak{R}^\circ$ ت-کمینه است. فرض این‌که $\mathfrak{R}$ دارای قطب است، زائد می‌باشد (۱۴.۲ را ببینید) اما به منظور جایگزینی کار روی $\mathbb{R}$، یک نوع یکنواختی را فرض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که در هر ساختار هم‌ارز مقدماتی با $\mathfrak{R}$ هر مجموعه یکانی تعریف‌پذیر باز برابر اجتماع تعداد متناهی بازه است. با استفاده از قضیه فشردگی می‌توان دید که فرض اخیر معادل حکم زیر است:

حکم. برای هر $m \in \mathbb{N}$ وهر زیرمجموعه تعریف‌پذیر $A \subseteq R^m \times R$ عدد $N \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $x \in R^m$ دورن مجموعه $\{t \in R : (x, t) \in A\}$ برابر اجتماع مجزایی از حداکثر N بازه باز است.

به وضوح حکم فوق شرط قبل از آن را نتیجه می‌دهد. برای عکس آن، فرض کنید در هر ساختار هم‌ارز مقدماتی با $\mathfrak{R}$ هر مجموعه یکانی تعریف‌پذیر باز برابر اجتماع تعداد متناهی بازه باشد. همچنین فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و $A \subseteq R^m \times R$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید برای هر $\bar{a} \in R^m$ فرمول $\Psi(\bar{a}, v)$ درون مجموعه $\{t \in R : (\bar{a}, t) \in A\}$ را تعریف کند. طبق فرض $\Psi(\bar{a}, R)$ که نشان دهنده‌ی زیرمجموعه تعریف شده توسط فرمول $\Psi(\bar{a}, v)$ در $\mathfrak{R}$

است برابر اجتماع تعداد متناهی بازه باز مجزا است.
فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عناصر $\bar{a} \in R^m$ موجود باشد که $\Psi(\bar{a}, R)$ شامل حداقل n بازه ی باز مجزا باشد (فرض خلف). برای هر $n \in \mathbb{N}$ جمله σ_n در زبان $\mathcal{L}_{\Re} \bigcup \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ که بیان کننده عبارت " $\Psi(\bar{a}, .)$ شامل حداقل n بازه مجزا است" می‌باشد، را به $Th(\Re)$ اضافه می‌کنیم. برای این منظور کافی است σ_n را به صورت

$$\exists \bar{y} \exists \bar{z} y_1 < z_1 < ... < y_n < z_n \wedge \bigwedge \Psi(\bar{a}, y_i) \wedge \bigwedge \backsim \Psi(\bar{a}, z_i)$$

بگیریم. طبق قضیه فشردگی نظریه $Th(\Re) \bigcup \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ دارای مدلی مانند $\mathcal{M}$ است. در این صورت زیرمجموعه $\Psi(\bar{a}^{\mathcal{M}}, M)$ شامل تعداد نامتناهی بازه مجزا از هم می‌باشد که متناقض با فرض است، زیرا $\mathcal{M}$ هم‌ارزمقدماتی $\Re$ می‌باشد.

شرط فوق را با دو شرط دیگر به نام‌های "کمال تعریف پذیر" و "تناهی یکنواخت" جایگزین خواهیم کرد که هر کدام به طور مستقل مورد توجه هستند.

تعریف ۲.۱.۱. *گوییم $\Re$ (ددکیند) کامل تعریف‌پذیر است - برای اختصار $\Re$ دارای DC است یا $\Re \models DC$ - هرگاه هر مجموعه یکانی تعریف‌پذیر در آن دارای سوپریمم واینفیمم در $R \bigcup \{\pm\infty\}$ باشد. همچنین برای هر نظریه $T \supseteq DLO$ می نویسیم: $T \models DC$، هرگاه هر مدل T دارای DC باشد.*

واضح است که DC یک قالب اصل موضوعی (شما) در زبان $\{<\}$ می‌باشد. به آسانی می‌توان دید که $\Re \models DC$ اگر و تنها اگر هر مجموعه یکانی تعریف‌پذیر باز در $\Re$ به صورت اجتماعی مجزا از بازه‌های باز باشد.

اگر $\Re^{\circ}$ ت-کمینه باشد آن‌گاه بنابر مطلب فوق $\Re \models DC$. همچنین با توجه به ددکیند کامل بودن $\mathbb{R}$ داریم: $(\mathbb{R}, <) \models DC$. از سوی دیگر DC آن‌قدر قوی است که با آن بتوان مقدار قابل توجهی از توپولوژی نقطه-مجموعه مقدماتی که روی $(\mathbb{R}, <)$ انجام می‌شود، را توسعه داد. این موضوع در [۳۱] به تفصیل آمده است. برخی از حقایقی که در آن مرجع اثبات شده است و مربوط

به موضوع این نوشته می‌باشد به همراه سایر نتایج تکنیکی در فصل دوم آورده می‌شود. خاصیت تناهی یکنواخت نیز به طور گسترده توسط نظریه‌مدل‌دان‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است هر چند که گاهی به نام‌های متفاوت بوده است.

تعریف ۳.۱.۱. *گوییم ساختار $\mathcal{M}$ در خاصیت تناهی یکنواخت صدق می‌کند - برای اختصار، $\mathcal{M}$ دارای UF است یا $\mathcal{M} \models UF$ - هرگاه برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ وهر $A \subseteq M^m \times M^n$ تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$، عدد $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in M^m$ مجموعه $\{y \in M^n : (x, y) \in A\}$ نامتناهی یا حداکثر N عضو داشته باشد. یک استقرای ساده نشان می‌دهد که کافی است فقط حالت $n = ۱$ را در نظر بگیریم. برای نظریه T ، می‌نویسیم: $T \models UF$، هرگاه هر مدل T دارای خاصیت UF باشد.*

یکی از نتایج بسیار مهم اولیه در مورد ساختارهای ت- کمینه صدق‌پذیری UF در آن‌ها می‌باشد؛ ر.ک. [۲۵]. اکنون آماده‌ایم که قضیه اساسی این نوشته را بیان کنیم.

قضیه ۱.۱.۱. *اگر $\Re$ بسطی از یک گروه مرتب باشد که $\Re \models DC + UF$ ، آن‌گاه $\Re^\circ$ ت- کمینه است.*

طبق قضیه تجزیه سلولی برای ساختارهای ت- کمینه، هر مجموعه تعریف‌پذیر در یک ساختار ت- کمینه به صورت یک ترکیب بولی از مجموعه‌های تعریف‌پذیر باز می‌باشد. برای این منظور، کافی است نشان دهیم که هر سلول برابر یک ترکیب بولی از مجموعه‌های باز (تعریف‌پذیر) است (زیرا طبق [۷] هر ترکیب بولی تعریف‌پذیر از مجموعه‌های باز برابر یک ترکیب بولی از مجموعه‌های باز تعریف‌پذیر است. این مطلب با استقرا نشان داده می‌شود). برای $C \subseteq R$ واضح است. فرض کنید حکم برای سلول‌های $C \subseteq R^n$ درست باشد. مجموعه $\Gamma(f|_C)$ برای تابع تعریف‌پذیر و پیوسته $f : C \to R$، در $C \times R$ بسته است. پس مقطع یک بسته در $R^{n+۱}$ با $C \times R$ می‌باشد. بنابراین به صورت ترکیب بولی از بازها است. همچنین $(f, g)_C$ در $C \times R$ باز می‌باشد. لذا مقطع یک باز در $R^{n+۱}$ با $C \times R$ می‌باشد. بنابراین به صورت ترکیب بولی از بازها نوشته می‌شود.

با توجه به مطلب فوق طبقه‌بندی زیر از این قضیه نتیجه می‌شود.

نتیجه ۴.۱.۱. *یک بسط از یک گروه مرتب چگال ت- کمینه است اگر و تنها اگر خواص DC و UF را برآورده کند وبا هسته بازش متعارف باشد.*

برهان قضیه ۱.۱.۱ درفصل سوم نتیجه خواهد شد. روش به کار گرفته شده روی هم‌رفته همان روش [۳۴] می‌باشد، اما تاکتیک متفاوت است، زیرا در اینجا نه تفکیک‌پذیری توپولوژی را داریم و نه قضیه رسته بئر در دسترس است. باوجود این، برهان ارائه شده فقط توپولوژی مقدماتی و نظریه تعریف‌پذیری مرتبه اول را لازم دارد. به عنوان نتیجه‌ای از برهان ارائه شده قضیه‌ای مشابه قضیه رسته بئر به دست می‌آید.

در ادامه به ذکر نتایجی در راستای هدف دوم می‌پردازیم که یک تحقیق بیشتر از جنبه نظریه مدلی می‌باشد. طبق تعریف DC و UF اسکیم‌های مرتبه اول می‌باشند، لذا هر دو خواص مقدماتی هستند، یعنی تحت هم‌ارزی‌های مقدماتی ساختارها حفظ می‌شوند. در (۵.۲) خواهیم دید که یک بسط از یک گروه مرتب چگال دارای DC و UF است اگر وتنها اگر هر زیرمجموعه باز یکانی که در هر ساختار هم‌ارز مقدماتی آن بسط، تعریف‌پذیر است، برابر اجتماع متناهی از بازه‌ها باشد. بنابراین بیان دیگر قضیه ۱.۱.۱ به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید T یک توسیع از نظریه گروه‌های آبلی مرتب چگال باشد که هر مجموعه تعریف‌پذیر یکانی باز در هر مدل آن برابر اجتماع متناهی از بازه‌های باز باشد. در این صورت هر مدل T دارای هسته باز ت- کمینه است.*

تعریف ۵.۱.۱. *بستار تعریف‌پذیر $S \subseteq R$ در $\Re$ که با $dcl_{\Re}(S)$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه $r \in R$ می‌باشد که در $\Re$ تعریف‌پذیر با پارامتر از S باشند. اندیس $\Re$ اغلب نادیده گرفته می‌شود. گوئیم $\Re$ دارای خاصیت تبادل است- به اختصار، $\Re$ دارای EP است یا $\Re \models EP$ - هرگاه برای هر $S \subseteq R$ وهر $a, b \in R$، اگر $a \in dcl(S \cup b) - dcl(S)$ آن‌گاه $b \in dcl(S \cup a)$.*

اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، تعریف تبادل فوق را باید تبادل نسبت به dcl بنامیم، چرا که EP را می‌توان نسبت به هر پیش‌هندسه‌ای فرمول‌بندی نمود. اما در اینجا dcl تنها پیش هندسه‌ای است که مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به توجه است که در ساختارهای مرتب، dcl با acl (بستار

جبری) منطبق است. هر ساختار ت-کمینه EP را برآورده می‌کند(طبق ۱.۴ از [۴۱] و ۲.۰ از [۲۵]). نظریه‌هایی که دارای خواص UF و EP نسبت به acl می‌باشند سال‌ها مورد علاقه شدید نظریه‌مدل دان‌ها بوده است، اما تمرکز اصلی پرداختن به مسئله از جنبه پایداری یا شبه-پایداری بوده است. ظاهراً آنچه که تا بحال چشم‌پوشی شده است این است که برای توسیع‌های DLO خاصیت EP خاصیت UF را نتیجه می‌دهد(۱۷.۱ راببینید). بدین لحاظ، طبق قضیه ۱.۱.۱ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۶.۱.۱. *اگرنظریه T توسیعی از نظریه گروه‌های آبلی چگال باشد که $T \models DC + EP$ ، آن‌گاه $T \models UF$ و هر مدل T دارای هسته باز ت-کمینه است.*

همان‌طوری که در فصل ۵ خواهیم دید، عکس نتیجه فوق برقرار نیست. در حقیقت، با دلایل نظریه مدلی نشان داده می‌شود که هر توسیعی از نظریه حلقه‌های مرتب اگر دارای EP باشد آن‌گاه در یک شرط قوی صدق می‌کند که این شرط قوی در بسیاری از موارد جالب برقرار نیست.
در فصل۴، برخی نتایج عمومی درباره‌ی $\Re$ و $\Re^\circ$ مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. اساساً، اگر $\Re^\circ$ ت-کمینه باشد، آن‌گاه ترکیبات بولی از درون و بستار مجموعه‌های تعریف‌پذیر در $\Re$ خوش‌رفتار هستند. این مطلب منجر به معرفی مفهوم "شبه-تجزیه" که ضعیف‌تر از "تجزیه سلولی" می‌باشد، شده است(بخش۵ از [۳۲] و صفحه ۲۰۳ از [۳۴] را ببینید). همان‌طوری که تجزیه سلولی مهم‌ترین خاصیت مقدماتی ساختارهای ت-کمینه است، ممکن است انتظار داشته باشیم که شبه-تجزیه همان نقش را برای ساختارهایی که هسته‌ی باز دارند داشته باشد. متاسفانه، سودمندی آن با عدم امکان یکنواخت‌سازی پارامترها، برای مثال در حالتی که $\Re$ یک تابع یکانی را که گراف آن در بخشی چگال است تعریف می‌کند، از بین می‌رود. در (۱۶.۴) نتیجه می‌شود که این تنها حالتی است که یکنواخت‌سازی پارامترها را مانع می‌شود، بنابراین انگیزه‌ای برای ارائه‌ی تعریف زیر فراهم می‌شود:

