



دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

یک مدل تکاملی آنفلوانزای نوع A با یک
جهش جزئی و کلی

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

رعنا اکبری

دی ۱۳۹۳

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردهن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حق او را گزارش کردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه تیرگام در راه شناسایی او گنگ است، و سیر فکرت ژرف رو به دریای معرقتش بر سنگ صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف دنیامندی، و در وقت ناگنجینی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش با دانا سپر کند، و با خردگمار لریزه زمین را در مدار کشید.

گوای می دهم که خدایکماست، انبازی ندارد و بی همتاست. گوای از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیج برآمده از امتحان؛ و گوای می دهم که محمد (ص) بنده او و پیامبر اوست. او را بفرستاد بادی آسکار، و بانسانه بانی پیدار، و قرآنی بنشده در علم پروردگار. که نوری است در نشان، و چراغی است فروزان، و دستور بایش روشن و عیان. تا که در دلی از دلها بزوداید، و با حجت و دلیل بلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناخیر است برابر آنچه بر ما نمان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان. خدایا! اگر در پرسش خود دمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کلام را به من ناودلم را بدانچه رحمتی من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنمایهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم بہ:

پدر و مادر مہربان و فداکارم

ہمسفر عزیزم و برادر نازنینم

به نام خدا

و من لَمْ يَشْكُرِ الْمَخْلُوقَ لَمْ يَشْكُرِ الْخَالِقَ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین خیری و دکتر کریم ایواز، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی ارزنده‌ی آنان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از آقای دکتر جدیری که زحمت داوری این پایاننامه را پذیرفته‌اند، کمال تشکر را دارم. در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند و مخصوصاً جناب آقای دکتر رحیم محمدرضایی همسر گرامی که حق استادی را بر من تمام نموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

رعنا اکبری
دی ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: اکبری	نام: رعنا
عنوان: یک مدل تکاملی آنفلوآنزای نوع A با یک جهش جزئی و کلی	
استاد راهنما: دکتر حسین خیری	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز	
دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دی ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۱۳۱	
کلید واژه‌ها: آنفلوآنزای A، مدل‌سازی، پایداری موضعی و کلی، عدد تکثیر.	
<h3>چکیده</h3> <p>ویروس آنفلوآنزای A می‌تواند از طریق مکانیسم‌های جزئی و گسترده تکامل یابد. به خاطر وجود این مکانیسم‌های تکاملی، پاتوژن‌ها می‌توانند باعث آلودگی‌های پی‌درپی در میزبان شده و بیماری‌هایی همه‌گیر، با مرگ و میر بالا ایجاد کنند.</p> <p>در این کار پژوهشی، پس از بیان مفاهیم اولیه‌ی مربوط به تحلیل ریاضی سیستم‌های دینامیکی و ارائه‌ی تعاریف مقدماتی، مدل ساده‌ی (SIR) بیماری آنفلوآنزای A را بیان کرده و رفتار کیفی آن را بررسی می‌کنیم. در ادامه مدل جدیدی از آنفلوآنزای A با مکانیسم‌های تکاملی جزئی و گسترده را معرفی می‌کنیم. برای این منظور سه نوع از گونه‌های آنفلوآنزای فصلی انسانی، آنفلوآنزای H5N1 منتقل شده از پرند به انسان و آنفلوآنزای H5N1 تکامل یافته‌ی همه‌گیر را مدل‌سازی می‌کنیم و تعادل تک‌گونه‌ای هر کدام را به طور جداگانه بررسی کرده و عدد تکثیر مربوط به هر یک را معرفی می‌کنیم. سپس تعادل گونه‌ها را در همزیستی با یکدیگر بررسی کرده و پایداری موضعی تعادل‌های به وجود آمده را تجزیه و تحلیل می‌کنیم و در نهایت شرایط مناسب برای رسیدن به پایداری کلی را نتیجه می‌گیریم.</p>	

