بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان:

جبرهای لی مقدماتی و E_ جبرها

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سالمکار

استاد مشاور:

دکتر مسعود طوسی

نگارنده:

لیلا گودرزی

مهرماه ۸۸

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۹۸۸۴/۲۰۰/د مورخ ۸۸/۷/۵ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: خانم لیلا گودرزی شماره شناسنامه: ۳۸۴۷ صادره از: بروجرد متولد: ۱۳۶۲ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: ریاضی محض

با عنوان:

جبرهای لی مقدماتی و $\mathbb{E}$- جبرها

به راهنمایی:

آقای دکتر علیرضا سالمکار

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۸/۷/۴ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره **۱۸/۷۵ (هیجده و هفتادوپنج)** درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	
۲- **استاد مشاور:** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	
۳- **داور** : آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	
۴- **داور:** خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده	استادیار	شهید بهشتی	
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که فرصت مطالعه و تحقیق را به من ارزانی داشت و مجالی عنایت فرمود تا با بهره‌گیری از محضر استادانی فرهیخته و با اخلاق، نگارش این مشق را به پایان برسانم.

انجام این پژوهش را مدیون همه کسانی هستم که درکسوت استاد، دوست و یا به هر شکل دیگری مرا یاری کردند.

هر چند ذکر نام همه این بزرگواران از توانم خارج است اما بر خود واجب می‌دانم ازکسانی که در انجام این پژوهش نقش بسزایی داشته‌اند با ذکر نام قدردانی کنم.

بیش از همه، مراتب سپاس و قدردانی خود را نثار پدر و مادر و خانواده عزیزم می‌دارم که با حمایت‌ها و تشویق‌های بی‌دریغشان توانی مضاعف توأم با آسودگی خاطر برای من به ارمغان آوردند و هر چه دارم از دعای خیر ایشان است.

از استاد بزرگوار و گرانقدر خود، جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار که با رهنمودهای دلسوزانه و ارزشمند خویش، راهنمایی مشفق و با حوصله بودند، تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر مسعود طوسی که ضمن قبول مشاوره این پایان‌نامه با نگاهی علمی و دقیق بر غنای کار افزودند تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می‌دارم که مراتب سپاس و قدردانی خود را از اساتید عزیز جناب آقای دکتر ابراهیمی و سرکار خانم دکتر کرمزاده به سبب قبول زحمت داوری پایان‌نامه ابراز دارم.

از جناب آقای عدالت‌زاده که در مراحل مختلف ازکمک‌ها و نظراتشان بهره‌های فراوان بردم تشکر و قدردانی می‌کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمدزاده و دوستان عزیزم به خاطر همراهی در طول این مدت نیز تشکر

می‌نمایم.

در پایان پیشاپیش از همه کسانی که به هر طریق باگوشزد نمودن اشکالات این پژوهش در انجام هر چه بهتر مطالعات بعدی اینجانب را مورد لطف و عنایت خود قرار خواهند داد سپاسگزاری می‌نمایم.

چکیده

فرض کنیم L یک جبر لی متناهی بعد روی میدان F باشد. در این صورت L یک جبر لی ϕـآزاد نامیده می‌شود هرگاه $\phi(L) = \circ$، که در آن $\phi(L)$ ایدآل فراتینی L است .

در این تحقیق شرایط لازم و کافی برای ϕـآزاد بودن یک جبر لی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و نشان داده خواهد شد که جبر لی L ، ϕـآزاد است اگر و فقط اگر $L = B \dot{+} (S \oplus C)$ که B ایدآل آبلی، C زیرجبر آبلی و S یک زیرجبر نیم‌ساده از L است.

در ادامه ساختار جبرهای لی مقدماتی، یعنی جبرهای لی که همه زیرجبرهایشان ϕ ـآزاد هستند، مشخص خواهد شد. همچنین نشان داده خواهد شد که جبرهای لی مقدماتی ارتباط نزدیکی با Eـجبرها دارند و در این راستا اثبات خواهد شد که L یک Eـجبر است اگر وفقط اگر $L/\phi(L)$ مقدماتی باشد.

سرانجام نشان می‌دهیم که هر جبر لی قویاً حلپذیر یک Eـجبر است و البته عکس آن نیز برای جبرهای لی حلپذیر روی یک میدان کامل ثابت می‌شود.

اغلب این مطالب برگرفته از دو مقاله به نام‌های «جبرهای لی مقدماتی» و «جبرهای لی مقدماتی و Aـجبرهای لی» است.

فهرست مطالب

مقدمه

در ۱۹۶۵، بچتل مفهوم گروه‌های مقدماتی را معرفی و خواص و ساختار آن‌ها را تعیین نمود. در ۱۹۷۳ استیتزینگر و تاورز مشابه با مفهوم فوق، جبرهای لی مقدماتی (که موضوع اصلی این پایان‌نامه است) را معرفی نمودند.

اما درک درست از جبرهای لی مقدماتی نیاز به آشنایی با زیرجبر فراتینی دارد که در مورد این مفهوم نیز افراد بسیاری از جمله مارشال و برنز مقالات متعددی چاپ کردند که در این مقالات، تقریباً تمام ویژگی‌های زیرجبر فراتینی مشخص شده است.

از جمله مطالب مهمی که استیتزینگر [۱۰] آورده و در این پایان‌نامه نیز به آن اشاره خواهد شد، تجزیه‌ای از جبرهای لی ϕـآزاد روی میدان از مشخصه صفر است که این کار با استفاده از زیرجبر فراتینی انجام

می‌شود. در سال ۱۹۷۳، تاورز [۱۱] جبرهای لی و جبرهای شرکت‌پذیر و غیرشرکت‌پذیر را مورد بررسی قرار داد و نظریه فراتینی را برای همه این جبرها بیان کرد که در فصل دوم این پایان‌نامه بخشی از کار تاورز ذکر می‌شود که اغلب مربوط به جبرهای لی است.

کار اصلی ما بررسی دو مقاله از تاورز در زمینه جبرهای لی مقدماتی است که البته در کنار آن از مقالاتی دیگر از مارشال، استیتزینگر و خود تاورز نیز استفاده می‌شود. مقالات بررسی شده در این پایان‌نامه عبارتند از: «جبرهای لی مقدماتی[۱] » و «جبرهای لی مقدماتی و Aـجبرهای لی[۲]». این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است که در فصل اول، مقدمات و تعاریف اولیه موردنیاز برای فصول بعد را می‌آوریم. در فصل دوم، بخشی از کارهای مارشال، استیتزینگر و تاورز ([۱۱ ,۱۰ ,۷]) را بیان می‌کنیم. این فصل شامل دو بخش است . در بخش اول، زیرجبر فراتینی را تعریف کرده و خواص و قضایای مقدماتی از آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش دوم، جبرهای لی ϕـآزاد را معرفی و قضایای مرتبط با آن را ذکر می‌نماییم.

فصل سوم به معرفی جبرهای لی مقدماتی اختصاص دارد. در این فصل خواهیم دید که کلاس جبرهای لی مقدماتی دقیقاً مرتبط است با کلاس Eـجبرها که توسط استیتزینگر در سال ۱۹۷۰ معرفی شد. همچنین نشان می‌دهیم که ساختار جبرهای لی مقدماتی روی میدان‌های بسته جبری از مشخصه صفر به طور کامل مشخص می‌شوند. همچنین بررسی خواهیم کرد که این نتیجه روی هر میدان بسته جبری از مشخصه مخالف ۲ و ۳ نیز درست باقی می‌ماند که این یکی از مطالب مهمی است که درپایان فصل سوم به آن اشاره می‌کنیم. به علاوه ما ثابت می‌کنیم که جبرلی L یک Eـجبر است اگر و فقط اگر $L/\phi(L)$ مقدماتی باشد.

---

۱ Elementary Lie algebras

۲ Elementary Lie algebras and Lie A-algebras

توجه: لازم به ذکر است که در طول این پایان‌نامه همواره L نشان‌دهنده یک جبر لی متناهی بعد خواهد بود.

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز برای مطالعه این پایان‌نامه گردآوری شده است. این فصل مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول، بعضی تعاریف و نتایج مقدماتی درباره جبرهای لی آورده شده است و در بخش دوم نیز با مفاهیم زیرجبر کارتان و تجزیه فضای ریشه آشنا خواهیم شد.

۱-۱ تعاریف و نتایج مقدماتی از جبرهای لی

در این بخش، به بیان بعضی تعاریف ونتایج مقدماتی درباره جبرهای لی می‌پردازیم که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر و یافتن برهان قضایا، می‌توان به مراجع [۴]، [۵] و [۶] مراجعه نمود.

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت نگاشت $f : V \times V \to V$ را **دوخطی** گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in V$ و $a, b \in F$،

$$f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z),$$

$$f(x, ay + bz) = af(x, y) + bf(x, z).$$

تعریف ۱-۱-۲ فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت A را یک جبر می‌نامیم هرگاه نگاشتی دوخطی مانند f روی A تعریف شده باشد. در این حالت $f(a, b)$ را با ab نمایش می دهیم. A را **شرکت‌پذیر** نامیم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in A$، داشته باشیم $(ab)c = a(bc)$.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنیم L یک فضای برداری با نگاشت دوخطی $[-, -] : L \times L \to L$ باشد که به هر $x, y \in L$، بردار $[x, y]$ را نسبت می‌دهد.

در این صورت L را یک **جبر لی** می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$،

الف) $[x, x] = 0$؛

ب) $J(x, y, z) := [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$. (اتحاد ژاکوبی)

$[x, y]$ را حاصلضرب لی x و y می‌نامیم. از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که برای هر $x, y \in L$،

$[x, y] = -[y, x]$.

جبر لی L را از بُعد متناهی نامّیم هرگاه L به عنوان فضای برداری از بُعد متناهی باشد.

مثال ۱-۱-۴ فرض کنیم A یک جبر شرکت‌پذیر باشد. اگر به ازای هر $a, b \in A$، تعریف کنیم

$$[a, b] = ab - ba,$$

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که A همراه با این عمل دارای ساختار جبر لی است که آن را معمولاً با $[A]$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۵ فرض کنیم $M_n(F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F باشد. به ازای هر $A, B \in M_n(F)$، حاصلضرب لی را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = AB - BA.$$

بنابر مثال قبل $M_n(F)$، به همراه عمل فوق تشکیل یک جبر لی روی میدان F می‌دهد.

مثال ۱-۱-۶ فضای برداری $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. به سادگی بررسی می‌شود که $\mathbb{R}^3$ همراه با عمل تعریف شده در زیر دارای ساختار جبر لی است :

به ازای هر $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$ در $\mathbb{R}^3$،

$$[X, Y] = X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1),$$

که در آن $X \times Y$ همان حاصل‌ضرب خارجی دو بردار است .

مثال ۱-۱-۷ جبر لی $H(n)$ از بعد $۲n+۱$ با پایه $\{x_۱,\dots,x_n,y_۱,\dots,y_n,z\}$ که ضرب لی در آن به صورت $[x_i,y_i]=z$ و بقیه ضربها صفر هستند را جبر لی **هیسنبرگ**[۱] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۸ اگر L یک جبر لی از بُعد متناهی روی میدان F با پایه $\beta=\{x_۱,\dots,x_n\}$ باشد، آنگاه به ازای هر $۱\le i,j\le n$ اسکالرهایی مانند a_{ij}^t وجود دارند به‌طوری که

$$[x_i,x_j]=\sum_{t=۱}^{n}a_{ij}^t x_t$$

مجموعه اسکالرهای a_{ij}^t را **ساختار ثابت** برای L نسبت به پایه β می‌گوییم که به‌وضوح، این اسکالرها به پایه β کاملاً بستگی دارند. بدیهی است که برای مشخص نمودن ضرب لی، کافی است مقادیر a_{ij}^t ها معلوم باشند. اما با توجه به شرایط $[x_i,x_i]=۰$ و $[x_i,x_j]=-[x_j,x_i]$ در جبرهای لی، کافی است این مقادیر به ازای $۱\le i<j\le n$ مشخص شوند.

تعریف ۱-۱-۹ فرض کنیم L یک جبر لی روی میدان F باشد. در این صورت زیرفضای $H\subseteq L$ را **زیرجبر لی** نامیده و با نماد $H\le L$ نشان می دهیم هرگاه H تحت عمل القا شده از L دارای ساختار جبر لی باشد. همچنین زیرفضای I را **ایده‌آل** L نامیده و با $I\lhd L$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر $x\in I$ و $y\in L$، $[x,y]\in I$. به‌وضوح هر ایده‌آل، یک زیرجبر است.

با استفاده از ایدآل I از L می توان **جبر لی خارج قسمتی** L/I را تعریف نمود. همچنین جبر لی L را **ساده** نامیم اگر تنها ایده‌آلهای آن $\{۰\}$ و L باشند.

اگر I یک ایدآل از جبر لی L باشد، آنگاه یک تناظر دوسویی بین ایدآل های L/I و ایده‌آلهایی از L که شامل I هستند، وجود دارد.

[۱] Heisenberg

لم ۱-۱-۱۰ اگر H و K دو زیرجبر از جبر لی L باشند، آنگاه مجموعه‌های

$$H + K = \{h + k \mid h \in H, k \in K\},$$

$$[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

زیرجبرهایی از L هستند که به ترتیب **زیرجبرهای حاصل‌جمع و جابجاگر** H و K نامیده می‌شوند.

حاصل‌جمع مستقیم جبرهای لی L_1 و L_2 را که با $L_1 \oplus L_2$ نمایش می‌دهیم به‌صورت

$$L_1 \oplus L_2 = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \in L_1 \ , \ l_2 \in L_2\}$$

همراه با عمل ضرب زیر تعریف می‌شود

$$[(l_1, l_2), (l_3, l_4)] = ([l_1, l_3], [l_2, l_4]).$$

تعریف ۱-۱-۱۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند. در این صورت تبدیل خطی $\varphi : L_1 \to L_2$ را یک **همریختی (لی)** گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in L_1$،

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

(توجه شود که براکت سمت چپ در تساوی بالا در L_1 وبراکت دوم در L_2 در نظر گرفته شده است.) یک همریختی را **یکریختی** گوییم هرگاه دوسویی باشد و یک یکریختی از یک جبر لی L به خود L را یک **خودریختی** گوییم.

چون ضرب و معکوس خودریختی‌ها، خودریختی است، لذا خودریختی‌های L تشکیل یک گروه می‌دهند که با $Aut(L)$ نشان داده می‌شود.

به آسانی دیده می‌شود که اگر φ یک همریختی باشد، هسته φ، $\ker\varphi$، یک ایدآل از L_1 و برد φ ، $\mathrm{Im}\varphi$، یک زیرجبر لی L_2 هستند. برای هر ایدآل I در L، همریختی $\pi : L \to L/I$ با ضابطه $\varphi(l) = l + I$ را بروریختی **طبیعی** می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۱۲ ۱) هرگاه $\varphi : L_1 \to L_2$ یک همریختی جبرهای لی باشد، آنگاه $\mathrm{Im}\varphi \cong \dfrac{L_1}{\ker\varphi}$.

۲) هرگاه I, J ایده‌آل‌هایی از جبر لی L باشند، آنگاه $\dfrac{I}{I\cap J} \cong \dfrac{I+J}{J}$.

۳) هرگاه I, J ایده‌آل‌هایی از جبر لی L باشند به قسمی که $I \subseteq J$ آنگاه J/I ایدآلی از L/I است و

$$\frac{L/I}{J/I} \cong \frac{L}{J}$$

تعریف ۱-۱-۱۳ ۱) فرض کنیم L یک جبر لی روی میدان F باشد. برای $x \in L$، نگاشت خطی $ad_L x : L \to L$ با ضابطه $ad_L x(y) = [x, y]$، به ازای هر $y \in L$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت، **نگاشت الحاقی مشخص شده با** x نامیده می‌شود.

۲)فرض کنیم A یک جبر باشد، در این صورت یک **مشتق** d از A یک نگاشت خطی $d : A \to A$ است که برای هر $x, y \in A$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

مجموعه همه مشتق‌های A را با $Der(A)$ نمایش می‌دهیم. حال، اگر L یک جبر لی باشد، نگاشت $ad_L x : L \to L$ یک مشتق است که مشتق‌های به این فرم را **مشتق داخلی** گویند. مجموعه همه مشتق‌های داخلی L را با $Ad(L)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۴ I را ایدآل مشخصه L گویند هرگاه برای هر $\varphi \in Der(L)$، داشته باشیم: $\varphi(I) \subseteq I$، یعنی I تحت φ پایا باشد.

توجه کنید که اگر I ایدآل مشخصه L باشد، آنگاه I ایدآل L نیز هست ، یعنی مشخصه بودن، ایدآل بودن را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱-۱-۱۵ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند و $\theta : L_1 \to Der(L_2)$ یک همریختی جبرهای لی باشد. ما می‌توانیم یک ساختار جبری روی فضای برداری $L_1 \dot{+} L_2$ تعریف کنیم با قرار دادن ضرب زیر:

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + \theta(x_1)(y_2) + \theta(y_1)(x_2) + [x_2, y_2]$$

که $x_1, y_1 \in L_1$ و $x_2, y_2 \in L_2$.

ضرب تعریف شده در بالا، $L_1 \dot{+} L_2$ را تبدیل به یک جبر لی می‌کند. حال جبر لی $L_1 \dot{+} L_2$ به همراه این ضرب را **جمع نیم مستقیم** L_1 و L_2 گوییم و با $L_1 \rtimes L_2$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۶ فرض کنیم L یک جبر لی و A یک ایدآل L باشد. در این صورت L را روی A شکافنده گویند هرگاه زیرجبر B از L موجود باشد به قسمی که $L = A \rtimes B$.

لم ۱-۱-۱۷ فرض کنیم $L = A \oplus B = A \oplus C$ و L متناهی بعد باشد. در این صورت $B = C$.

تعریف ۱-۱-۱۸ جبر لی L را آبلی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in L$، $[x, y] = 0$. واضح است که هر فضای برداری مانند V را می‌توان به عنوان یک جبر لی آبلی در نظر گرفت که در آن ضرب لی به صورت زیر تعریف شده است: به ازای هر $a, b \in V$، $[a, b] = 0$.

همچنین ملاحظه می‌شود که اگر A یک جبر شرکت پذیر آبلی باشد، آنگاه $[A]$، یک جبر لی آبلی خواهد بود.

تعریف ۱-۱-۱۹ فرض کنیم L یک جبر لی باشد. در این صورت **مرکز** L را به صورت

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x,y] = 0 \ \forall y \in L\}$$

و **مشتق** آن را به صورت $L^2 = [L,L]$ تعریف می‌کنیم. اگر $L = L^2$، آنگاه L را یک جبرلی **کامل** می‌نامند. به سادگی دیده می‌شود که $Z(L)$ و L^2 ایده‌آل‌هایی از L هستند و L/L^2 یک جبر لی آبلی است. همچنین اگر H یک زیرفضای L باشد، آنگاه **نرمال‌ساز** H در L را به صورت

$$N_L(H) = \{x \in L \mid \forall h \in H \quad [x,h] \in H\}$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از اتحاد ژاکوبی می‌توان نشان داد که نرمال‌ساز H در L یک زیرجبر L است و در حقیقت بزرگ‌ترین زیرجبر L است که H در آن یک ایدآل است.

همچنین اگر H یک ایدآل در L باشد، آنگاه $N_L(H) = L$.

تعریف ۱-۱-۲۰ فرض کنیم L جبر لی دلخواهی باشد.

۱) اگر قرار دهیم $L^1 = L$ و برای هر $n \geq 1$، $L^{n+1} = [L^n, L]$ ، آنگاه یک زنجیر از ایده‌آل‌ها به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^n \supseteq \ldots$$

که آن را **سری مرکزی پایینی** L می‌نامیم.

۲) اگر قرار دهیم $L^{(0)} = L$ و برای هر $n \geq 1$، $L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]$، آنگاه سری

$$L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(n)} \supseteq \ldots$$