تعریف ۷.۱.۱. گوئیم $\Re$ *دارای هیچ گراف چگال نیست- به اختصار، $\Re$ دارای خاصیت NDG است، یا $\Re \models NDG$ - هرگاه گراف هر تابع تعریف‌پذیر در آن هیچ‌جا چگال باشد. برای نظریه T، گوئیم $T \models NDG$ هرگاه هر مدل T دارای NDG باشد.*

خاصیت NDG یک قالب اصل موضوعی مرتبه اول (شما) می‌باشد و لذا مقدماتی است. اگر هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر در $\Re$ دارای درون (ناتهی) باشد یا هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه $\Re \models NDG$. در حالت خاص، هر ساختار ت-کمینه دارای NDG است (طبق قضیه تجزیه سلولی). اگر $\Re \models NDG$ و $\Re^{\circ}$ ت-کمینه باشد آن‌گاه $\Re \models EP$ و $Th(\Re)$ دارای هسته باز ت-کمینه کامل است (۱۵.۴ را ببینید). همچنین طبق ۱۷.۱، $\Re \models UF$. بنابراین طبق قضیه ۱. ۱.۱، طبقه‌بندی جذاب زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید نظریه T توسیعی از نظریه گروه‌های مرتب چگال باشد و $T \models NDG$. در این صورت $T \models DC + UF$ اگر و تنها اگر $T \models DC + EP$ اگر و تنها اگر هر مدل T دارای هسته باز ت-کمینه باشد.*

یادآوری. مثال‌های زیادی از ساختارهای مرتب چگال، حتی بسط‌هایی از $\mathbb{R}$، وجود دارند که NDG را تصدیق می‌کنند اما دارای هسته باز ت-کمینه نیستند. تعدادی از آن‌ها در فصل ۷ مورد بررسی قرار می‌گیرند.

بعد از اثبات نتایج اصلی که در بالا توصیف گردید، به چند مبحث نظریه مدلی در ارتباط با وجود هسته باز ت-کمینه با آوردن مثال یا مثال نقض متمرکز خواهیم شد. در [۳۴] ، دو رده‌ی طبیعی از بسط‌های اعداد حقیقی -زوج‌های چگال و بسط‌های با مجموعه‌های موروثی- ارائه شده است که با وجود این‌که ت-کمینه نیستند اما دارای هسته باز ت-کمینه هستند؛ رده‌ی اخیر در NDG صدق می‌کند، در حالی که اولی آن را برآورده نمی‌کند. در فصول ۵ و ۶، نشان داده می‌شود که این مثال‌ها به قالب عمومی‌تر قابل گسترش هستند و با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این میان، توجه ویژه‌ای به EP، توابع اسکولم تعریف‌پذیر، خاصیت حذف سور،مدل‌های اتمی و NIP $(non-independent\, property)$ صورت خواهند گرفت. برای نشان دادن بی‌معنی نبودن قضایای ۱.۱.۱ و ۲.۱.۱ یک روش طبیعی گسترش بهینگی آن‌ها می‌باشد. این مورد در فصل ۷ با نشان دادن لازمه‌ی وجود ساختار گروه، حتی برای $\mathbb{R}$ و این‌که $\Re \models NDG$، انجام می‌شود.باقی مطالب به شرح زیر می‌باشد.

فصل اول اختصاص به پیشنیازها از نظریه مدل و توپولوژی و برخی تعاریف و نمادگذاری‌های لازم دارد. در فصل دوم با فرض $\Re \models DC$ نتایجی حاصل می‌شود که در برهان قضیه ۱.۱.۱ کلیدی هستند. برهان قضیه ۱.۱.۱ در فصل ۳ تکمیل خواهد شد. خواص مقدماتی ساختارهایی که دارای هسته باز ت-کمینه هستند شامل نتایجی در ارتباط با NDG در فصل ۴ آورده می‌شود. تعدادی مثال و مثال نقض در فصول ۵ و ۶ می‌آید. فصل ۸ با تعدادی سوال پایان می‌یابد.

۲.۱ پیشنیازها

در این بخش برخی نمادگذاری‌ها و قراردادهای عمومی را یادآوری کرده و برخی حقایق مقدماتی را که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌آوریم. این موارد به طور عمده در دو رسته توپولوژی و نظریه مدلی قرار می‌گیرند، اما از آنجا که کار ما در ساختارهای مرتب و لذا با توپولوژی تعریف‌پذیر می‌باشد، در برخی از مطالب همپوشانی وجود دارد. در اغلب موارد دلایل ارائه شده در اینجا در منبع اصلی پایان‌نامه به عنوان تمرین رها شده است.

متغیرهای j, k, m, n با مقادیر در $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. کاردینالیتی مجموعه A را با $cardA$ و $n-$ امین حاصلضرب دکارتی A رابا A^n ($A^\circ = \{\emptyset\}$) نشان می‌دهیم. همچنین، A^{n+m} را با $A^m \times A^n$ یکی می‌گیریم. برای $C \subseteq A^{n+m}$ و $x \in A^m$، C_x را فیبر C روی x می‌نامیم وچنین تعریف می‌کنیم: $C_x = \{y \in A^n : (x, y) \in C\}$. برای گردایه $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های A^{n+m} وعضو $x \in A^m$، قرار می‌دهیم: $\mathcal{A}_x = \{A_x : A \in \mathcal{A}\}$. اگر B یک مجموعه باشد آن‌گاه تابع $f : A^\circ \longrightarrow B$ را مقدار ثابت $f(\emptyset) \in B$ می‌گیریم.

به طور کلی T یک نظریه مرتبه اول در یک زبان $\mathcal{L}$ در نظر گرفته می‌شود. همواره $\mathcal{L}$ را زبانی شامل حداقل یک نماد ثابت می‌گیریم. یک ساختار مرتبه اول روی مجموعه M با نماد $\mathcal{M}$ نشان داده می‌شود. برای $S \subseteq M$ منظور از $S-$ تعریف‌پذیری (در $\mathcal{M}$)، تعریف‌پذیری (در $\mathcal{M}$) با پارامترهایی از S می‌باشد. در فضای مشخص M^n منظور از مجموعه $S-$ تعریف‌پذیر، زیرمجموعه‌ای $S-$ تعریف‌پذیر از M^n ومنظور از یک تابع (نگاشت) $S-$ تعریف‌پذیر یک تابع (نگاشت) جزئی $S-$

تعریف‌پذیر از یک زیرمجموعه $A \subseteq M^m$ به توی یک فضای M^n می‌باشد. نقطه $a \in M^n$، $S-$ تعریف‌پذیر است هرگاه $a \in dcl(S)^n$؛ به عبارت دیگر مجموعه $\{a_1, ..., a_n\}$، $S-$ تعریف‌پذیر باشد که در آن $a = (a_1, ..., a_n)$.

ساختارهای $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ با مجموعه زمینه مشترک M را در نظر بگیرید. می‌نویسیم: $\mathcal{M}_1 =_{df} \mathcal{M}_2$ هرگاه متعارف باشند، به عبارت دیگر دارای مجموعه‌های تعریف‌پذیر یکسان باشند. نماد QE [۴] برای نشان دادن خاصیت حذف سور به کار می‌رود. گوئیم نظریه T، QE را می‌پذیرد، هرگاه برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ در زبان $\mathcal{L}$ فرمول خالی از سور $\psi(\bar{x})$ در زبان $\mathcal{L}$ موجود باشد که $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. همچنین، یک ساختار $\mathcal{M}$ دارای خاصیت حذف سور است هرگاه $Th(\mathcal{M})$، QE را بپذیرد.

یادآوری می‌کنیم که $\Re$ یک بسط ثابت اما دلخواه از یک ترتیب خطی چگال بدون نقاط انتهایی $(R, <)$ است. به طور صوری و معمولی نقاط انتهایی $\pm\infty$ رابه R الحاق می‌کنیم. در اینجا همواره بازه‌ها را ناتبهگون می‌گیریم، یعنی اگر I یک بازه در R باشد آن‌گاه $infI < supI$ که در آن $infI, supI \in R \cup \{\pm\infty\}$. روی فضای R^n توپولوژی حاصلضربی حاصل از توپولوژی بازه‌ها روی R را در نظر می‌گیریم. یک حجره در R^n، حاصلضرب n بازه باز است و یک حجره بسته حاصل ضرب n بازه بسته است. یک مجموعه دارای درون (ناتهی) است هرگاه شامل یک حجره باشد، در غیر این صورت گوییم درون ندارد. ترتیب روی R^n همان ترتیب الفبایی است که برای نشان دادن آن به اختصار از پیشوند lex استفاده می‌کنیم. برای مثال، $lexminA$ یعنی ترتیب الفبایی مینیمم A (در صورت وجود).

فرض کنید $A \subseteq R^n$ باشد. درون A رابا $int(A)$، بستار A را با $cl(A)$، کران A را با $bd(A)$، (که برابر با $cl(A) - int(A)$ است)، مرز A را با $fr(A)$ (که برابر با $cl(A) - A$ است) نشان می‌دهیم. اگر $S \subseteq R$ و مجموعه A، $S-$ تعریف‌پذیر باشد آن‌گاه تمام مجموعه‌های فوق نیز $S-$ تعریف‌پذیر هستند.

گوییم A "ساخت‌پذیر" است هرگاه به صورت ترکیب بولی (متناهی) از مجموعه‌های باز باشد؛

[۴] Quentifier Elimination

"گسسته" است هرگاه تمام نقاطش ایزوله باشد؛ "موضعاً بسته" است هرگاه در بستارش باز باشد؛ "هیچ‌جا چگال" است هرگاه بستارش درون نداشته باشد؛ "درجایی چگال" [۵] است هرگاه بستارش درون داشته باشد؛ "چگال" در $C \subseteq R^n$ است هرگاه $cl(C \cap A) = cl(C)$ باشد و "متمم چگال" [۶] در $C \subseteq R^n$ است هرگاه $cl(C - A) = cl(C)$ باشد. همچنین گوییم A نقطه موضعاً بسته دارد هرگاه یک حجره $B \subseteq R^n$ موجود باشد که $\emptyset \neq A \cap B = cl(A) \cap B$.

۱.۲.۱. موارد زیر حقایق مقدماتی از توپولوژی عمومی است که مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

(الف) یک مجموعه موضعاً بسته است اگر و تنها اگر مرزش بسته باشد.

(ب) یک مجموعه ساخت‌پذیر است اگر و تنها اگر برابر یک اجتماع متناهی از مجموعه‌های موضعاً بسته باشد.

(پ) مجموعه های ساخت پذیر یا درون دارند یا هیچ جا چگال اند.

(ت) هر مجموعه ساخت‌پذیر ناتهی نقطه موضعاً بسته دارد.

(ث) اگر $f_1, ..., f_k : A \longrightarrow R^n$ پیوسته و $A \subseteq R^m$ موضعاً بسته باشد آن‌گاه اجتماع گراف‌های‌شان موضعاً بسته است. به علاوه، اگر $B \subseteq R^n$ موضعاً بسته باشد آن‌گاه هر $f_i^{-1}(B)$ موضعاً بسته است در نتیجه فیبرهای مجموعه‌های موضعاً بسته، موضعاً بسته است (گرچه به آسانی می‌توان این مطلب را به طور مستقیم اثبات نمود).

(ج) در قسمت قبلی اگر به جای موضعاً بسته ساخت‌پذیری را به کار ببریم حکم حاصل باز هم درست است.

(چ) فرض کنید $A \subseteq R^m$ ساخت‌پذیر باشد. طبق قسمت (ب)، A برابر اجتماع مثلاً j مجموعه موضعاً بسته است. فرض کنید $f : A \longrightarrow R^n$ پیوسته باشد. در این صورت، برای هر

[۵] somewhere dense

[۶] co-dense

مجموعه ساخت‌پذیر $B \subseteq R^n$ که برابر اجتماع k مجموعه موضعاً بسته است، $f^{-1}(B)$ برابر اجتماع jk مجموعه موضعاً بسته است. به ویژه اگر $C \subseteq R^{m+n}$ ساخت‌پذیر باشد، آن‌گاه $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $x \in R^m$ فیبر C_x برابر اجتماع N مجموعه موضعاً بسته است.

(ح) سلول‌ها ومجموعه‌های گسسته موضعاً بسته‌اند.