فهرست مطالب

۶	مقدمه
۹	۱ سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه
۱۱	۱.۱ مطالعه رفتار جواب در سیستم‌های دینامیکی
۱۲	۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها
۱۶	۳.۱ تصویر فاز در صفحه
۱۹	۴.۱ انواع نقاط تعادل
۱۹	۱.۴.۱ مقادیر ویژه‌ی حقیقی متمایز
۲۱	۲.۴.۱ مقادیر ویژه‌ی مختلط متمایز ($\lambda = \alpha \pm i\beta$)
۲۲	۳.۴.۱ مقادیر ویژه‌ی حقیقی تکراری
۲۶	۵.۱ خطی‌سازی در نقاط ثابت
۲۹	۶.۱ بررسی پایداری نقاط ثابت با توابع لیاپانوف
۳۰	۷.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی
۳۴	۸.۱ انشعاب‌ها
۳۴	۱.۸.۱ میدان برداری به طور ساختاری پایدار
۳۵	۲.۸.۱ انشعاب در نقاط غیرهذلولوی
۴۲	۲ تاریخچه‌ی بیماری آنفلوآنزای A و مدل‌سازی بیماری‌ها
۴۳	۱.۲ تاریخچه‌ی بیماری آنفلوآنزای A
۴۴	۱.۱.۲ بررسی ویروس آنفلوآنزای A
۴۵	۲.۲ بررسی انواع مدل‌های ریاضی بیماری‌ها
۴۶	۱.۲.۲ مدل SI
۴۷	۲.۲.۲ مدل SIS

۴۷	مدل SIR	۳.۲.۲
۴۸	مدل SIRS	۴.۲.۲
۴۸	مدل SEIR	۵.۲.۲
۴۹	مدل سازی بیماری آنفلوآنزای A	۳.۲
۵۰	مدل SIR بیماری آنفلوآنزای A	۱.۳.۲
۵۷	پدیده‌ی آستانه	۴.۲
۵۸	عدد تکثیر	۵.۲
۶۰	اهمیت R_0	۱.۵.۲
۶۱	سیاست‌های کنترل	۲.۵.۲
۶۳	نیروی عفونت	۳.۵.۲
۶۴		مدل تکاملی آنفلوآنزای نوع A با تغییرات جزئی و گسترده	۳
۶۵	مفاهیم اولیه و تعاریف	۱.۳
۶۸	یک مدل تکاملی قطعی از آنفلوآنزای مرغی	۲.۳
۷۴	تعادل تک گونه	۳.۳
۸۴	تعادل همزیستی	۴.۳
۸۵	همزیستی در حالت جهش مستمر ($\rho \neq 0$)	۱.۴.۳
		همزیستی در صورت جهش خودبخودی ($\rho = 0$) و سناریوی پیش از	۲.۴.۳
۹۳	همه‌گیری و تهاجمی گونه آنفلوآنزای همه‌گیر	
۹۸	پایداری موضعی تعادل	۵.۳
۹۹	تعادل آنفلوآنزای انسانی	۱.۵.۳
۱۰۳	گونه آنفلوآنزای همه‌گیر به تنهایی	۲.۵.۳
۱۰۴	گونه آنفلوآنزای پرنده به انسان به تنهایی	۳.۵.۳
۱۰۵	تعادل همزیستی گونه‌های آنفلوآنزای همه‌گیر و پرندگان	۴.۵.۳
۱۰۶	گونه‌های آنفلوآنزای انسانی و آنفلوآنزای پرندگان ($\rho = 0$)	۵.۵.۳
۱۱۲	نتایج کلی روی همزیستی و حذف رقابتی	۶.۳
۱۲۰	بحث و بررسی	۷.۳
۱۲۳		مراجع	

فهرست اشکال

۱۳	همسایگی های N و N' در تعریف (۴.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2	۱.۱
۱۳	همسایگی های N و N' در تعریف (۵.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2	۲.۱
۱۴	همسایگی های N و N' در تعریف (۷.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2	۳.۱
۴.۱	چهار خط فاز ممکن متناظر با یک نقطه ثابت منفرد؛ نقطه ثابت مورد نظر در	
۱۵	(الف)، جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع است.	
۵.۱	مقادیر ویژه حقیقی و متمایز منجر به (الف) گره ناپایدار ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$)؛ (ب)	
۲۰	گره پایدار ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) و (ج) نقطه زینی ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$) می شود.	
۶.۱	مقادیر ویژه مختلط منجر به (الف) کانون ناپایدار ($\alpha > 0$)؛ (ب) مرکز ($\alpha = 0$)	
۲۲	و (ج) کانون پایدار ($\alpha < 0$) می شود.	
۷.۱	وقتی A قطری باشد، مقادیر ویژه برابر ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$) منجر به گره ستاره	
۲۳	می شود: (الف) ناپایدار؛ (ب) پایدار.	
۸.۱	وقتی A قطری نباشد، مقادیر ویژه برابر ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$) منجر به گره نامتعارف	
۲۳	می شود: (الف) ناپایدار ($\lambda_0 > 0$)؛ (ب) پایدار ($\lambda_0 < 0$).	
۹.۱	تأثیر تبدیل خطی $x = Py$ روی تصویر فاز سیستم متعارف (۸.۱)	
۲۹	تصاویر فاز سیستم های $\dot{x} = Ax$ به $tr(A)$ و $det(A)$ بستگی دارند.	
۳۲	تصویر فاز سیستم (۱۰.۱).	
۱۲.۱	نمودار انشعاب برای سیستم (۱۰.۱)، انشعاب زینی-گره را نشان می دهد. منحنی	
۳۷	پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است.	
۱۳.۱	نمودار انشعاب برای سیستم (۱۱.۱)، نشان دهنده انشعاب ترنس کریتیکال است.	
	منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار	
۳۸	است.	

- ۱۴.۱ نمودار انشعاب برای سیستم (۱۳.۱)، نشان دهنده انشعاب چنگال است. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۳۹
- ۱۵.۱ نمودار انشعاب برای سیستم (۱۴.۱)، انشعاب هاف را نشان می دهد. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۰
- ۱۶.۱ نمودار انشعاب که نشان دهنده انشعاب هاف ساب کریٹیکال است. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. . . ۴۱
- ۱.۲ نمودار مدل؛ SI پیکان توپر نشان دهنده آلوده شدن افراد مستعد در ارتباط با افراد عفونی بوده و پیکان توخالی نشان دهنده سطح بیماری عفونی است که نرخ افراد مستعد را در جابجایی به کلاس آلوده تحت تاثیر قرار می دهد. ۴۶
- ۲.۲ نمودار مدل؛ SIS پیکان توپر نشان دهنده حرکت بین کلاس ها بوده و پیکان توخالی نشان دهنده سطح بیماری عفونی است که نرخ افراد مستعد را در جابجایی به کلاس آلوده تحت تاثیر قرار می دهد. ۴۷
- ۳.۲ نمودار مدل؛ SIR پیکان توپر نشان دهنده حرکت بین کلاس ها بوده و پیکان توخالی نشان دهنده سطح بیماری عفونی است که نرخ افراد مستعد را در جابجایی به کلاس آلوده تحت تاثیر قرار می دهد. ۴۸
- ۴.۲ نمودار مدل؛ SIRS پیکان توپر نشان دهنده حرکت بین کلاس ها بوده و پیکان توخالی نشان دهنده سطح بیماری عفونی است که نرخ افراد مستعد را در جابجایی به کلاس آلوده تحت تاثیر قرار می دهد. ۴۸
- ۵.۲ نمودار مدل؛ SEIR پیکان توپر نشان دهنده حرکت بین کلاس ها بوده و پیکان توخالی نشان دهنده سطح بیماری عفونی است که نرخ افراد مستعد را در جابجایی به کلاس آلوده تحت تاثیر قرار می دهد. ۴۹
- ۶.۲ نمودار مدل اساسی SIR ۵۲
- ۷.۲ نمودارهای زمانی مربوط به (الف) افراد مستعد S ، (ب) افراد عفونی I و (ج) افراد بهبود یافته R ۵۴
- ۸.۲ تصویر صفحه فاز SI؛ نمودار I در $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ به یک مقدار ماکزیمم می رسد و در نهایت به صفر می رسد. ولی تعداد مستعد با وجود کاهش یکنواخت، هرگز به صفر نمی رسد. ۵۶

- ۱.۳ شکل سمت راست نمودار تابع $F(I)$ در حالت $\mathcal{R}_1 > 1$ را نشان می‌دهد. این نمودار خط افقی $y = 1$ را در حدود $I^* \approx 3/5$ قطع می‌کند؛ شکل سمت چپ نمودار تابع $F(I)$ در حالت $\mathcal{R}_1 < 1$ را نشان می‌دهد که این نمودار خط افقی $y = 1$ را در حدود دو نقطه‌ی $I_1^* \approx 0/1$ و $I_2^* \approx 0/2$ قطع می‌کند؛ پارامترها برای دو نمودار به عنوان $\Lambda = 13/3$ تولد در هر سال، $\mu = 0/0133$ در سال، $\alpha = 52$ در سال، $k = 3/6$ در سال، $\gamma(a) = \gamma a$ و $\gamma = 0/005$ در سال، در هر فرد و به ازای هر آمینواسید جایگزین شده در نظر گرفته شده است. شکل سمت راست حالت‌های $\beta = 0/07$ را در هر فرد و در هر سال دارد، در حالی که شکل سمت چپ حالت‌های $\beta = 0/02$ را در هر فرد و در هر سال دارد. عدد تکثیر برای شکل سمت راست $\mathcal{R}_1 = 1/34$ و برای شکل سمت چپ $\mathcal{R}_1 = 0/38$ است. ۸۰
- ۲.۳ شکل سمت چپ، نمودار پارامتری را در صفحه‌ی $(\gamma I^*, \alpha \gamma I^*)$ نشان می‌دهد. شکل سمت راست α را زمانی که تابعی از w است، نشان می‌دهد. صفحه‌ها در شرایط $w \in [\pi/32, \pi/16]$ رسم شده‌اند. ۱۱۱
- ۳.۳ شکل سمت چپ نوسانات را در $I(t)$ نشان می‌دهد. محور y تعداد افراد آلوده را با ضریب 10^5 نشان می‌دهد. شکل سمت راست نوسانات در $I_b(t)$ را نشان می‌دهد. ۱۱۳

مقدمه

ویروس آنفلوانزای خوکی H1N1 برای اولین بار در کشور مکزیک مشاهده شد و سپس در سراسر جهان گسترش پیدا کرد. پیشروی آهسته‌ی بیماری همه‌گیر آنفلوانزای خوکی، که مرگ و میر ناشی از آن به اندازه‌ی یکی از آنفلوانزاهای فصلی است، مانع از تمرکز پژوهش‌ها بر روی خطرات ناشی از آن نمی‌شود.

در سال ۱۹۱۸ میلادی، بیماری همه‌گیری از آنفلوانزا ظاهر شد به طوری که حدود ۴۰ میلیون انسان در سراسر جهان به خاطر این بیماری کشته شدند. همچنین بیماری همه‌گیر آنفلوانزا دو بار در سال‌های ۱۹۵۷ و ۱۹۶۸ میلادی رخ داد. از آنجا که ویروس آنفلوانزا همیشه در حال تکامل و جهش است، بنابراین همواره تهدیدی از همه‌گیری این ویروس وجود دارد.

نوعی از ویروس آنفلوانزا که قادر به ایجاد آلودگی در حیوانات است، در صورت جهش می‌تواند انسان‌ها را هم آلوده کند؛ گسترش آنفلوانزای مرغی در آسیا، یکی از این نمونه‌ها می‌باشد.

موارد گزارش شده از ابتلا و کشته شدن نزدیک به ۳۰۰ نفر در جهان توسط ویروس آنفلوانزای مرغی در سال‌های گذشته، امکان وقوع بیماری همه‌گیر آنفلوانزای مرغی در انسان‌ها را هشدار می‌دهد. با توجه به میزان مرگ و میر بالای بیماری آنفلوانزای مرغی (حدود ۱۰۰ درصد برای پرندگان و بیش از ۷۰ درصد برای انسان‌ها) که این در مقایسه با میزان مرگ و میر ویروس آنفلوانزا در سال ۱۹۱۸ میلادی بسیار زیاد می‌باشد، بنابراین بیماری همه‌گیر آنفلوانزای مرغی ممکن است بیشتر از بیماری همه‌گیر آنفلوانزای سال ۱۹۱۸ در انسان‌ها تاثیر بگذارد.

خوشبختانه، آنفلوانزای مرغی نمی‌تواند در بین انسان‌ها منتقل شود؛ اما این ویروس در صورت جهش، قادر به انتقال در میان انسان‌ها خواهد بود. احتمال مرگ و میر بالای ناشی از آنفلوانزای مرغی

جهش یافته اثبات نشده است؛ با این حال، کارشناسان معتقدند که آنفلوآنزای مرغی جهش یافته، توانایی انتقال بین انسان‌ها را خواهد داشت.

خطر بیماری همه‌گیر آنفلوآنزای مرغی در آینده‌ای نزدیک توسط سازمان بهداشت جهانی (WHO)^۱ هشدار داده شده است. از آنجا که داروهای ضد ویروسی گران، و منابع محدود هستند؛ بنابراین مطالعه‌ی مکانیسم گسترش آنفلوآنزای مرغی در جهان دارای اهمیت بسیاری است.

مدل‌های ریاضی ابزارهای مهمی برای تحلیل گسترش و کنترل بیماری‌ها هستند. این مدل‌ها می‌توانند در عین سادگی اطلاعات مهمی از جنبه‌های نهفته‌ی انتشار بیماری‌ها ارائه بدهند. یکی از اهداف تحلیل مدل‌های اپیدمیولوژی بدست آوردن درکی واضح از تشابهات و اختلافات موجود در رفتار جواب مدل‌هاست که اجازه می‌دهد این مدل‌ها را برای کاربردهای مختلف به‌کار گیریم. این مدل‌ها نتایج مفهومی بسیار مهمی ارائه می‌دهند؛ به عنوان مثال عدد تکثیر پایه^۲، اطلاعاتی در مورد سرعت انتشار بیماری در اختیار ما قرار می‌دهد. مدل‌های ریاضی و شبیه‌سازی‌های کامپیوتری ابزار کارآمدی برای ایجاد ساختاری تئوری و بررسی آن‌ها، ارزیابی کیفی تخمین‌ها، پاسخگویی به سوالات کیفی و محاسبه پارامترهای کلیدی از داده‌ها هستند. مدل‌سازی اپیدمیولوژی می‌تواند روند تحقیق را تشخیص داده، جمع‌آوری داده‌های مهم را پیشنهاد کرده و کلیات سیستم را پیش‌بینی کند. بدون تردید درک کاراکترهای انتقال بیماری‌های مسری در یک منطقه می‌تواند در جهت کاهش انتقال آن بیماری مفید باشد.

یکی از جنبه‌های مهم اپیدمیولوژی، کاربرد طرح‌های کنترل برای از بین بردن بیماری‌هاست. مدل‌های بیماری‌ها برای مقایسه، عملی کردن، تخمین، بهینه کردن تصمیم‌های مختلف، پیشگیری و برنامه‌ریزی کنترل ضروری هستند. این مدل‌ها در ارائه مقدار واکسن تزریقی مورد نیاز برای کنترل بیماری‌ها بسیار مفید هستند. به عنوان مثال سازمان سلامت جهانی، برنامه‌ای برای مقابله با آبله در سال ۱۹۶۷ میلادی آغاز نمود که حدود ۱۵ میلیون نفر در هر سال به آن مبتلا می‌شدند. استراتژی سازمان سلامت جهانی شامل برنامه‌های واکسیناسیون گسترده، نظارت بر شیوع و کنترل این شیوع با برنامه‌های واکسیناسیون محلی بود. این برنامه یک موفقیت فوق‌العاده در واکسیناسیون عمومی

^۱World Health Organization

^۲The basic reproduction number

بود، به طوری که در نهایت آبله به صورت جهانی در سال ۱۹۷۷ میلادی ریشه کن شد [۵۲،۵۳]. با توجه به این که مدل سازی ریاضی در بیماری های یکی از روش های موثر برای درک بهتر بیماری هاست، در این پایان نامه که بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده است، در نظر داریم پس از بیان مفاهیم اولیه ی مربوط به تحلیل ریاضی سیستم های دینامیکی و تعاریف مقدماتی از قبیل نقاط ثابت و انواع آن، پایداری، تصویر فاز، قضیه خطی سازی هارتمن و قضیه پایداری لیاپانوف، نقاط حدی، دوره های حدی، انشعاب ها و همچنین بررسی پایداری سیستم های گسسته را بیان کنیم، در فصل دوم ضمن ارائه ی مدل های دینامیکی از بیماری های عفونی و ارائه ی مدل ساده ای از بیماری آنفلوآنزای A و تحلیل ریاضی مربوط به این سیستم، تاریخچه ای از روند گسترش و جهش ویروس آنفلوآنزای A را بیان می کنیم. در فصل سوم مدلی جدید از آنفلوآنزای A با مکانیسم های تکاملی جزئی و کلی معرفی می کنیم که شامل سه گونه ی آنفلوآنزای فصلی انسانی، آنفلوآنزای H5N1 منتقل شده از پرنده به انسان و آنفلوآنزای H5N1 تکامل یافته ی همه گیر خواهد بود. در ادامه به طور جداگانه تعادل تک گونه ای را بررسی کرده و عدد تکثیر گونه ها را معرفی می کنیم. بخشی از این فصل به تعادل همزیستی اختصاص داده شده و دو سناریوی جهش مداوم و جهش آبی به یک گونه ی همه گیر مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تجزیه و تحلیلی از پایداری موضعی تعادل ارائه شده و در نهایت شرایط برای پایداری کلی نتیجه گیری می شود.

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq \mathbb{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. در یک سیستم دینامیکی، با دانستن وضعیت فعلی سیستم، می‌توان وضعیت آینده‌ی آن را پیش‌بینی کرد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله فیزیکی یا کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبلی و بعدی، پیش‌بینی کرد. از این‌رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در یک سیستم دینامیکی، هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح $t \in \mathbb{Z}$ سنجیده شود، سیستم دینامیکی را گسسته گویند و اگر به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in \mathbb{R}$ ، سیستم دینامیکی را پیوسته می‌گویند. سیستم‌های گسسته به‌طور معمول با نگاشت تکراری به صورت

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

توصیف می‌شوند، در حالی که سیستم‌های پیوسته به‌طور معمول توسط معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$

توصیف می‌شوند. بیشتر شرایطی که برای سیستم‌های پیوسته برقرار است، با روندی مشابه برای سیستم‌های گسسته به کار برده می‌شود.

در حالت کلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$ ، $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن را سیستم غیرخطی گویند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان به‌صورت تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

۱.۱ مطالعه رفتار جواب در سیستم‌های دینامیکی

یکی از روش‌های مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است.

قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجود و منحصربفردی جواب آن، آگاه باشیم. از این رو لازم است روشی که وجود جواب و منحصربفردی آن را بدون حل سیستم تضمین کند، بیان شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$ ، هرگاه X تابعی پیوسته باشد.

همچنین، گویند $X \in C^k(D)$ ، $k > 0$ ، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه k ام موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه وجودی و منحصربفردی جواب). فرض کنید D زیر مجموعه بازی در \mathbb{R}^{n+1}

شامل x_0 باشد. اگر $X \in C(D)$ ، آنگاه مسأله مقدار اولیه

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$ ، آنگاه مسأله دارای جواب منحصربفرد روی I است.

تذکر ۳.۱.۱. در قضیه ۲.۱.۱، I بزرگترین بازه‌ای است که مسأله مقدار اولیه در آن دارای جواب

است. بازه I را بازه ماکزیمال می‌گویند.

جواب $x(t)$ از سیستم (۱.۱) به طور هندسی با نمودار $x(t)$ نمایش داده می‌شود. این نمودار

منحنی جواب را در صفحه‌ی tx نشان می‌دهد. همواره رسم دقیق منحنی‌های جواب برای بدست

آوردن رفتار کیفی آن‌ها مقدور نبوده و از طرفی، در حالت کلی نیز لازم نیست.

۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

تعریف ۱.۲.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = X(x), \quad x \in S \subseteq \mathbb{R}, \quad (D = \mathbb{R} \times S) \quad (1.1)$$

یک سیستم خودگردان نامیده می‌شود اگر تابع f مستقل از t باشد، یا به طور صریح، t در سمت راست تابع $X(x)$ ظاهر نگردد.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی از نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم خودگردان (۲.۱) را در نظر بگیرید. یک نقطه ثابت (نقطه‌ی تعادل، نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی ساکن)، نقطه‌ای است که در معادله‌ی $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

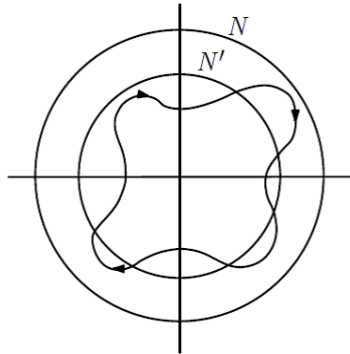
تعریف ۳.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۲.۱) را منفرد گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۲.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مسأله

هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد.

نقاط بحرانی در بررسی رفتار سیستم دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند و بر اساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۲.۱) در همسایگی هر نقطه بحرانی فقط و فقط به صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۴.۲.۱. یک نقطه بحرانی x_0 از سیستم (۲.۱) را پایدار گویند، هرگاه برای یک همسایگی \mathcal{N} از x_0 ، یک همسایگی کوچک‌تر $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ از نقطه تعادل وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد \mathcal{N}' می‌شود، با افزایش t در \mathcal{N} باقی بماند.



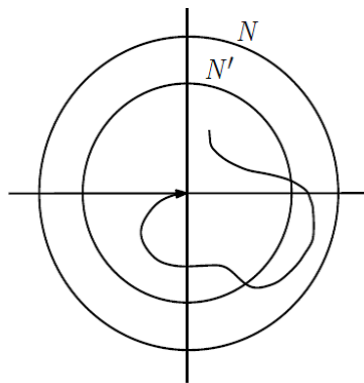
شکل ۱.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۴.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2 .

تعریف ۵.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۲.۱) را به طور مجانبی پایدار گویند، هرگاه

۱- پایدار باشد؛

۲- یک همسایگی \mathcal{N} از x_0 وجود داشته باشد، به طوری که هر مسیری که وارد \mathcal{N} می‌شود، با افزایش t به x_0 میل کند.

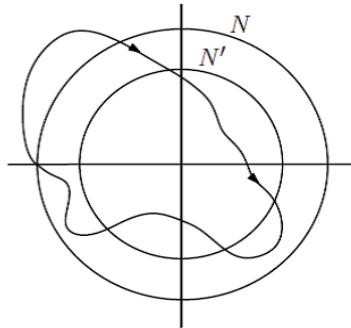
توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه‌ی کافی در نزدیکی x_0 باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب می‌کند که با افزایش t ، هر مسیری به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک شود.



شکل ۲.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۵.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2 .

تعریف ۶.۲.۱. نقطه ثابت x از سیستم (۲.۱) را پایدار خنثی گویند، هرگاه پایدار باشد اما به طور مجانبی پایدار نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. نقطه ثابت x از سیستم (۲.۱) را ناپایدار گویند، هرگاه پایدار نباشد. به عبارت دیگر یک همسایگی \mathcal{N} از x وجود دارد به طوری که برای هر همسایگی $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ ، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد \mathcal{N}' می‌شود، ولی در \mathcal{N} باقی نمی‌ماند.



شکل ۳.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف (۷.۲.۱) برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2 .

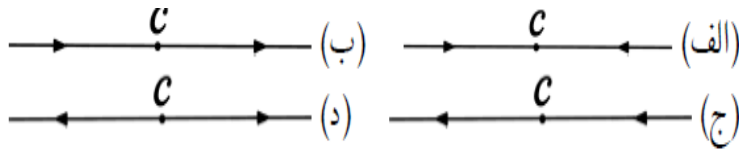
تعریف ۸.۲.۱. نقاط ثابتی که به طور مجانبی پایدار هستند را جاذب و نقاط ثابت ناپایدار را دافع می‌نامند.

نقاط ثابت معادله خودگردان

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq R \quad (۲.۱)$$

را می‌توان بر اساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع دافع، جاذب و گذر دسته‌بندی کرد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان (۳.۱) باشد. گوئیم



شکل ۴.۱: چهار خط فاز ممکن متناظر با یک نقطه ثابت منفرد؛ نقطه ثابت مورد نظر در (الف)، جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع است.

• c جاذب است هرگاه جواب‌های نزدیک به c به آن میل کنند؛

• c دافع است هرگاه جواب‌های نزدیک به c از آن دور شوند؛

• c گذر است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

تعریف ۱۰.۲.۱. دو معادله دیفرانسیل خودگردان را هم‌ارز کیفی گویند هرگاه تعداد نقاط ثابت یکسان داشته باشند و همچنین ترتیب رفتار کیفی نقاط ثابت (ماهیت نقاط ثابت) یکسان باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید c یک نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. در این صورت

۱. اگر $0 < \frac{dX}{dx}(c)$ ، آنگاه c از نوع جاذب است؛

۲. اگر $0 > \frac{dX}{dx}(c)$ ، آنگاه c از نوع دافع است؛

۳. اگر $0 = \frac{dX}{dx}(c)$ ، آنگاه برای تعیین نوع نقطه ثابت باید مشتقات مراتب بالا بررسی شود.

برهان. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. یک انحراف کوچک $\xi(t)$ از نقطه ثابت را

در نظر بگیرید، لذا $x(t) = c + \xi(t)$ و

$$\dot{\xi} = \dot{x} = X(x) = X(c + \xi).$$

با محاسبه بسط تیلور X حول c ، به عبارت

$$\dot{\xi} = X(c) + \xi \frac{dX}{dx}(c) + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2 X}{dx^2}(c) + \dots$$