دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

استفاده از بهینه‌سازی هجوم پرندگان برای تحلیل پویا در روندهای شیمیایی

استاد راهنما

حسین خیری

استاد مشاور

مهرداد لکستانی

پژوهشگر

محسن شرفی میاب

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

خدایا، اگر اراده کنی که ما را بیامرزی این آمرزش نتیجه‌ی فضل توست، و اگر خواست تو کیفر دادن ما باشد، این کیفر هم از عدالت توست. بر ما منّت گذار و در کار بخشش خود سخت مگیر. از گناهمان درگذر و ما را از عذاب خود رهایی ده که ما را طاقت عدل تو نیست، و بی بخشایش تو هیچ یک از ما را امید نجات نباشد.

ای بی نیاز بی نیازان، اینک ما بندگان تو در پیشگاه توایم، و من از همه به تو محتاج ترم. پس به توانگری خویش، تهی دستی ما را چاره‌ای ساز و احسان خویش را از ما دریغ مدار آن گونه که نومید گردیم؛ که اگر چنین کنی، آن کس که از تو نیک بختی خواسته، بد بخت شود، و آن کس که از احسان تو چشم بخشش داشته، تهی دست ماند.

با چنین حال نومیدی، پیش چه کسی رویم و روی نیاز به کدامین درگاه بریم؟ خدایا، تو منزّهی، و ما آن بیچارگانیم که بر آوردن خواست ایشان را واجب کرده‌ای، و آن رنج دیدگانیم که برداشتن رنج ایشان را وعده فرموده‌ای.

خواست تو را سزاوارتر، و بزرگی تو را شایسته‌تر آن است که بر خواستار رحمت خود، رحمت آوری، و آن کس را که از تو یاری طلبد، فریادرس باشی. پس بر زاری و نیاز ما رحمت آور، و اکنون که خویشتن را بر آستان تو افکنده‌ایم، بی نیازمان فرما.

خدایا، آن دم که از شیطان فرمانبری کردیم و از تو نافرمانی، شیطان به شادی پرداخت. پس بر محمد و خاندانش درود فرست، و اینک که ما او را برای خاطر تو رها کرده‌ایم و به سوی تو آمده‌ایم، دیگر به گناه کردن ما شاد مکن.

مناجات امام سجاد (ع)

تقدیم به:

پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت،

از رفتارشان محبت،

و

از صبرشان ایستادگی را آموختم.

بنام خدا

و مَن لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **حسین خیری** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **مهرداد لکستانی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر **علی‌اصغر جدیری** که داوری این پایان‌نامه را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
همچنین از خانم **وجیهه وفائی** و خانم **کشتکار** به خاطر زحمات و کمک‌های بی‌دریغشان در جمع آوری این پایان‌نامه نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم.
در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

محسن شرفی میاب
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شرفی میاب نام: محسن

عنوان: استفاده از بهینه‌سازی هجوم پرندگان برای تحلیل پویا در روندهای شیمیایی

استاد راهنما : حسین خیری

استاد مشاور : مهرداد لکستانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۷

کلید واژه‌ها: بهینه سازی هجوم پرندگان، رآکتور شیمیایی، سینتیک، انشعاب، آشوب، تحلیل دینامیکی، نوسان.

چکیده

در این پایان‌نامه از روش بهینه‌سازی هجوم پرندگان برای تخمین زدن نواحی پارامتری، که در آن رفتارهای دینامیکی متفاوتی از قبیل رفتارهای تناوبی، نوسانات دو تناوبی و آشوب در مدل‌های پویا (سیستم های دینامیکی) قابل مشاهده می‌باشند، استفاده می‌شود. الگوریتم پیشنهاد شده شامل دو گام اساسی می‌باشد: ابتدا ناحیه‌ای که جواب مورد نظر را می‌توان در آن یافت به طور نادقیق تخمین زده و سپس آن را اصلاح می‌کنیم. گام اصلاح کننده، راه را برای پیدا کردن جواب‌های ناپایداری که در کنار جاذب‌های پایدار وجود دارند هموار می‌کند. در این روش نیازی به تحلیل مقدماتی انشعابات نمی‌باشد. شبیه‌سازی‌های انجام شده برای مدل‌های دینامیکی متفاوت نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهاد شده به‌راستی قابلیت معین کردن پدیده‌های دینامیکی متفاوت را در فضای پارامتری دارا می‌باشد و همچنین به کسانی که علاقه‌مند به افزایش سرعت بررسی انشعابات دینامیکی با روش‌های قدیمی می‌باشند کمک می‌کند.

فهرست مطالب

مقدمه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز با گذشت زمان شرح می‌دهد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد. از این رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

این پایان‌نامه که براساس مرجع [۱۷] تنظیم شده است، شامل چهار فصل است و در آن به تحلیل دینامیکی واکنش‌های شیمیایی پرداخته می‌شود.

در فصل اول، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی پیوسته از قبیل نقطه ثابت، پایداری نقطه ثابت، تصاویر فاز سیستم‌های خطی و غیرخطی، قضیه پایداری لیاپانوف، شار، نقطه حدی، دور حدی و غیره بیان شده است. سپس، مفهوم انشعاب شرح داده شده است که یکی از مهمترین موضوع‌های مورد مطالعه سیستم‌های دینامیکی است. در آخر، مطالب ذکر شده به سیستم‌های دینامیکی گسسته تعمیم داده شده است.

در فصل دوم، مقدماتی از مفاهیم شیمی و رآکتور CSTR و نحوه عملکرد و معادلات مربوط به آن بیان شده است.

در فصل سوم، الگوریتم بهینه سازی هجوم پرندگان معرفی شده است و نحوه بهینه کردن جواب

یک تابع و معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم، با استفاده از الگوریتم بهینه سازی هجوم پرندگان سیستم‌های دینامیکی واکنش‌های شیمیایی را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم و انشعاب و آشوب این سیستم‌ها را به دست آورده و نتیجه گیری می‌کنیم.

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq \mathbb{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود، یعنی $t \in \mathbb{Z}$، سیستم دینامیکی را **گسسته** گویند. اگر زمان به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in \mathbb{R}$، سیستم دینامیکی را **پیوسته** گویند.

در حالت کلی، سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$، $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن را سیستم غیرخطی گویند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین، لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

در این فصل، ابتدا به تحلیل سیستم‌های دینامیکی پیوسته می‌پردازیم و در بخش ۹.۱ سیستم‌های گسسته را در نظر می‌گیریم. یک روش مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی، پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره

امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است. قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجودی و منحصر بفردی جواب آن آگاه باشیم. از این رو، لازم است روشی بیان شود که وجودی جواب و منحصر بفردی آن را بدون حل سیستم تضمین کند.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$، هرگاه X تابعی پیوسته باشد. همچنین، گویند $X \in C^k(D)$، $k > 0$، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه kام موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۲.۰.۱ (قضیه وجودی و منحصر بفردی جواب)**.** *فرض کنید D زیرمجموعه بازی در $\mathbb{R}^{n+1}$ شامل x_0 باشد. اگر $X \in C(D)$، آنگاه مساله مقدار اولیه*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$، آنگاه مساله دارای جواب منحصر بفرد روی I است.

برهان. رجوع کنید به [۱۴]. □

تذکر ۳.۰.۱. در قضیه ۲.۰.۱، I بزرگ‌ترین بازه‌ای است که مساله مقدار اولیه در آن دارای جواب است. بازه I را **بازه ماکزیمال** می‌گویند.

در این فصل، به بررسی رفتار کیفی نوع خاصی از سیستم‌ها به نام سیستم‌های خودگردان می‌پردازیم؛ زیرا هر سیستم غیرخودگردان با اضافه نمودن یک متغیر مانند $x_{n+1} = t$ به یک سیستم خودگردان تبدیل می‌شود.

تعریف ۴.۰.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{۱.۱}$$

که متغیر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و به طور صریح در تابع $X(x)$ در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

۱.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

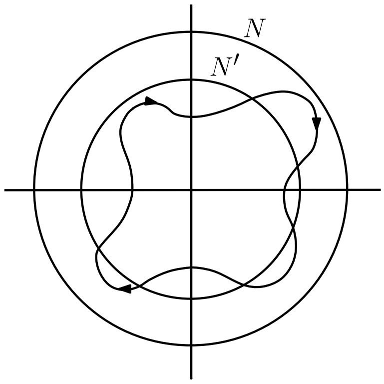
تعریف ۱.۱.۱. سیستم خودگردان (۱.۱) را در نظر بگیرید. یک **نقطه ثابت** (نقطه تعادل، نقطه بحرانی)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۲.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۱.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۱.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مساله هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد.

در ادامه بحث، نقاط ثابت را منفرد فرض می‌کنیم مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. نقاط ثابت در بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و براساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۱.۱) در همسایگی هر نقطه ثابت، فقط و فقط به صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۳.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **پایدار** گویند هرگاه برای هر همسایگی N از x_0 یک همسایگی کوچک‌تر $N' \subseteq N$ از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N'



شکل ۱.۱ : همسایگی‌های N و N' در تعریف ۳.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.

می‌شود، با افزایش t، در N باقی بماند. شکل ۱.۱ را ببینید.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **به طور مجانبی پایدار** گویند هرگاه

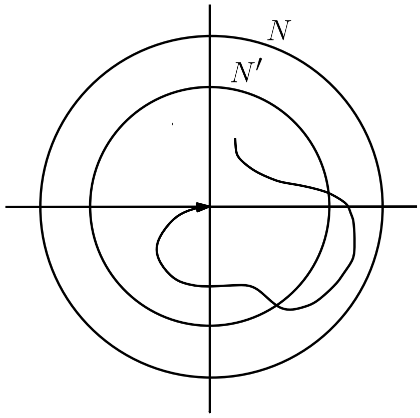
۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی N از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t، به x_0 میل کند.

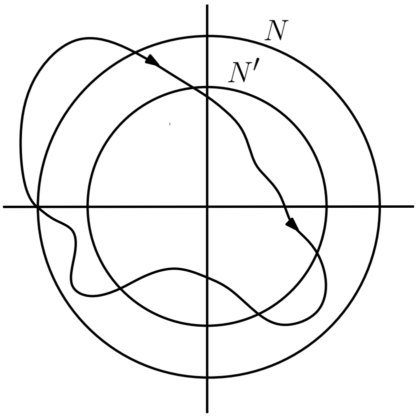
توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه کافی در نزدیکی x_0 باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب می‌کند که با افزایش t، هر مسیری به اندازه کافی به x_0 نزدیک شود. این خاصیت، در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

تعریف ۵.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **پایدار خنثی** گویند هرگاه پایدار باشد اما به طور مجانبی پایدار نباشد.

تعریف ۶.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **ناپایدار** گویند هرگاه پایدار نباشد.



شکل ۲.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۴.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.



شکل ۳.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۶.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.

به عبارت دیگر، یک همسایگی N از نقطه ثابت x_0 وجود دارد به طوری که برای هر همسایگی $N' \subseteq N$، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد N' می‌شود ولی در N باقی نمی‌ماند. شکل ۳.۱ را ببینید.

تعریف ۷.۱.۱. نقاط ثابت به طور مجانبی پایدار را **جاذب** و نقاط ثابت ناپایدار را **دافع** می‌نامند.

نقاط ثابت معادله خودگردان

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}, \tag{۲.۱}$$

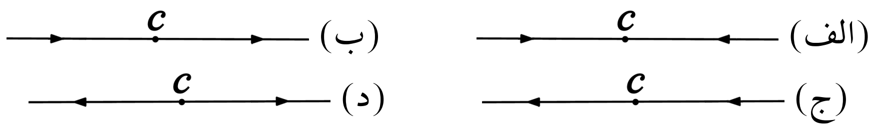
را می‌توان بر اساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع جاذب، دافع و گذر دسته‌بندی کرد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان (۲.۱) باشد. گوییم

- c **جاذب** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c به آن میل کنند؛

- c **دافع** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c از آن دور شوند؛
- c **گذر** است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

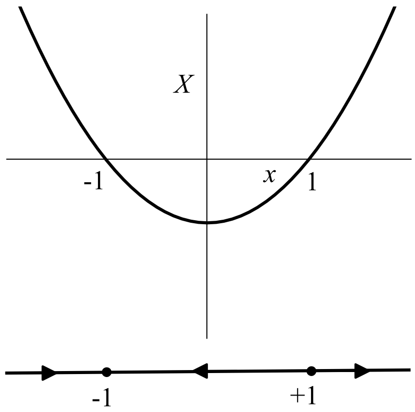
شکل ۴.۱ انواع نقاط ثابت در یک معادله دیفرانسیل را نشان می‌دهد. رفتار کیفی هر معادله دیفرانسیل با یک نقطه ثابت، با یکی از شکل‌های نشان داده شده در شکل ۴.۱ متناظر است. در نتیجه، رفتار هر معادله خودگردان به طور کامل با ماهیت نقاط ثابت آن تعیین می‌شود. این نمایش از رفتار جواب را، **خط فاز** می‌گویند.



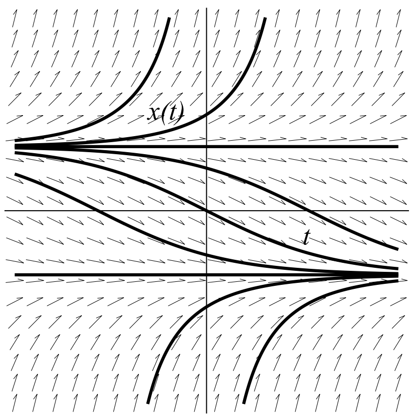
شکل ۴.۱: چهار خط فاز ممکنِ متناظر با یک نقطه ثابت منفرد. نقطه ثابت مورد نظر در (الف)، جاذب، در (ب) و (ج)، گذر و در (د)، دافع است.

برای رسم خط فاز، باید نقاط ثابت و بازه‌ای را که جواب‌ها در آن افزایش و یا کاهش می‌یابند، بدانیم. به عبارتی، باید نقاطی که $X(x) = 0$، بازه‌ای که $X(x) > 0$ و بازه‌ای که $X(x) < 0$ است را بیابیم. بنابراین، برای رسم خط فاز ، فقط اطلاعات کیفی در مورد تابع $X(x)$ نیاز است. از این رو، می‌توان با رسم نمودار $X(x)$، تمامی این اطلاعات را به دست آورد. شکل ۵.۱، نمودار تابع $X(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ و خط فاز متناظر با آن را نشان می‌دهد. با استفاده از خط فاز، می‌توان طرحی کیفی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $\dot{x} = X(x)$ را به دست آورد. شکل ۶.۱ را ببینید.

تعریف ۹.۱.۱. دو معادله دیفرانسیل خودگردان به صورت (۲.۱) را **هم‌ارز کیفی** گویند هرگاه تعداد نقاط ثابت یکسان داشته باشند و ترتیب رفتار کیفی نقاط ثابت یا به عبارتی، ماهیت نقاط ثابت، یکسان باشد.



شکل ۱.۵: نمودار تابع $X(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ و خط فاز متناظر با آن.



شکل ۱.۶: منحنی‌های جواب معادله $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

قضیه ۱.۱.۱۰. *فرض کنید c یک نقطه ثابت معادله خودگردان (۱ .۲) باشد. در این صورت،*

۱. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) < 0$، آنگاه c از نوع جاذب است؛*

۲. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) > 0$، آنگاه c از نوع دافع است؛*

۳. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) = 0$، آنگاه برای تعیین نوع نقطه ثابت باید مشتق‌های مرتبه بالا بررسی شود.*

برهان. رجوع کنید به [۱۴]. □

۲.۱ تصاویر فاز سیستم‌های خطی

با توجه به اینکه اغلب سیستم‌های غیرخطی به طور موضعی با سیستم‌های خطی هم‌ارز هستند، لذا با دانستن خواص سیستم‌های خطی، می‌توان خواص طیف وسیعی از سیستم‌ها را مشخص کرد. برای این منظور، در این بخش، از تکنیک‌های تحلیلی و هندسی برای مطالعه سیستم‌های خطی استفاده می‌کنیم. در ادامه فصل، توسیعی از این تکنیک‌ها را برای بررسی رفتار کیفی سیستم‌های غیرخطی ارایه می‌دهیم.

سیستم خطی

$$\dot{x} = X(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{۳.۱}$$

را در نظر بگیرید. این سیستم، با تغییر متغیر $x = Py$ به **سیستم متعارف**

$$\dot{y} = Jy$$

تبدیل می‌شود که در آن، A ماتریس ضرایب در (۳.۱) و J فرم متعارف جردن ماتریس A است به طوری که $J = P^{-1}AP$ است. در واقع، ستون‌های P پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند و y مختصات x نسبت به این پایه است.

از آنجایی که ماتریس‌های A و J متشابه هستند و تشابه یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است، لذا این مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌شود. برای هر دو ماتریس A و J در یک کلاس هم‌ارزی، جواب‌های سیستم‌های $\dot{x} = Ax$ و $\dot{y} = Jy$ با روابط

$$x = Py, \quad P^{-1}AP = J$$

به هم وابسته هستند. بنابراین، اگر یکی از سیستم‌ها حل شود، جواب‌های سایر اعضای کلاس نیز به دست می‌آیند.

تعریف ۱.۲.۱. سیستم خطی (۳.۱) را **ساده** نامند هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد.

اگر سیستم خطی (۳.۱) ساده باشد، آنگاه $x = 0$ تنها جواب سیستم

$$\dot{x} = Ax = 0$$

است. لذا سیستم (۳.۱) فقط یک نقطه ثابت در مبدأ دارد. همچنین، از آنجایی که ماتریس A و ماتریس جردن متناظر با آن، متشابه هستند، پس مقادیر ویژه یکسان دارند. بنابراین، سیستم متعارف متناظر با (۳.۱) نیز ساده است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم خطی (۳.۱) را **غیرساده** گویند هرگاه A منفرد باشد.

به عبارت دیگر، سیستم غیرساده $Ax = 0$، دارای جواب‌های غیربدیهی است و سیستم، به غیر از $x = 0$ نقطه ثابت دیگری نیز دارد. در این حالت، برای سیستم خطی در صفحه، دو امکان وجود دارد: یا رتبه A یک است و یا A صفر است. در حالت اول، خطی از نقاط ثابت وجود دارد که از مبدأ می‌گذرد و در حالت دوم، هر نقطه از صفحه، نقطه ثابت است. از آنجایی که رتبه J با رتبه A یکسان است، بنابراین، سیستم متعارف، رفتار سیستم غیرساده متناظر را نشان می‌دهد.

در ادامه، رفتار کیفی سیستم‌های خطی دو بعدی را بررسی می‌کنیم. همه مفاهیم ارایه شده برای این سیستم‌ها، به راحتی قابل تعمیم به سیستم‌های با بعد بالا است.

سیستم خطی

$$\dot{x} = X(x) = Ax, \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{۴.۱}$$

را در نظر بگیرید.

تعریف ۳.۲.۱. هر جواب از سیستم (۴.۱)، یعنی، $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ توسط یک منحنی در صفحه نشان داده می‌شود. این منحنی‌های جواب، **مسیر فاز** و یا **مدار** نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۲.۱. **تصویر فاز** شکلی دو بعدی است که نشان دهنده رفتار کیفی سیستم بوده و با تغییر t بر حسب x_1 و x_2 در **صفحه فاز** x_1x_2 نشان داده می‌شود.

در این قسمت، ابتدا تصویر فاز سیستم‌های متعارف را بررسی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تصویر فاز سیستم (۴.۱) را با توجه به تصویر فاز سیستم متعارف متناظر به دست آورد. همچنان که خواهیم دید، ماهیت نقطه ثابت نیز در هر دو سیستم، یکسان است.

قضیه ۵.۲.۱. *ماتریس J که در تبدیل سیستم (۴.۱) به سیستم متعارف ظاهر می‌شود، به صورت یکی از چهار حالت*

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \qquad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \qquad J_4 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta > 0$$

است که α، β، λ_0، λ_1 و λ_2 اعداد حقیقی هستند.

برهان. رجوع کنید به [۳]. $\square$

تذکر ۶.۲.۱. در قضیه ۵.۲.۱، ماتریس J_1، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی و متمایز هستند. ماتریس J_2، متناظر با حالتی است که ماتریس A قطری و مقادیر ویژه آن برابر هستند. ماتریس J_3، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A برابر هستند ولی A قطری نیست. ماتریس J_4، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A مختلط مزدوج هستند.

سیستم خطی ساده (۴.۱) را در نظر بگیرید که λ_1 و λ_2 ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه آن هستند و فرض کنید سیستم متعارف ساده متناظر با آن، $\dot{y} = Jy$ باشد. نشان می‌دهیم که ماهیت نقطه ثابت $(0,0)$ از سیستم متعارف ساده، به ماهیت ریشه‌های λ_1 و λ_2 بستگی دارد.

(الف) مقادیر ویژه حقیقی و متمایز. در این حالت، سیستم متعارف به صورت

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1,$$
$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$$

است. این سیستم دارای جواب‌های

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

است که c_1 و c_2 ثابت‌های حقیقی و دلخواه هستند. منحنی‌های جواب از حل معادله

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1}$$

به دست می‌آیند. از این رو، نوع تصاویر فاز با توجه به مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 به صورت زیر خلاصه می‌شود.

- اگر مقادیر ویژه متمایز، حقیقی و مثبت باشند، نقطه ثابت از نوع گره ناپایدار است.
- اگر مقادیر ویژه متمایز، حقیقی و منفی باشند، نقطه ثابت از نوع گره بوده که به طور مجانبی پایدار است.
- اگر یکی از مقادیر ویژه مثبت و دیگری منفی باشد، نقطه ثابت از نوع زینی و ناپایدار است.

تصاویر فاز مربوط به این سه حالت در شکل ۱.۷ رسم شده است.

(ب) مقادیر ویژه حقیقی و برابر. در این حالت، ماتریس‌های متعارف به شکل‌های J_2 و J_3 است. در این صورت، نوع تصاویر فاز با توجه به دو حالت زیر تعیین می‌شود.

- اگر A قطری باشد، نقطه ثابت از نوع گره ستاره است. تصاویر فاز متناظر با این حالت در