دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

یک مدل تکاملی آنفلوانزای نوع A با یک جهش جزئی و کلی

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

رعنا اکبری

دی ۱۳۹۳

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و فداکارم

همسر عزیزم و برادر نازنینم

به نام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای **دکتر حسین خیری** و **دکتر کریم ایواز**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی ارزنده‌ی آنان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از آقای دکتر جدیری که زحمت داوری این پایاننامه را پذیرفته‌اند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اعضاء خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند و مخصوصاً **جناب آقای دکتر رحیم محمدرضایی** همسر گرامی که حق استادی را بر من تمام نموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

رعنا اکبری
دی ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: اکبری نام: رعنا

عنوان: یک مدل تکاملی آنفلوانزای نوع A با یک جهش جزئی و کلی

استاد راهنما : دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: دی ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۱۳۱

کلید واژه‌ها: آنفلوانزای A، مدل‌سازی، پایداری موضعی و کلی، عدد تکثیر.

چکیده

ویروس آنفلوانزای A می‌تواند از طریق مکانیسم‌های جزئی و گسترده تکامل یابد. به خاطر وجود این مکانیسم‌های تکاملی، پاتوژن‌ها می‌توانند باعث آلودگی‌های پی‌درپی در میزبان شده و بیماری‌هایی همه‌گیر، با مرگ و میر بالا ایجاد کنند.

در این کار پژوهشی، پس از بیان مفاهیم اولیه‌ی مربوط به تحلیل ریاضی سیستم‌های دینامیکی و ارائه‌ی تعاریف مقدماتی، مدل ساده‌ی (SIR) بیماری آنفلوانزای A را بیان کرده و رفتار کیفی آن را بررسی می‌کنیم. در ادامه مدل جدیدی از آنفلوانزای A با مکانیسم‌های تکاملی جزئی و گسترده را معرفی می‌کنیم. برای این منظور سه نوع از گونه‌های آنفلوانزای فصلی انسانی، آنفلوانزای $H۵N۱$ منتقل شده از پرنده به انسان و آنفلوانزای $H۵N۱$ تکامل‌یافته‌ی همه‌گیر را مدل‌سازی می‌کنیم و تعادل تک‌گونه‌ای هر کدام را به طور جداگانه بررسی کرده و عدد تکثیر مربوط به هر یک را معرفی می‌کنیم. سپس تعادل گونه‌ها را در همزیستی با یکدیگر بررسی کرده و پایداری موضعی تعادل‌های به وجود آمده را تجزیه و تحلیل می‌کنیم و در نهایت شرایط مناسب برای رسیدن به پایداری کلی را نتیجه می‌گیریم.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

مقدمه

ویروس آنفلوانزای خوکیِ H1N1 برای اولین بار در کشور مکزیک مشاهده شد و سپس در سراسر جهان گسترش پیدا کرد. پیشروی آهسته‌ی بیماری همه‌گیر آنفلوانزای خوکی، که مرگ و میر ناشی از آن به اندازه‌ی یکی از آنفلوانزاهای فصلی است، مانع از تمرکز پژوهش‌ها بر روی خطرات ناشی از آن نمی‌شود.

در سال ۱۹۱۸ میلادی، بیماری همه‌گیری از آنفلوانزا ظاهر شد به طوری‌که حدود ۴۰ میلیون انسان در سراسر جهان به خاطر این بیماری کشته شدند. همچنین بیماری همه‌گیر آنفلوانزا دو بار در سال‌های ۱۹۵۷ و ۱۹۶۸ میلادی رخ داد. از آنجا که ویروس آنفلوانزا همیشه در حال تکامل و جهش است، بنابراین همواره تهدیدی از همه‌گیری این ویروس وجود دارد.

نوعی از ویروس آنفلوانزا که قادر به ایجاد آلودگی در حیوانات است، در صورت جهش می‌تواند انسان‌ها را هم آلوده کند؛ گسترش آنفلوانزای مرغی در آسیا، یکی از این نمونه‌ها می‌باشد.

