دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی محض، گرایش جبر**

**عنوان**

# ایده آل های فازی در نیمگروه های مرتب

استاد راهنما

**دکتر محمود بخشی**

استاد مشاور

**دکتر امیدرضا دهقان**

نگارنده

نرگس زارعی

بهمن ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: زارعی نام: نرگس


عنوان: ایده آل های فازی در نیمگروه های مرتب


استاد راهنما: دکتر محمود بخشی

استاد مشاور: دکتر امیدرضا دهقان



مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: بجنورد دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۷

واژگان کلیدی: نیمگروه مرتب، مجموعه فازی، ایده آل(فازی)، دو-ایده آل(فازی)،شبه-ایده آل (فازی)، $(\in, \in \vee q)$-ایده آل (دو-ایده آل) فازی



**چکیده**

در این پایان نامه، ابتدا نیمگروه های مرتب (منظم،منظم داخلی) را معرفی نموده و برخی خواص آنها را ارائه می دهیم و سپس به تعریف ایده آل در یک نیمگروه مرتب پرداخته و انواع ایده آل، دو-ایده آل (تعمیم یافته) و شبه-ایده آل را معرفی کرده و ویژگی ها و ارتباط بین آنها را بررسی می کنیم.
در ادامه به معرفی ایده آل های فازی پرداخته و انواع مختلف آن را یعنی ایده آل فازی، دو-ایده آل (تعمیم یافته) فازی و شبه-ایده آل فازی را معرفی کرده و ویژگی ها و ارتباط بین آنها را با دقت بیشتری مورد توجه قرار می دهیم. بالاخص نشان می دهیم که در نیمگروه مرتب، هر شبه-ایده آل یک دو ایده آل فازی است ولی عکس آن در حالتی برقرار است که نیمگروه مرتب منظم باشد.
سرانجام با در نظر گرفتن مفاهیم تعلق "$\in$" و شبه- منطبق"q" به معرفی انواع $(\alpha, \beta)$-ایده آل های فازی که $(\alpha, \beta) \in \{\in, q, \in \vee q, \in \wedge q\}$ پرداخته و در ادامه انواع $(\in, \in \vee q)$-ایده آل فازی(دو-ایده آل ) فازی را به طور مجزا بررسی می کنیم.
در انتها بخش های بالایی و پایینی $(\in, \in \vee q)$-ایده آل فازی را معرفی و نتایجی را در مورد آنها بیان می کنیم.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

# خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

**اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست**

**او جانشین همه نداشتن‌هاست...**

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمود بخشی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم ازهمسرمهربانم به پاس محبت های بی دریغش که هرگز فروکش نمی کندوستاره زندگیم امیرعلی که وجودش همه شوروزندگی است.

نرگس زارعی

بهمن ۱۳۹۲

# اظهار نامه

اینجانب نرگس زارعی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم پایه نویسنده پایان نامه "ایده آل های فازی در نیمگروه های مرتب" تحت راهنمایی جناب آقای دکتر محمود بخشی متعهد می شوم:

۱. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

۲. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

۳. مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای در یافت هیچ نوع مدرک یا اعتباری در هیچ جا ارائه نشده است.

۴. کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه بجنورد می باشد و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه بجنورد"و یا " Univercity Bojnord " ذکر شود.

۵. حق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت خواهد شد.

۶. در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

۷. در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

نرگس زارعی
بهمن ۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# مقدمه

زمانی که در سال ۱۹۶۵ پرفسور زاده [۲] اولین مقاله خود را در زمینه فازی تحت عنوان مجموعه های فازی در [۲۶] منتشر کرد، هیچ کس باور نداشت که این جرقه ای خواهد بود که دنیای ریاضیات را متحول کند. اگر بخواهیم نظریه مجموعه های فازی را توضیح دهیم، باید بگوییم نظریه ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیر ها و سیستم هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال ،استنتاج،کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را عدد یک نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد بود. این ایده ی زاده مورد توجه بسیاری از محققان علاقه مند قرار گرفت و زمینه را برای گسترش آن فراهم کرد.

از طرف دیگر، نظریه گروه ها یکی از قدیمی ترین شاخه های جبر مجرد است. اولین کاربرد موثر گروه ها در اوایل قرن نوزدهم توسط کوشی و گالوا ارائه شد. یک گروه عبارت است از جفت مرتب $(G,.)$ که در آن $G$ مجموعه ای ناتهی و $(.)$ عملی است دو تایی به طوری که خاصیت های زیر برقرار باشد.