برهان. (الف) اگر A یک مجموعه موضعاً بسته باشد آن‌گاه مجموعه باز U موجود است به طوری که $A = cl(A) \cap U$. در این صورت با توجه به تعریف $fr(A)$ خواهیم داشت:

$$fr(A) = cl(A) \setminus A = cl(A) \setminus (cl(A) \cap U) = cl(A) \setminus U$$

پس $fr(A)$ بسته است. برعکس، فرض کنید $fr(A)$ بسته باشد. با توجه به

$$A = cl(A) \setminus (cl(A) \setminus A) = cl(A) \cap (fr(A))^c$$

مجموعه A موضعاً بسته است.

(ب) اولاً هر مجموعه موضعاً بسته برابر مقطع یک باز و یک بسته می‌باشد، لذا هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های موضعاً بسته یک مجموعه ساخت‌پذیر است. ثانیاً اگر A ساخت پذیر باشد آن‌گاه به صورت اجتماعی از مقاطع مجموعه‌های باز یا بسته نوشته می‌شود. اما هر مقطع از تعداد متناهی مجموعه باز یا بسته مجموعه‌ای موضعاً بسته است. از طرف دیگر رده‌ی اجتماع‌های متناهی از مجموعه‌های موضعاً بسته شامل مجموعه‌های بسته و باز بوده و تحت اعمال اجتماع، اشتراک و متمم‌گیری بسته است و در نتیجه شامل مجموعه‌های ساخت‌پذیر است.

(پ) برای اثبات این قسمت ابتدا ادعای زیر را ثابت می‌کنیم.

ادعا. برای هر $n \geq ۱$، اگر $(\bar{A}_۱ \cup ... \cup \bar{A}_n)^\circ \neq \emptyset$ آن‌گاه $۱ \leq i \leq n$ موجود است که $\bar{A}_i^\circ \neq \emptyset$.

برهان ادعا. با استقرا روی n. برای حالت $n = ۱$ بدیهی است. فرض کنید حکم برای n درست باشد. آن‌را برای $n + ۱$ اثبات می‌کنیم. فرض کنید که

$$(\bar{A}_۱ \cup ... \cup \bar{A}_n \cup \bar{A}_{n+۱})^\circ \neq \emptyset \quad (\star)$$

اگر $(\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n)^\circ \neq \emptyset$ آن‌گاه حکم طبق فرض استقرا برقرار است.

پس فرض کنید $(\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n)^\circ = \emptyset$. طبق $(\star)$، مجموعه باز ناتهی O_1 موجود است که $(\star\star)$ $O_1 \subseteq \bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n \cup \bar{A}_{n+1}$ نشان می‌دهیم که $O_1 \subseteq \bar{A}_{n+1}$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که $O_1 \cap (\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n) \subseteq \bar{A}_{n+1}$. پس فرض کنید $a \in O_1 \cap (\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n)$ و O_2 یک همسایگی باز دلخواه از a باشد. چون $(\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n)^\circ = \emptyset$ پس $a \in O_2 \cap O_1 \nsubseteq \bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n$. لذا طبق $(\star\star)$، $O_2 \cap O_1 \cap \bar{A}_{n+1} \neq \emptyset$ لذا $O_2 \cap O_1 \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ بنابراین $O_2 \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. در نتیجه $a \in \bar{A}_{n+1}$.

حال به اثبات قسمت پ می‌پردازیم.

فرض کنید مجموعه A ساخت‌پذیر باشد. در این صورت، مجموعه‌های موضعاً بسته $A_1, A_2, ..., A_n$ موجودند که $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. فرض کنید که $\bar{A}^\circ = (\bar{A}_1 \cup ... \cup \bar{A}_n)^\circ \neq \emptyset$. طبق ادعای بالا، $1 \leq i \leq n$ موجود است که $\bar{A}_i^\circ \neq \emptyset$. نشان می‌دهیم که $A_i^\circ \neq \emptyset$. پس برای اثبات حکم، کافی است A را موضعاً بسته بگیریم و نشان دهیم که اگر $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$ آن‌گاه $A^\circ \neq \emptyset$. فرض کنید $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$. مجموعه باز ناتهی O_1 موجود است که $O_1 \subseteq \bar{A}$. A موضعاً بسته است، پس مجموعه باز O_2 موجود است که $A = O_2 \cap \bar{A}$. در این صورت $O_1 \cap O_2$ یک همسایگی باز مشمول در A است؛ زیرا $O_1 \cap O_2 \subseteq \bar{A} \cap O_2 = A$. همچنین $O_1 \subseteq \bar{A}$، پس $O_1 \cap A \neq \emptyset$. از طرفی $A = O_2 \cap \bar{A}$ $(A \subseteq O_2)$، پس $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. در نتیجه $A^\circ \neq \emptyset$.