موارد گزارش شده از ابتلا و کشته شدن نزدیک به ۳۰۰ نفر در جهان توسط ویروس آنفلوانزای مرغی در سال‌های گذشته، امکان وقوع بیماری همه‌گیر آنفلوانزای مرغی در انسان‌ها را هشدار می‌دهد. با توجه به میزان مرگ و میر بالای بیماری آنفلوانزای مرغی (حدود ۱۰۰ درصد برای پرندگان و بیش از ۷۰ درصد برای انسان‌ها) که این در مقایسه با میزان مرگ و میر ویروس آنفلوانزا در سال ۱۹۱۸ میلادی بسیار زیاد می‌باشد، بنابراین بیماری همه‌گیر آنفلوانزای مرغی ممکن است بیشتر از بیماری همه‌گیر آنفلوانزای سال ۱۹۱۸ در انسان‌ها تاثیر بگذارد.

خوشبختانه، آنفلوانزای مرغی نمی‌تواند در بین انسان‌ها منتقل شود؛ اما این ویروس در صورت جهش، قادر به انتقال در میان انسان‌ها خواهد بود. احتمال مرگ و میر بالای ناشی از آنفلوانزای مرغی

جهش‌یافته اثبات نشده است؛ با این حال، کارشناسان معتقدند که آنفلوانزای مرغی جهش‌یافته، توانایی انتقال بین انسان‌ها را خواهد داشت.
خطر بیماری همه‌گیر آنفلوانزای مرغی در آینده‌ای نزدیک توسط سازمان بهداشت جهانی (WHO)[۱] هشدار داده شده است. از آنجا که داروهای ضد ویروسی گران، و منابع محدود هستند؛ بنابراین مطالعه‌ی مکانیسم گسترش آنفلوانزای مرغی در جهان دارای اهمیت بسیاری است.

مدل‌های ریاضی ابزارهای مهمی برای تحلیل گسترش و کنترل بیماری‌ها هستند. این مدل‌ها می‌توانند در عین سادگی اطلاعات مهمی از جنبه‌های نهفته‌ی انتشار بیماری‌ها ارائه بدهند. یکی از اهداف تحلیل مدل‌های اپیدمولوژی بدست آوردن درکی واضح از تشابهات و اختلافات موجود در رفتار جواب مدل‌هاست که اجازه می‌دهد این مدل‌ها را برای کاربردهای مختلف به‌کار گیریم. این مدل‌ها نتایج مفهومی بسیار مهمی ارائه می‌دهند؛ به عنوان مثال عدد تکثیر پایه [۲]، اطلاعاتی در مورد سرعت انتشار بیماری در اختیار ما قرار می‌دهد. مدل‌های ریاضی و شبیه‌سازی‌های کامپیوتری ابزار کارآمدی برای ایجاد ساختاری تئوری و بررسی آن‌ها، ارزیابی کیفی تخمین‌ها، پاسخگوئی به سوالات کیفی و محاسبه پارامترهای کلیدی از داده‌ها هستند. مدل‌سازی اپیدمولوژی می‌تواند روند تحقیق را تشخیص داده، جمع‌آوری داده‌های مهم را پیشنهاد کرده و کلیات سیستم را پیش‌بینی کند. بدون تردید درک کاراکترهای انتقال بیماری‌های مسری در یک منطقه می‌تواند در جهت کاهش انتقال آن بیماری مفید باشد.

یکی از جنبه‌های مهم اپیدمولوژی، کاربرد طرح‌های کنترل برای از بین بردن بیماری‌هاست. مدل‌های بیماری‌ها برای مقایسه، عملی کردن، تخمین، بهینه کردن تصمیم‌های مختلف، پیشگیری و برنامه‌ریزی کنترل ضروری هستند. این مدل‌ها در ارائه مقدار واکسن تزریقی مورد نیاز برای کنترل بیماری‌ها بسیار مفید هستند. به عنوان مثال سازمان سلامت جهانی، برنامه‌ای برای مقابله با آبله در سال ۱۹۶۷ میلادی آغاز نمود که حدود ۱۵ میلیون نفر در هر سال به آن مبتلا می‌شدند. استراتژی سازمان سلامت جهانی شامل برنامه‌های واکسیناسیون گسترده، نظارت بر شیوع و کنترل این شیوع با برنامه‌های واکسیناسیون محلی بود. این برنامه یک موفقیت فوق‌العاده در واکسیناسیون عمومی

[۱] World Health Organization

[۲] The basic reproduction number

بود، به طوری‌که در نهایت آبله به‌صورت جهانی در سال ۱۹۷۷ میلادی ریشه‌کن شد [۵۲،۵۳].
با توجه به این‌که مدل‌سازی ریاضی در بیماری‌ها یکی از روش‌های موثر برای درک بهتر بیماری‌هاست، در این پایاننامه که بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده است، در نظر داریم پس از بیان مفاهیم اولیه‌ی مربوط به تحلیل ریاضی سیستم‌های دینامیکی و تعاریف مقدماتی از قبیل نقاط ثابت و انواع آن، پایداری، تصویر فاز، قضیه خطی‌سازی هارتمن و قضیه پایداری لیاپانوف، نقاط حدی، دورهای حدی، انشعاب‌ها و همچنین بررسی پایداری سیستم‌های گسسته را بیان کنیم، در فصل دوم ضمن ارائه‌ی مدل‌های دینامیکی از بیماری‌های عفونی و ارائه‌ی مدل ساده‌ای از بیماری آنفلوانزای A و تحلیل ریاضی مربوط به این سیستم، تاریخچه‌ای از روند گسترش و جهش ویروس آنفلوانزای A را بیان می‌کنیم. در فصل سوم مدلی جدید از آنفلوانزای A با مکانیسم‌های تکاملی جزئی و کلی معرفی می‌کنیم که شامل سه گونه‌ی آنفلوانزای فصلی انسانی، آنفلوانزای $H5N1$ منتقل شده از پرنده به انسان و آنفلوانزای $H5N1$ تکامل‌یافته‌ی همه‌گیر خواهد بود. در ادامه به طور جداگانه تعادل تک‌گونه‌ای را بررسی کرده و عدد تکثیر گونه‌ها را معرفی می‌کنیم. بخشی از این فصل به تعادل همزیستی اختصاص داده شده و دو سناریوی جهش مداوم و جهش آنی به یک گونه‌ی همه‌گیر مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تجزیه و تحلیلی از پایداری موضعی تعادل ارائه شده و در نهایت شرایط برای پایداری کلی نتیجه‌گیری می‌شود.

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq \mathcal{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. در یک سیستم دینامیکی، با دانستن وضعیت فعلی سیستم، می‌توان وضعیت آینده‌ی آن را پیش‌بینی کرد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله فیزیکی یا کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبلی و بعدی، پیش‌بینی کرد. از این‌رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در یک سیستم دینامیکی، هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح $t \in Z$ سنجیده شود، سیستم دینامیکی را گسسته گویند و اگر به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in R$، سیستم دینامیکی را پیوسته می‌گویند. سیستم‌های گسسته به‌طور معمول با نگاشت تکراری به صورت

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

توصیف می‌شوند، در حالی‌که سیستم‌های پیوسته به‌طور معمول توسط معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$

توصیف می‌شوند. بیشتر شرایطی که برای سیستم‌های پیوسته برقرار است، با روندی مشابه برای سیستم‌های گسسته به کار برده می‌شود.

در حالت کلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$، $X : R^n \to R^n$ را **سیستم خطی** از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن را **سیستم غیرخطی** گویند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان به‌صورت تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

۱.۱ مطالعه رفتار جواب در سیستم‌های دینامیکی

یکی از روش‌های مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است.

قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجود و منحصربفردی جواب آن، آگاه باشیم. از این‌رو لازم است روشی که وجود جواب و منحصربفردی آن را بدون حل سیستم تضمین کند، بیان شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $D \subseteq R^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$، هرگاه X تابعی پیوسته باشد. همچنین، گویند $X \in C^k(D)$، $k > 0$، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه kام موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه وجودی و منحصربفردی جواب). *فرض کنید D زیر مجموعه بازی در R^{n+1} شامل x_0 باشد. اگر $X \in C(D)$، آنگاه مسأله مقدار اولیه*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad x(0) = x_0,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$، آنگاه مسأله دارای جواب منحصربفرد روی I است.

تذکر ۳.۱.۱. در قضیه ۲.۱.۱، I بزرگترین بازه‌ای است که مسأله مقدار اولیه در آن دارای جواب است. بازه I را **بازه ماکزیمال** می‌گویند.

جواب $x(t)$ از سیستم (۱.۱) به طور هندسی با نمودار $x(t)$ نمایش داده می‌شود. این نمودار منحنی جواب را در صفحه‌ی tx نشان می‌دهد. همواره رسم دقیق منحنی‌های جواب برای بدست آوردن رفتار کیفی آن‌ها مقدور نبوده و از طرفی، در حالت کلی نیز لازم نیست.

۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

تعریف ۱.۲.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = X(x), \qquad x \in S \subseteq \mathbb{R}, \qquad (\mathbf{D} = \mathbb{R} \times \mathbf{S}) \tag{۱.۱}$$

یک **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود اگر تابع f مستقل از t باشد، یا به طور صریح، t در سمت راست تابع X(x) ظاهر نگردد.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی از نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

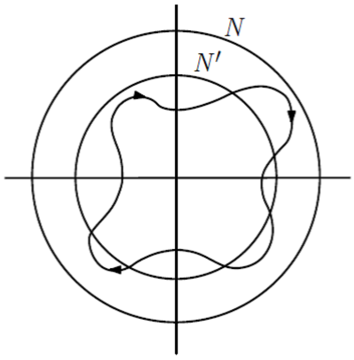
تعریف ۲.۲.۱. سیستم خودگردان (۲.۱) را در نظر بگیرید. یک **نقطه ثابت** (نقطه‌ی تعادل، نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی ساکن)، نقطه‌ای است که در معادله‌ی $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۳.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۲.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به‌طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۲.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مسأله هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد.

نقاط بحرانی در بررسی رفتار سیستم دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند و بر اساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۲.۱) در همسایگی هر نقطه بحرانی فقط و فقط به‌صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۴.۲.۱. یک نقطه بحرانی x_0 از سیستم (۲.۱) را **پایدار** گویند، هرگاه برای یک همسایگی $\mathcal{N}$ از x_0 ، یک همسایگی کوچک‌تر $\acute{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ از نقطه تعادل وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد $\acute{\mathcal{N}}$ می‌شود، با افزایش t در $\mathcal{N}$ باقی بماند.



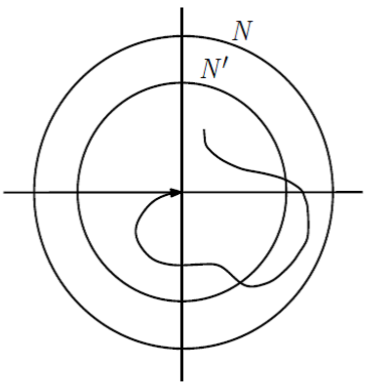
شکل ۱.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۴.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در $R^۲$.

تعریف ۵.۲.۱. نقطه ثابت $x_۰$ از سیستم(۲.۱) را **به طور مجانبی پایدار** گویند، هرگاه

۱- پایدار باشد؛

۲- یک همسایگی $\mathcal{N}$ از $x_۰$ وجود داشته باشد، به طوری که هر مسیری که وارد $\mathcal{N}$ می‌شود، با افزایش t به $x_۰$ میل کند.

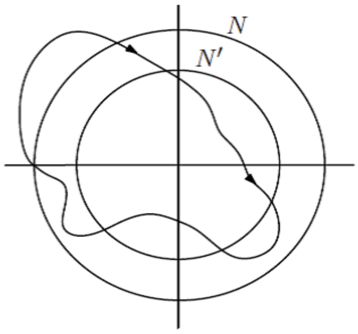
توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه‌ی کافی در نزدیکی $x_۰$ باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب می‌کند که با افزایش t ، هر مسیری به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک شود.



شکل ۲.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۵.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در $R^۲$.

تعریف ۶.۲.۱. نقطه ثابت $x_\circ$ از سیستم (۲.۱) را **پایدار خنثی** گویند، هرگاه پایدار باشد اما به طور مجانبی پایدار نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. نقطه ثابت $x_\circ$ از سیستم (۲.۱) را **ناپایدار** گویند، هرگاه پایدار نباشد.
به عبارت دیگر یک همسایگی $\mathcal{N}$ از $x_\circ$ وجود دارد به طوری که برای هر همسایگی $\acute{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ ، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد $\acute{\mathcal{N}}$ می‌شود، ولی در $\mathcal{N}$ باقی نمی‌ماند.



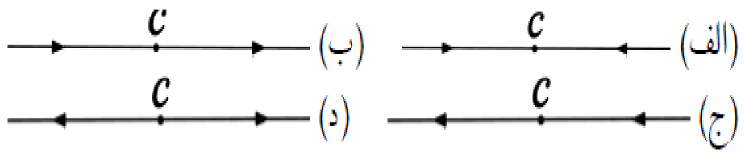
شکل ۳.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۷.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در $R^۲$.

تعریف ۸.۲.۱. نقاط ثابتی که به طور مجانبی پایدار هستند را **جاذب** و نقاط ثابت ناپایدار را **دافع** می‌نامند.
نقاط ثابت معادله خودگردان

$$\dot{x} = X(x), \qquad x \in D \subseteq R \tag{۲.۱}$$

را می‌توان بر اساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع دافع، جاذب و گذر دسته‌بندی کرد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان (۳.۱) باشد. گوییم



شکل ۴.۱: چهار خط فاز ممکنِ متناظر با یک نقطه ثابت منفرد؛ نقطه ثابت مورد نظر در (الف)، جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع است.

- c **جاذب** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c به آن میل کنند؛
- c **دافع** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c از آن دور شوند؛
- c **گذر** است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

تعریف ۱۰.۲.۱. دو معادله دیفرانسیل خودگردان را **هم‌ارز کیفی** گویند هرگاه تعداد نقاط ثابتِ یکسان داشته باشند و همچنین ترتیب رفتار کیفیِ نقاط ثابت (ماهیت نقاط ثابت) یکسان باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید c یک نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. در این‌صورت*

۱. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) < 0$، آنگاه c از نوع جاذب است؛*

۲. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) > 0$، آنگاه c از نوع دافع است؛*

۳. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) = 0$، آنگاه برای تعیین نوع نقطه ثابت باید مشتقات مراتب بالا بررسی شود.*

برهان. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. یک انحراف کوچک $\xi(t)$ از نقطه ثابت را در نظر بگیرید، لذا $x(t) = c + \xi(t)$ و

$$\dot{\xi} = \dot{x} = X(x) = X(c+\xi).$$

با محاسبه بسط تیلور X حول c، به‌عبارت

$$\dot{\xi} = X(c) + \xi\frac{dX}{dx}(c) + \frac{\xi^2}{2}\frac{d^2X}{dx^2}(c) + \cdots$$