۱) $G$ گروهوار باشد، ۲) قانون شرکت پذیری، ۳) وجود عنصر همانی، ۴) وجود عنصر معکوس. به منظور اثبات اینکه مجموعه ای مفروض با یک عمل دو تایی تشکیل یک گروه می دهد، لازم است چهار

[۲] L.A.Zadeh

خاصیت بالا را تحقیق کنیم. به هر حال بسیار سودمند است که معیار هایی در اختیار داشته باشیم که به جای تحقیق خواص بالا، بتوانیم با استفاده از آنها گروه بودن یا نبودن یک مجموعه همراه با یک عمل دوتایی را بررسی کنیم. بدین منظور یک نیمگروه را تعریف می کنیم. و سپس با تعریف رابطه ترتیب روی یک نیمگروه، نیمگروه مرتب را بیان می کنیم.

اکنون این سوال به ذهن می رسد که آیا بین مجموعه های فازی و سیستم های جبری ارتباطی وجود دارد؟ نظریه مجموعه های فازی اکنون در بسیاری از ساختارهای جبری مانند شبه گروه ها، حلقه ها، ایده آل ها، مدول ها و فضای برداری و توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته است.

کیوروکی [۳] اولین کسی بود که مجموعه های فازی را روی نیمگروه ها در [ ۱۲،۱۳ ] معرفی کرد. سپس کیهاپلو [۴] و تسینگل [۵] مجموعه های فازی را روی نیمگروه های مرتب در [ ۱۰] بیان کردند.

ایده آل،دو-ایده آل و شبه ایده آل زیر مجموعه هایی از یک نیمگروه هستند که ایده آل اولین بار توسط ددکیند [۶] ، و دو-ایده آل توسط گاد [۷] و فلوس [۸] در [۱] و شبه ایده آل توسط استنفلد [۹] در [۲۱] معرفی شده اند. سپس مفهوم ایده آل های فازی، دو- ایده آل های فازی و شبه ایده آل های فازی توسط کیهاپلو و تسینگل در نیمگروه مرتب تعمیم یافت. اخیراً، کیهاپلو نیمگروه های مرتب(منظم ،منظم داخلی ) را بامفهوم ایده آل های چپ(راست)فازی، دو-ایده آل فازی و شبه-ایده آل فازی در [۵،۹] ارائه کرده است.

ریاضی دانان بسیاری، نیمگروه های مرتب (منظم،منظم داخلی) را با استفاده از ایده آل های چپ(راست) فازی، دو-ایده آل(تعمیم یافته) فازی و شبه-ایده آل فازی در [ ۱۴،۲،۳،۲۳ ] توصیف کرده اند.

مفهوم نقطه فازی از یک نیمگروه مرتب S ، توسط اکسی [۱۰] و تانگ [۱۱] در[۲۵] معرفی شده است و به دنبال

[۳] N.Kuroki
[۴] N.Kehayipulu
[۵] M.Tsingelis
[۶] Dedekind
[۷] R.A.Good
[۸] Flughes
[۹] O.Stienfeld
[۱۰] X.Y.Xie

آن شبیر [۱۲] در [۲۰] نیمگروه های مرتب (منظم) را با استفاده از $(\alpha, \beta)$-ایده آل های فازی که بر پایه "تعلق داشتن" رابطه $(\in)$ و "شبه تطابق با" رابطه (q) بین یک نقطه فازی و زیرنیمگروه فازی است، توصیف می کند که $\alpha, \beta \in \{\in, q, \in \vee q, \in \wedge q\}$.

اخیرا در سال۲۰۱۲ تانگ در [۲۲] بخش های بالایی و پایینی زیر مجموعه های فازی از یک نیمگروه مرتب را تعریف می کند و نیمگروه مرتب (منظم) را با استفاده از تعاریف توصیف می کند و نتایج مرتبط با آن را ارائه می دهد.

[11] J.Tang
[12] M.Shabir

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی می پردازیم؛ مفاهیم نیمگروه مرتب و انواع ایده آل ها در نیمگروه مرتب و برخی نتایج دیگر را ارائه می دهیم. سپس مفاهیم اولیه مجموعه های فازی را بیان می کنیم. برای جزئیات بیشتر می توان به منابع [۷،۲۴،۴،۱۹] مراجعه نمود.

## ۱.۱ نیمگروه های مرتب و ایده آل ها

**تعریف ۱.۱.۱.** مجموعه ناتهی $S$ که یک عمل دو تایی شرکت پذیر (.) روی آن تعریف شده باشد، یک نیمگروه نامیده شده و معمولا بصورت $(S, .)$ نشان داده می شود.

**مثال ۲.۱.۱.** مجموعه اعدادطبیعی $N$ را در نظر میگیریم. می دانیم که جمع دو عدد صحیح مثبت، مجددا یک عدد صحیح مثبت است. لذا، (+)یک عمل دو تایی رو $N$ است. همچنین می دانیم که (+) شرکت پذیر نیز هست. بنابراین $(N, +)$ یک نیمگروه می باشد.

**تعریف ۳.۱.۱.** ساختار $(S, ., \leq)$ که در آن (.) یک عمل دوتایی روی $S$ و $\leq$ یک رابطه دوتایی روی $S$ است، یک نیمگروه مرتب نامیده می شود هرگاه

**(۱)** $(S, .)$ یک نیمگروه باشد،

**(۲)** $(S, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد،

**(۳)** به ازای هر $a, b, x \in S$، $a \leq b$ نتیجه دهد $ax \leq bx$ و $xa \leq xb$.

**مثال ۴.۱.۱.** فرض کنید $S = \{a, b, c\}$ با جدول ضرب و رابطه $\leq$ تعریف شده در زیر باشد.

| . | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

$$\leq := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

در این صورت طبق تعریف $(S,.,\leq)$یک نیمگروه مرتب است.

**تبصره ۵.۱.۱.** *از این پس ، در این پایان نامه، نیمگروه (مرتب) $(S,.)$ $((S,.,\leq))$ را برای راحتی به صورت $S$ نشان می دهیم.*

**تعریف ۶.۱.۱.** [۱۸]: فرض کنیم $S$یک نیمگروه مرتب و $A$ یک زیر مجموعه ناتهی از $S$ باشد. $A$ را یک زیر نیمگروه از $S$ گوییم اگر $A^2 \subseteq A$.

**مثال ۷.۱.۱.** [۱۸]: نیمگروه مرتب $S=\{a,b,c,d\}$ با جدول ضرب و رابطه ترتیب تعریف شده زیر، در نظر می گیریم .

| . | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ |

$$\leq:=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$$

در این صورت مجموعه های زیر، زیر نیمگروه هایی از $S$ هستند.

$\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\}$

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $A,B$ زیرمجموعه هایی از $S$ باشند. در این صورت حاصلضرب $AB$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$AB:=\{ab|a\in A, b\in B\}$$

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. برای $\emptyset\neq A\subseteq S$ تعریف می کنیم.

$$(A]:=\{t\in S|t\leq h,\ \ \exists\ \ h\in A\}$$

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد و $A\subseteq S$ در این صورت تعریف می کنیم.

$$A_a:=\{(y,z)\in S\times S|a\leq yz\}$$

**تعریف ۱.۱.۱۱.** [۵]: نیمگروه مرتب $S$ را منظم گوییم اگر برای هر $a \in S$ وجود داشته باشد $x \in S$ به طوری که $a \leq axa$.

**تعریف ۱.۱.۱۲.** [۵]: نیمگروه مرتب $S$ را منظم داخلی گوییم اگر برای هر $a \in S$ وجود داشته باشد $x, y \in S$ به طوری که $a \leq xa^{۲}y$.

**تعریف ۱.۱.۱۳.** فرض کنید $S$ نیمگروهی مرتب باشد. زیر مجموعه ناتهی $A$ از $S$ را یک ایده آل چپ (راست ) از $S$ گوییم اگر

(۱) $SA \subseteq A$ (به ترتیب $AS \subseteq A$)،

(۲) بازای $a \in A, b \in S$ به طوری که $b \leq a$ داشته باشیم $b \in A$.

$A$ را یک ایده آل از $S$ گوییم اگر هم ایده آل راست و هم ایده آل چپ باشد.

**نمادگذاری ۱.۱.۱۴.** *ایده آل تولید شده توسط $a(a \in S)$ را با $I(a)$ نشان می دهیم، و داریم* $I(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]$.

**مثال ۱.۱.۱۵.** [۱۱]: نیمگروه مرتب $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ همراه با جدول ضرب و رابطه ترتیب تعریف شده زیر در نظر می گیریم.

| . | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $d$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ | $d$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $e$ |
| $d$ | $a$ | $a$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ |
| $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $e$ |
| $f$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |

$$\leq := \{(a, a), (b, b)(c, c), (d, d), (e, e), (f, e), (f, f)\}$$

ایده آل های راست: $\{a,d\},\{a,b,d\},S$

ایده آل های چپ:

$$\{a\},\{d\},\{a,b\},\{a,d\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\},\{,b,d,e,f\},S$$

**لم ۱۶.۱.۱.** *فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.*

(۱) *$S$ منظم داخلی است،*

(۲) *برای هر ایده آل چپ $L$ و هر ایده آل راست $R$ از $S$ داریم $R\cap L\subseteq(LR]$.*

**لم ۱۷.۱.۱.** *نیمگروه مرتب $S$ منظم است اگر و تنها اگر برای هر ایده آل راست $R$ و هر ایده آل چپ $L$ از $S$ داشته باشیم $R\cap L=(RL]$.*

**تعریف ۱۸.۱.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. زیر نیمگروه $B$ از $S$ را یک دو-ایده آل از $S$ گوییم اگر

(۱) $BSB\subseteq B$،

(۲) بازای هر $a\in B, b\in S$، $b\leq a$ نتیجه دهد $b\in B$.

**نمادگذاری ۱۹.۱.۱.** *دو-ایده آل تولید شده توسط $a(a\in S)$ را با $B(a)$ نشان می دهیم و داریم $B(a)=(a\cup a^{2}\cup aSa]$.*

**مثال ۲۰.۱.۱.** نیمگروه مرتب $S=\{a,b,c,d\}$ با جدول ضرب و رابطه ترتیب تعریف شده زیر در نظر میگریم.

| $.$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ |

$$\leq := \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d)\}$$

در این صورت مجموعه های زیر دو-ایده آل هایی از $S$هستند.

$$\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},S$$

**تعریف ۲۱.۱.۱.** زیرمجموعه ناتهی $B$ ازنیمگروه مرتب $S$، را یک دو-ایده آل تعمیم یافته گوییم اگر

(۱) $BSB \subseteq B$،

(۲) بازای هر $a \in B, b \in S$ ،$b \leq a$ نتیجه دهد $b \in B$.

**نمادگذاری ۲۲.۱.۱.** *دو-ایده آل تعمیم یافته، تولید شده توسط $a(a \in S)$ را با $GB(a)$ نشان می دهیم و داریم،* $GB(a) = (a \cup aSa]$.

**لم ۲۳.۱.۱.** *نیمگروه مرتب $S$ منظم است اگر و تنها اگر به ازای هر دو-ایده آل $B$ از $S$ داشته باشیم،* $B = (BSB]$.

**لم ۲۴.۱.۱.** *نیمگروه مرتب $S$ منظم و منظم داخلی است اگر و تنها اگر به ازای هر دو-ایده آل $B$ از $S$ داشته باشیم،* $B = (B^2]$.

**لم ۲۵.۱.۱.** [۵]: *در نیمگروه مرتب $S$ شرایط زیر برقرار است.*

(۱) *برای هر* $A \subseteq S$ *داریم* $A \subseteq (A]$،

(۲) *اگر* $A \subseteq B \subseteq S$ *آنگاه* $(A] \subseteq (B]$،

(۳) *به ازای هر* $A, B \subseteq S$ *داریم* $(A](B] \subseteq (AB]$،

(۴) *به ازای هر* $A \subseteq S$ *داریم* $((A]] = (A]$،

(۵) *برای هر ایده - آل چپ(راست) یا دو -ایده آل* $T$ *از* $S$ *داریم* $(T] = T$،

(۶) *به ازای هر $A, B \subseteq S$ داریم $((A](B]] = (AB]$*.

**لم ۲۶.۱.۱.** *فرض کنیم $S$ نیمگروهی مرتب باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند*

(۱) *$S$ منظم است،*

(۲) *برای هر دو-ایده آل $B$ و هر ایده آل $I$ و هر ایده آل چپ $L$ از $S$ داشته باشیم.*

$$B \cap I \cap L \subseteq (BIL]$$

**لم ۲۷.۱.۱.** *فرض کنیم $S$ نیمگروهی مرتب باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.*

(۱) *$S$ منظم داخلی است،*

(۲) *به ازای هر ایده آل چپ $L$ و هر ایده آل راست $R$ از $S$ ،داشته باشیم*

$$R \cap L \subseteq (LR]$$

**تعریف ۲۸.۱.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. زیر مجموعه ناتهی $Q$ از $S$ را یک شبه -ایده آل گوییم اگر

(۱) $(QS] \cap (SQ] \subseteq Q$،

(۲) بازای هر $a \in Q, b \in S$ ، $b \leq a$ نتیجه دهد $b \in Q$.

**نمادگذاری ۲۹.۱.۱.** *شبه-ایده آل تولید شده توسط $a(a \in S)$ را با $Q(a)$ نشان می دهیم و داریم* $Q(a) = (a \cup (aS \cap Sa)]$.

**مثال ۳۰.۱.۱.** فرض کنید $S = \{a, b, c, d, f\}$ یک نیمگروه مرتب با جدول ضرب زیر باشد.

| . | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $f$ | $c$ | $c$ | $f$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $d$ | $d$ | $b$ |
| $f$ | $a$ | $f$ | $a$ | $c$ | $a$ |

حال رابطه " $\leq$ "را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\leq := \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,f),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f)\}$$

در این صورت مجموعه های

$$\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,f\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,f\},\{a,c,f\},S$$

شبه -ایده آل هایی از $S$ هستند.

**لم ۳۱.۱.۱.** *فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. دراین صورت هر شبه -ایده آل $Q$ یک دو-ایده آل است.*

**قضیه ۳۲.۱.۱.** [۱۶]: *فرض کنید $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است.*

(۱) *$S$ منظم داخلی است اگر وتنها اگر به ازای دو-ایده آل $B$ و شبه ایده آل $Q$ از $S$ داشته باشیم* $B \cap Q \subseteq (SBQS]$.

(۲) *$S$ منظم داخلی است اگر و تنها اگر بازای دو-ایده آل $B$ و شبه ایده آل $Q$ از $S$ داشته باشیم* $B \cap Q \subseteq (SQBS]$.

**قضیه ۳۳.۱.۱.** [۱۶]: *فرض کنید $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است.*

(۱) *$S$ منظم داخلی است اگر و تنها اگر بازای دو-ایده آل $B$ وایده آل چپ $L$ از $S$ داشته باشیم* $L \cap B \subseteq (LBS]$.

(۲) $S$ *منظم داخلی است اگر و تنها اگر بازای دو-ایده آل* $B$ *و ایده آل راست* $R$ *از* $S$ *داشته باشیم* $B \cap R \subseteq (SBR]$.

## ۲.۱ مجموعه های فازی

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب باشد. تابع $\mu : S \to [0, 1]$ را یک زیر مجموعه فازی از $S$ می نامیم. نیمگروه مرتب $S$ یک زیر مجموعه فازی از $S$ است و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$S : S \to [0, 1], x \to S(x) := 1$$

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنیم $S$ یک نیمگروه مرتب و $\emptyset \neq A \subseteq S$ باشد. تابع مشخصه $\mu_A$ از $A$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mu_A : S \to [0, 1], a \to \mu_A(a) := \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنیم $\mu, \nu$ دو زیر مجموعه فازی از $S$ باشند. در این صورت حاصلضرب $\mu \circ \nu$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(\mu \circ \nu)(a) := \begin{cases} \sup_{(y,z) \in A_a}\{\min\{\mu(y), \nu(z)\}\}, & A_a \neq \emptyset \\ 0, & A_a = \emptyset \end{cases}$$

**تعریف ۴.۲.۱.** برای دو زیر مجموعه فازی $\mu, \nu$ رابطه ترتیب را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$\mu \subseteq \nu$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in S$ داشته باشیم $\mu(x) \leq \nu(x)$.

**تعریف ۵.۲.۱.** [۱۹]: برای خانواده ناتهی از زیر مجموعه های فازی $\{\mu_i\}_{i \in I}$ از نیمگروه مرتب $S$ زیرمجموعه های فازی $\vee_{i \in I}\mu_i$ و $\wedge_{i \in I}\mu_i$ از $S$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(\vee_{i \in I}\mu_i)(a) := \sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\}$$