(ت) به [۷] مراجعه شود.

(ث) ابتدا نشان می‌دهیم که $(A \times R^n) \cap \bigcup_{i=1}^k cl(\Gamma(f_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \Gamma(f_i)$. برای این منظور فرض کنید $(a,b) \in (A \times R^n) \cap \bigcup_{i=1}^k cl(\Gamma(f_i))$. در این صورت $1 \leq i \leq k$ موجود است به طوری که $(a,b) \in (A \times R^n) \cap cl(\Gamma(f_i))$. پس $a \in A$ و $(a, f_i(a)) \in \Gamma(f_i)$. همچنین $(a,b) \in cl(\Gamma(f_i))$. ادعا می‌کنیم که $b = f_i(a)$. فرض کنید که $b \neq f_i(a)$ (فرض خلف). در این صورت حجره‌های B_1 و B_2 موجود است به طوری که $b \in B_1$ ، $f_i(a) \in B_2$ و $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. نگاشت f_i پیوسته است پس حجره B'_2 شامل a موجود است که $f_i(B'_2) \subseteq B_2$ لذا $(a, f_i(a)) \in B'_2 \times B_2$ همچنین $(a,b) \in B'_2 \times B_1$. چون $f_i(B'_2) \subseteq B_2$ و $B_1 \cap B_2 = \emptyset$، پس $B'_2 \times B_1 \cap \Gamma(f_i) = \emptyset$ که متناقض با

$(a,b) \in cl(\Gamma(f_i))$ می‌باشد. در نتیجه $(A \times R^n) \cap \bigcup_{i=1}^{k} cl(\Gamma(f_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$.

حال چون A موضعاً بسته است پس حجره B موجود است که $A = B \cap cl(A)$. داریم:

$$B \times R^n \cap cl(\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)) = B \times R^n \cap \bigcup_{i=1}^{k} cl(\Gamma(f_i)) \subseteq (B \cap cl(A)) \times R^n \cap \bigcup_{i=1}^{k} cl(\Gamma(f_i))$$

$$= (A \times R^n) \cap \bigcup_{i=1}^{k} cl(\Gamma(f_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$$

حال فرض کنید $x \in R^m$ دلخواه باشد و $f_x : R^n \to R^m \times R^n$ یک تابع با ضابطه‌ی $f_x(y) = (x,y)$ باشد. تابع f_x پیوسته است. اگر $C \subseteq R^{m+n}$ ساخت‌پذیر باشد، آن‌گاه $f_x^{-1}(C) = C_x$ ساخت‌پذیر است.

(ج) فرض کنید $A \subseteq R^m$ ساخت‌پذیر باشد. طبق قسمت (ب)، $A = \bigcup_{i=1}^{k} B_j$ که در آن مجموعه‌های B_j موضعاً بسته هستند. با توجه به این‌که به ازای هر $j \in \{1,...,k\}$ تابع $f_i \mid_{B_j}: B_j \longrightarrow R^n$ پیوسته و مجموعه B_j موضعاً بسته است، لذا طبق قسمت قبل خواهیم داشت $\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i \mid_{B_j})$ موضعاً بسته است. از طرفی

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma(f_i \mid_{B_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i \mid_{B_j})$$

در نتیجه طبق قسمت (ب)، $\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$ ساخت‌پذیر است.

(چ) بنا به فرض، مجموعه $A = \bigcup_{t=1}^{j} A_t$ و مجموعه $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ است. لذا

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(B_i) = (\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(B_i)) \cap (\bigcup_{t=1}^{j} A_t) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{t=1}^{j} (f^{-1}(B_i) \cap A_t) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{t=1}^{j} (f|_{A_t})^{-1}(B_i)$$

اگر مجموعه ساخت‌پذیر $C \subseteq R^{n+m}$ برابر اجتماعی از k مجموعه موضعاً بسته باشد، آن‌گاه برای هر $x \in R^m$، مجموعه $C_x = f_x^{-1}(C)$ برابر اجتماع k مجموعه موضعاً بسته است. لازم به یادآوری است که $f_x : R^n \to R^{m+n}$ به صورت $f_x(y) = (x,y)$ تعریف می‌شود.

(ح) اثبات به استقرا روی بعد سلول. برای $m = 1$ حکم بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای