بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان

رابطه‌ی بین تحلیل پوششی داده‌ها و تصمیم‌گیری چندمعیاره با اطلاعات نادقیق

تدوین

مرتضی آقابابایی جزی

اساتید راهنما

پروفسور غلامرضا جهانشاهلو
دکتر سعید محرابیان

بهمن ۱۳۸۷

بسمه تعالی

تاریخ:.........................
شماره.........................
پیوست:.......................
واحد:.........................

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامـه **آقای مرتضی آقابابـایی جــزی** دانـشجوی دوره کارشناسـی ارشـد رشته ریاضی کاربردی تحت عنوان :

رابطه بین تحلیل پوششی داده ها و تصمیم گیری چندمعیاره با اطلاعات نادقیق

در روز شـنبه مـورخ ۸۷/۱۲/۱۰ دردانـشکده علـوم ریاضـی و کـامپیوتر تـشکیل گردیـد و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می گردد .

نمره این آزمون ۱۷/۵ (هفده و نیم) می باشد .

۱- عالی ☐

۲- بسیارخوب ☐

۳- خوب ☐

۴- قابل قبول ☐

۵- غیر قابل قبول ☐

استادان راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر غلامرضا جهانشاهلو	دکتر فرهاد حسین زاده لطفی	دکتر شهنام جوادی
دکتر سعید محرابیان		

اسمعیل بابلیان
رئیس دانشکده
علوم ریاضی و کامپیوتر

ـران:خیابان شهیدمفتح
رسیده به انقلاب، ب ۴۹
کدپستی ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹
تلفن: ۳-۸۸۳۲۹۲۲۰
رج:انتهای خیابان شهید
بهشتی،میدان دانشگاه
دپستی ۳۷۵۵۱-۳۱۹۷۹
لفن: ۴۵۷۹۶۰۰-۰۲۶۱
No49,mofateh Ave
Tarbiat Moallem
University
www.tmu.ac.ir

تقدیر و تشکر

ای علم تو بیش از آنکه دانند — و احسان تو بیش از آنکه خوانند

ای بند گشای جمله مقصود — دارای وجود و داور جود

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال، از زحمات اساتید بزرگوار و ارجمندم آقایان دکتر غلامرضا جهانشاهلو و دکتر سعید محرابیان که با راهنمایی ایشان این پایان‌نامه را تدوین کردم تقدیر و سپاسگزاری کنم و همچنین اساتید ارجمند جناب آقای دکتر جواد لالی، آقای دکتر اسماعیل بابلیان که در محضر ایشان تلمذ نموده‌ام کمال سپاس و قدردانی را دارم و امیدوارم همیشه موفق و مؤید باشند.

از جناب آقای دکتر فرهاد حسین‌زاده‌لطفی و آقای دکتر شهنام جوادی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند تشکر می‌کنم. از خانم اسکندرزاده و خانم گلزاری (مسئولین آموزش دانشکده) و خانم رحیمی (مسؤل کتابخانه) به خاطر زحمات بی‌دریغشان تشکر می‌کنم.

از همکلاسی بزرگوار و عزیزم آقای منصور محمّدپور که در محضر ایشان درس‌های اخلاقی بسیاری فراگرفتم تشکر ویژه می‌کنم. همچنین از دوستان گرامی‌ام آقایان اسرافیل رشدی، مصطفی دواطلب، ، حمزه ابراهیمی، علی جباری، مجید راهرو زرگر و حمیدرضا طاهری زاده که در این چند سال همیشه نسبت به اینجانب لطف داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم و موفقیت همه‌ی این عزیزان را در تمام مراحل زندگی از خداوند منّان خواستارم.

در پایان از پدر و مادر دلسوز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی همیشه پشتیبان و همراهم بوده‌اند تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه به ارتباط بین تحلیل پوششی داده‌ها و تصمیم‌گیری چندمعیاره با اطلاعات نادقیق می‌پردازیم. شرایطی برای پیدا کردن کارایی محدب گزینه‌های تصمیم ارائه می‌شود. آنالیز این گونه مسائل اطلاعات با ارزشی به تصمیم‌گیرنده می‌دهد. همچنین بکارگیری تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان وسیله‌ای برای تصمیم‌گیری چندمعیاره با برخی نکات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در پایان، بکارگیری مفاهیمی از مدل‌های مطلوبیت چندمشخصه با اطلاعات نادقیق را برای غلبه بر برخی نقایص مدل جمعی پیشنهاد می‌شود. ایده اصلی این است که عوامل ورودی و خروجی به توابع مطلوبیت تبدیل شوند که با بکارگیری یک مجموع وزن‌دار شده جمع می‌شوند و سپس به هر واحد تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد تا وزن‌هایی متناظر با این توابع است را اختیار کند که اختلاف مطلوبیت با بهترین واحد تصمیم‌گیرنده را مینیمم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل تحلیل پوششی داده‌ها، تصمیم‌گیری چندمعیاره، اطلاعات نادقیق، کارایی محدب، تابع مطلوبیت

رده‌بندی موضوعی: ۹۰B۵۰,۹۱B۱۶,۹۱B۰۶

فهرست مطالب

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیرپارامتری برای اندازه‌گیری کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده از قبیل یک شرکت یا بخش‌های دولتی بکار می‌رود که اولین بار در متون تحقیق در عملیات توسط چارنز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ معرفی شد. DEA یک وسیله اندازه‌گیری کارایی تکنیکی است که با استفاده از تکنیک‌های تحقیق در عملیات، وزن‌های تخصیص داده شده به ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تولید که ارزیابی می‌شوند را محاسبه می‌کند.

تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM) روشی است که مدل‌های مختلف را برای تصمیم‌گیری‌های پیچیده بکار می‌گیرد. MCDM هر گزینه‌ی تصمیم را روی یک تعداد مختلف از معیارها ارزیابی می‌کند. در حالتی که هیچ گزینه‌ی بهینه‌ی مطلق وجود نداشته باشد اطلاعات اضافی در مورد ترجیحات تصمیم‌گیرنده غالباً مورد نیاز است. تصمیم‌گیری چندمعیاره روش‌های مختلفی که یکی از آن‌ها DEA است را نیز بکار می‌برد.

این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد.

فصل اول به مفاهیم مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازد که مروری بر مدل‌های اندازه‌گیری کارایی واحدها دارد که مدل‌های شعاعی و مدل جمعی به طور خلاصه معرفی می‌شوند.

فصل دوم نیز به مفاهیم تصمیم‌گیری چندمعیاره می‌پردازد که اساساً تکیه بر آنالیز تصمیم با مجموعه‌ای متناهی از گزینه‌ها است. تئوری مطلوبیت یکی از روش‌های آنالیز تصمیم چندمعیاره است که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین گزینه‌های کارا و کارای محدب را تعریف می‌کنیم و با یک قضیه ارتباط آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل سوم که شامل دو قسمت است ابتدا مفاهیم کارایی و کارایی محدب در DEA و MCDM

را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ارتباط کارایی نسبت در DEA. و اندازه‌ی فاصله در فضای ورودی—خروجی مبتنی بر توابع ارزش خطی نشان داده می‌شود و مدل‌های برای شناسایی گزینه‌های کارای محدب آورده خواهد شد. در قسمت بعد، بکارگیری DEA به عنوان وسیله‌ای برای MCDM برای رتبه‌بندی گزینه‌های مرتب به همراه بعضی تذکرات آورده می‌شود.

در فصل چهارم یک روش دو مرحله‌ای که برای بدست آوردن وزن‌ها با استفاده از یک مفهوم تئوری مطلوبیت چند مشخصه، برای مدل جمعی وزن دار شده علی و همکارانش (۱۹۹۵) بکار می‌گیرد که نشان داده خواهد شد که این روش امتیازات بسیار زیادی نسبت به مدل جمعی دارد.

همچنین یک مثال با داده‌های حقیقی برای مقایسه مدل جمعی و روش دو مرحله ای که در فصل چهارم پیشنهاد شد، آورده شده است.

در خاتمه نیز به ترتیب فهرست مراجع و واژه‌نامه گنجانده شده است.

برای تدوین این پایان نامه از مقاله های زیر

1. Gouveia MC, Dias LC and Antunes CH . Additive DEA based on MCDA with imprecise information. J Opl Res Soc. 59 (2008) 54-63.

2. Bouyssou D . Using DEA as a tool for MCDM: Some remarks. J Opl Res Soc. 50 (1999) 974-978.

3. Stewart TJ . Relationships between data envelopment analysis and multiple criteria decision analysis. J Opl Res Soc. 47 (1996) 654-665

استفاده شده است.

فصل ۱

کلیات مفاهیم تحلیل پوششی داده‌ها

۱.۱. مقدمه

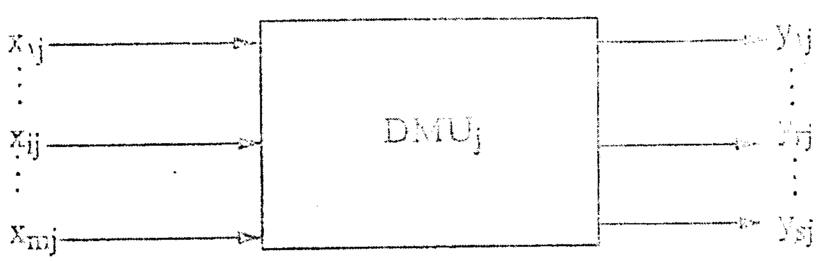
در مقاله‌ای که تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) با آن شروع شد، فارل(۱۹۵۷) متوجه شد که گسترش روش‌ها و مدل‌های بهتر برای ارزیابی بهره‌وری لازم است. او در این مقاله عنوان کرد در حالی که تلاش می‌کند مساله‌ای که معمولاً اندازه‌های دقیق را تولید می‌کند را حل کند، اندازه‌های دقیق خیلی محدود کننده هستند زیرا آنها با ترکیب چندین ورودی برای رسیدن به یک اندازه کارایی کلی رضایت‌بخش شکست می‌خوردند. برای جوابگویی به این نارسایی شاخصه‌های مجزای بهره‌وری کار، بهره‌وری سرمایه و غیره، فارل یک دیدگاه آنالیز تولید را پیشنهاد کرد که بقدر کافی به این مساله رسیدگی می کرد. در این روش مفهوم بهره‌وری را به مفهوم کلی‌تر کارایی گسترش داد.

مدل اولیه‌ی DEA توسط چارنز و کوپر و ادوارد رودز در سال ۱۹۷۸ با تز دکتری رودز و با راهنمایی چارنز و کوپر ارائه شد. رودز در تز دکتری خود به مطالعه‌ی ارزیابی مدارسی از آمریکا پرداخته بود و نتایج مطالعات خود را در همان سال با همکاری چارنز و کوپر منتشر کرد که در واقع می‌توان گفت، ادامه‌ی همان کارهای قبلی فارل بود که بحث در مورد DEA را نیز شروع کرد.

امروزه DEA در بسیاری ازقسمت‌های خدماتی از قبیل مدارس، بیمارستان‌ها، بانک‌هاو ... مورد

استفاده قرار می‌گیرد. در جامعه امروزی برای تشکیلات و سازمان‌ها بسیار مهم است که بدانند چگونه می‌توان آن‌ها را با دیگر سازمان‌ها یا تشکیلات مشابه مقایسه نمود. به عنوان مثال، یک دانشکده از یک دانشگاه ممکن است بخواهد عملکردش را با دانشکده مشابه از دیگر دانشگاهها مقایسه کند و یا یک بانک ممکن است که بخواهد عملکردش را با شعبه‌های همان بانک در سراسر کشور مقایسه کند. در مثال بالا، هر دانشگاه یا بانک را به عنوان یک سیستم و هر دانشکده و یا هر شعبه بانک را به عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) در نظر می‌گیریم. هر سیستم مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری می‌باشد.

فرض می‌کنیم که واحد تصمیم‌گیرنده jام از سیستم مورد بررسی، ورودی‌های x_{ij}(i=1,...,m) را برای تولید خروجی‌های y_{rj}(r=1,...,s) به صورتی که دیاگرام زیر بیان می‌کند، مورد استفاده قرار می‌دهد. در اغلب سیستم‌ها لازم است که مدیران و برنامه‌ریزان سیستم عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس را مورد بررسی قرار دهند و کارایی آنها را با هم مقایسه کنند.



شکل ۱.۱. دیاگرام واحد تصمیم گیرنده jام

۲.۱. اندازه کارایی

برای بدست آوردن اندازه کارایی می‌بایست تابع تولید را داشته باشیم. تابع تولید، تابعی است که ماکزیمم مقدار خروجی را برای هر ترکیب از ورودی‌ها بدهد. در تئوری اقتصاد خرد دو روش برای تخمین تابع تولید وجود دارد:

۱— روش پارامتری ۲— روش غیرپارامتری

۱.۲.۱. روش پارامتری

در این روش ابتدا تابع تولید را حدس می‌زنیم و سپس با مشاهدات پارامترهای تابع را در می‌یابیم.

یکی از مشهورترین توابع تولید، تابع کاب– داگلاس است:

$$Q = k_{0} \prod_{i=1}^{m} A_{i}^{x_i}$$

که در آن $x_i(i = 1, ..., m)$ و k_{0} پارامترها هستند و Q حداکثر مقدار خروجی است که می تواند با مصرف ورودی‌های $A_1, ..., A_m$ تولید گردد.

اگر Q_j نمایانگر مقدار خروجی مشاهده شده توسط ورودی‌های $A_{1j}, ..., A_{mj}$ باشد در این صورت چون Q حداکثر خروجی می‌باشد داریم:

$$Q_j \leq k_{0} \prod_{i=1}^{m} A_{ij}^{x_i}$$

$\frac{Q_j}{Q_j^*}$: کارایی کاب– داگلاس برای واحد زام

Q_j^*: مقدار خروجی تخمین زده شده تابع کاب– داگلاس

روش‌های پارامتری چندین مشکل اساسی دارند که باعث شده است که برای ارزیابی DMUهای یک سیستم کمتر مورد استفاده قرار گیرند. از مهمترین مشکلات این روشها این است که فقط برای DMUهای با یک خروجی می‌توان از آن‌ها استفاده نمود. مشکل دیگر این است که شکل تابع بایستی از قبل مشخص باشد، که این ضعف بزرگی است. همچنین روش‌های مختلف جهت پیدا نمودن پارامترها توابع مختلفی را بدست می آورد از طرفی تمایل منحنی تابع تولید به سمت مشاهدات انباشته شده است و مشاهدات پرت که ممکن است مهم و دقیق باشند نقش زیادی در تعیین پارامترها ندارند. با توجه به مشکلات یاد شده برای اندازه کارایی DMUها بیشتر از روشهای غیر پارامتری استفاده می‌شود.

۲.۲.۱. روش غیرپارامتری

یکی از روش‌های غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌هاست که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم.

۳.۱. مجموعه امکان تولید

در بیشتر مواقع به دلایل مختلف تابع تولید به راحتی محاسبه نمی‌گردد و در بعضی از مواقع بدست آوردن صورت تحلیلی آن غیرممکن است از این رو مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید می‌سازیم و قسمتی از مرز آن را تقریبی از تابع تولید در نظر می‌گیریم. حال مجموعه امکان تولید n واحد تصمیم‌گیرنده را با m ورودی و s خروجی را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$T = \{(x, y) |\text{بردار نامنفی } y \geq \circ \text{ بتواند توسط بردار نامنفی } x \geq \circ \text{ تولید شود.}\}$$

همه مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید وابسته هستند که خود مجموعه امکان تولید به طور یکتا توسط یک مجموعه از اصول معین ساخته می‌شود.

اصل ۱: شمول مشاهدات

همه فعالیت‌های مشاهده شده یعنی (j=1,...,n) $DMUj$ به T تعلق دارد. این بدیهی‌ترین اصلی است که در T صدق می کند و همه مدل‌های DEA این اصل را دارند.

اصل ۲: تحدب

اگر $(\bar{x}, \bar{y}), (x, y) \in T$ آنگاه برای هر $\lambda \in [\circ, ۱]$، $(\lambda x + (۱ - \lambda)\bar{x}, \lambda y + (۱ - \lambda)\bar{y}) \in T$ یا به عبارت دیگر، T مجموعه‌ای محدب باشد.

اصل ۳: بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت

با ازای هر $(x, y) \in T$ و هر $\lambda \geq \circ$، داریم $(\lambda x, \lambda y) \in T$ یا به صورت نمادی:

$$\forall (x, y) \in T \ , \ \forall \lambda \geq \circ \quad : \quad (\lambda x, \lambda y) \in T$$

اصل ۴: امکان پذیری

اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ و اگر $x \geq \bar{x}$ آنگاه $(x, \bar{y}) \in T$ و اگر $y \leq \bar{y}$ آنگاه $(\bar{x}, y) \in T$ باشد. یا اگر $\bar{x}$،

خروجی $\bar{y}$ را تولید کند و هر $x \geq \bar{x}$، می‌تواند $\bar{y}$ را تولید نمایید و اگر $\bar{x}$، خروجی $\bar{y}$ را تولید نماید هر $y \leq \bar{y}$ می تواند به وسیله $\bar{x}$ تولید شود. یا به صورت نمادی :

$$\forall(\bar{x},\bar{y}) \in T \quad , \quad \begin{cases} \forall x,\ x \geq \bar{x} & \rightarrow \quad (x,\bar{y}) \in T \\ \forall y,\ y \leq \bar{y} & \rightarrow \quad (\bar{x},y) \in T \end{cases}$$

اصل ۵: کمینه درونیابی

T اشتراک همه مجموعه های مانند T است که در اصول ۱ تا با ۴ صدق می‌نماید.

۴.۱. مدل CCR

می‌توان گفت که این مدل، اولین مدل DEA برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز و کوپر و رودز ارائه شد.

۱.۴.۱. قضیه

یک مجموعه منحصر بفرد وجود دارد که در اصول ۱ تا با ۵ صدق می‌کند. این مجموعه به صورت زیر است:

$$T_{CCR} = \{(x,y)|x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j,\ \lambda_j \geq ۰, (j=۱,...,n)\}$$

برهان. به مرجع [۲۲] رجوع شود.□

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (x,y) یافت نشود که غالب بر (x_o,y_o) باشد یعنی هیچ (x,y) یافت نشود که $(-x,y) \geq (-x_o,y_o)$ و نامساوی حداکثر برای یکی از مؤلفه‌ها به صورت اکید برقرار باشد، آنگاه گوییم که (x_o,y_o) کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا می‌باشد. اگر یکی از حالت‌های زیر رخ دهد آنگاه بوضوح (x_o,y_o) ناکارا خواهد بود.

۱) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر یا مساوی y_o را داشته‌باشد.

۲) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با خروجی بیشتر از y_o، ورودی کمتر یا مساوی x_o

داشته باشد.

۳) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر از y_o داشته باشد.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ s.t. & (\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}. \end{array}$$

و با توجه به اصل شهودی تجرید و اینکه $(\theta x_{\circ}, y_{\circ}) \in T_{CCR}$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{lll} \min & \theta & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o & (1.1) \\ & \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n & \end{array}$$

مدل (۱.۱)، به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است. مدل (۱.۱)، همواره شدنی و مقدار بهینه متناهی دارد و مقدار بهینه تابع مقصود در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند. شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$ ، زیرا $\theta^* = 1$ به این معنا است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های $DMUo$ در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد ولی این شرط کافی نیست. زیرا ممکن است کاهش بعضی از ورودی‌ها یا افزایش بعضی از خروجی‌های $DMUo$، به صورت نامتناسب در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود داشته باشد که در این حالت $DMUo$، کارای ضعیف نامیده می‌شود ولی اگر $\theta^* = 1$ و امکان کاهش در هیچ یک از ورودی‌ها و افزایش در هیچ یک از خروجی‌ها در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود نداشته باشد آنگاه $DMUo$، کارای قوی نامیده می‌شود. اگر $\theta^* < 1$ آنگاه $DMUo$، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1 - \theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است.

حالت دوم به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \max & \varphi \\ s.t. & (x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}. \end{array}$$

که با توجه به اصل شهودی تجرید و از اینکه $(x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}$ داریم:

$$\begin{array}{lll} \max & \varphi & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x_o & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq \varphi y_o & (2.1) \\ & \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n & \end{array}$$

مدل (۲.۱) می‌کوشد خروجی $DMUo$ را به طور متناسب ماکزیمم کند و به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت خروجی معروف است. مدل همواره شدنی است و مقدار بهینه در شرط $1 \leq \varphi^*$ صدق می‌کند. اگر $\varphi^* > 1$ آنگاه $DMUo$ در ماهیت خروجی ناکارا است و $\frac{1}{\varphi^*}$ نشان دهنده میزان کارایی تکنیکی $DMUo$ در ماهیت خروجی و $(1 - \frac{1}{\varphi^*})$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی $DMUo$ در ماهیت خروجی است.

۲.۴.۱. تعریف

اگر در ارزیابی $DMUo$ توسط فرم پوششی مدل CCR در ماهیت ورودی در یکی از جواب‌های بهینه مقدار برخی از متغیرهای کمکی غیر صفر باشد آنگاه ناکارایی ترکیبی رخ داده است. در غیر این صورت $DMUo$ دارای کارایی ترکیبی است .

معمولاً برای ارزیابی $DMUo$ در فاز اول مدل (۱.۱) جهت به دست آوردن کارایی تکنیکی حل می‌شود و سپس در فاز دوم، با استفاده ار مدل زیر مقدار ناکارایی ترکیبی آن بدست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + s_i^- = \theta_o^* x_o \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - s_r^+ = y_o & & \\ \lambda_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n, & \\ s_i^- \geq 0 & i = 1, \ldots, m, & (3.1) \\ s_r^+ \geq 0 & r = 1, \ldots, s. & \end{array}$$

که در آن θ_o^* مقدار بهینه تابع مقصود مدل در فاز اول می‌باشد.

۱.۴.۳. نکته. دوآل مدل با فرم پوششی، مدل با فرم مضربی نامیده می‌شود.

با توجه به نکته فوق، مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{llll} \max & u^t y_o & & \\ s.t. & v^t x_o = 1 & & \\ & u^t y_j - v^t x_j \leq 0 & j = 1, \ldots, n & (4.1) \\ & u \geq 0 \ , \quad v \geq 0. & & \end{array}$$

با توجه به اینکه مدل(۱.۱) همواره مقدار بهینه متناهی دارد لذا بنا به قضیه دوآلیتی مدل (۴.۱) همواره بهینه متناهی دارد و مقدار بهینه تابع مقصود هر دو مدل برابر است.

۱.۴.۴. تعریف (CCR—کارای قوی تحت مدل مضربی CCR)

$DMUo$ تحت مدل (۴.۱) کارای قوی نامیده می شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $u^{*t} y_o = 1$

۲) حداقل یک جواب بهینه مانند (u^*, v^*) از (۴.۱) موجود باشد به طوری که $u^* > 0, v^* > 0$.

لذا برای تشخیص اینکه $DMUo$، CCR— کارای قوی است، باید بررسی شود که آیا مدل جواب بهینه‌ای با مقدار $u^{*t} y_o = 1$ دارد که در آن تمام وزن ها مثبت می‌باشند یا خیر؟ لذا برای بررسی این موضوع مدل زیر پیشنهاد شد:

$$\begin{array}{lll} \max & u^t y_o & \\ s.t. & v^t x_o = 1 & \\ & u^t y_j - v^t x_j \leq 0 & j = 1, ..., n \\ & u \geq \epsilon \vec{1} \ , \quad v \geq \epsilon \vec{1}. & \end{array} \tag{۵.۱}$$

که در آن ϵ نشان دهنده یک عدد مثبت به اندازه کافی کوچک است که از هر عدد مثبت حقیقی کوچک است و اصطلاحاً به آن عدد غیرارشمیدسی گفته می‌شود. مشکل مدل فوق این است که مشخص نیست ϵ باید چه قدر کوچک باشد و در حالی که $DMUo$، CCR— کارای قوی است اگر ϵ به اندازه کافی کوچک نباشد ممکن است مدل (۴.۱) نتواند وزن‌های مثبتی که با آن وزن‌ها، $DMUo$ کارا شود را پیدا کند و جواب بهینه مدل (۴.۱) کوچکتر از یک می‌شود.

بهترین راهکاری که برای این مشکل پیشنهاد می‌شود استفاده از فرم دوآل مدل (۵.۱) و بکار بردن فاز دوگانه برای حل دوآل است. دوآل مدل (۵.۱) به صورت زیراست:

$$\begin{array}{lll} \min & \theta - \epsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+) & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} & \\ & \lambda_j \geq 0 & j = 1, ..., n, \\ & s_i^- \geq 0 & i = 1, ..., m, \\ & s_r^+ \geq 0 & r = 1, ..., s. \end{array} \tag{۶.۱}$$

۵.۴.۱. تعریف (مجموعه مرجع)

برای هر $DMUo$، ($o \in \{1, 2, ..., n\}$) یک مجموعه مرجع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$E_o = \{DMUj|$ حداقل در یکی از جواب‌های بهینه مدل (۳.۱)، $\lambda_j^* > 0$ باشد. $\}$

در حقیقت مجموعه مرجع $DMUo$ عبارتست از $DMUj$های که حداقل در یکی از جواب‌های بهینه مدل در ارزیابی $DMUo$، λ_j^* مقدار مثبت اختیار کند.

۱.۴.۶. قضیه

برای هر $DMUj$ $(j = ۱, ..., n)$، $E_j \neq \emptyset$.

برهان. به مرجع [۲۲] رجوع شود.□

در ارزیابی $DMUo$ توسط فرایند فاز دوگانه CCR ، اگر $DMUo$، CCR—کارای قوی نباشد. در این صورت در انتهای فاز دوم یک DMU بهبود یافته به صورت زیر بدست می آید:

$$\widehat{DMU}o = (\hat{x_o} = \theta_\circ^* x_o - s^{-^*}, \hat{y_o} = y_o + s^{+^*})$$

۱.۴.۷. قضیه

$\widehat{DMU}\circ$، CCR— کارای قوی است.

برهان. به مرجع [۲۲] رجوع شود.□

۱.۴.۸. تعریف و قضیه (پایداری در قبال تغییر واحد)

یک مدل نسبت به تغیر واحد پایدار نامیده می‌شود هرگاه تغییر واحد ورودی‌ها یا خروجی‌ها روی جواب بهینه مدل تاثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر:

$$x_{ij} \rightarrow \alpha_i x_{ij}, \quad \alpha_i > \circ \quad , \qquad i = ۱, .., m$$

$$y_{rj} \rightarrow \beta_r y_{rj}, \quad \beta_r > \circ \quad , \qquad r = ۱, .., s$$

آنگاه جواب بهینه مدل تغییری نکند. مدل (۱.۱) نسبت به تغییر واحد پایدار است.

۱.۵. مدل BCC

مدل BCC توسط بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴ مطرح شد. مرز کارایی مدل BCC بوسیله پوسته محدب DMU های مشاهده شده گسترده می‌شود.

۱.۵.۱. قضیه

یک مجموعه منحصر بفرد وجود دارد که در اصول ۱، ۲،۴ و ۵ صدق می‌کند. این مجموعه به صورت زیر است:

$$T_{BCC} = \{(x,y) | x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\quad \lambda_j \geq 0, (j = 1, ..., n)\}$$

فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی برای ارزیابی $DMUo$ به صورت زیر است:

$$\begin{array}{lll} \min & \theta & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 & (۷.۱) \\ & \lambda_j \geq 0 & j = 1, ..., n \end{array}$$

لذا مدل BCC در ماهیت ورودی همان مدل CCR در ماهیت ورودی است که شامل قید تحدب یعنی $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ می باشد. حال با توجه به افزایش قیود در مدل‌های برنامه ریزی خطی، ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود، لذا مقدار بهینه تابع مقصود بهتر نمی‌شود. پس اگر θ^*_{CCR} مقدار بهینه مدل (۱.۱) و θ^*_{BCC} مقدار بهینه مدل (۷.۱) باشد آنگاه $1 \geq \theta^*_{BCC} \geq \theta^*_{CCR}$.

دوآل مدل (۷.۱) که به مدل مضربی BCC در ماهیت ورودی معروف است، به صورت زیر است:

$$\begin{array}{lll} \max & u^t y_o - u_o & \\ s.t. & v^t x_o = 1 & \\ & u^t y_j - v^t x_j - u_o \leq 0 \qquad j = 1, ..., n & (۸.۱) \\ & u \geq 0 \ , \quad v \geq 0. \qquad u_o \text{ آزاد} & \end{array}$$

$DMUo$ در مجموعه امکان تولید BCC کارای تکنیکی است اگر و فقط اگر $\theta^*_{BCC} = 1$. در غیر این صورت $DMUo$ ناکارا خواهد بود و $(1 - \theta^*_{BCC})$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی در