
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

انتگرال چندجمله‌ای‌های برنشتاین و کاربرد آنها در حل عددی معادلات تابعی

استادان راهنما:

دکتر محمد شفیع دهاقین و دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهشگر:

میثم وطنیه

مهر ۱۳۹۱

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،
به پاس قلب های بزرگشان، که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،
این مجموعه را به مادر عزیز، پدر بزرگوار و همسر گرانقدرم تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلند یک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می ریزم و آن را به لهجه های همه ی پروانه صفت های این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دل های زلال هدیه می کنم :

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم،

که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمتت نعمت هایت را بر من تمام کردی،

خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از دوستم علی ابراهیمی و همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این مجموعه مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استادان راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد شفیع دهاقین و جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی ابراز می نمایم، که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. همچنین از برادرانم هادی و محسن و خواهرانم به خاطر کمک هایشان کمال تشکر را دارم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

میثم وطنیه

مهر ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه ابتدا چندجمله‌ای‌های برنشتاین را تعریف کرده و خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از این چندجمله‌ای‌ها به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم می‌پردازیم. در ادامه چندجمله‌ای‌های برنشتاین را برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم به کار می‌بریم. سرانجام معادلات دیفرانسیل مرتبه زوج را با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین حل می‌کنیم و در هر یک از حالت‌های مذکور با بیان مثال‌های عددی می‌توان نتایج به دست آمده حاصل از به کارگیری چندجمله‌ای‌های برنشتاین را مشاهده نمود.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 45B05، 45F05.

کلمات کلیدی : چندجمله‌ای‌های برنشتاین، معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم، معادلات انتگرال ولترای نوع اول، معادلات انتگرال ولترای نوع دوم، معادلات دیفرانسیل مرتبه زوج.

فهرست مطالب

مقدمه

معادلات انتگرال نقش مهمی در علوم مهندسی و علوم پایه به ویژه فیزیک، بیولوژی و شیمی ایفا می‌کنند. همچنین مطالعات زیادی برای ارائه روش‌های کارآمد جهت حل این معادلات صورت گرفته است [۲]، [۱۳]، [۲۱]، [۲۲]. این معادلات در شکل‌های گوناگون ظاهر شده و با توجه به پیچیدگی‌های حل آنها در راستای توسعه تحقیقات در کلاس‌های متفاوتی طبقه‌بندی می‌شوند. کتاب راهنمای پولیانین [۲۰] طبقه‌بندی جامعی برای معادلات انتگرالی و روش‌های حل آن‌ها در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد، اما با توجه به اینکه این مرجع بیشتر شامل روش‌های قدیمی حل این معادلات است، لذا برای دستیابی به تحقیقات جدیدتر به هیچ وجه کافی نیست [۱]، [۴]، [۳]، [۵]، [۱۴].
در هر پدیده‌ای چه در طبیعت از قبیل فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، نجوم یا علوم نظری مانند جامعه‌شناسی، مدیریت، روانشناسی و غیره پارامترهای مختلفی وجود دارند که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با یکدیگر ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، یک معادله است و معادله حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل مطالعه می‌شود، یک معادله دیفرانسیل است. اگر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی خواهد بود و اگر تعداد متغیرهای مستقل بیش از یکی باشد، یک معادله دیفرانسیل جزیی پدید خواهد آمد. [۷]، [۱۸].
چندجمله‌ای‌های برنشتاین نقش موثری را در ریاضی ایفا می‌کنند. این چندجمله‌ای‌ها اکثرا در حل معادلات دیفرانسیل و نظریه تقریب کاربرد دارند [۷]. با ظهور گرافیک‌های کامپیوتری این چندجمله‌ای‌های در رسم منحنی‌های بزیه اهمیت فراوانی یافتند [۱۰]. خواص بسیاری از منحنی‌های بزیه و رویه‌ها ناشی از خواص چندجمله‌ای‌های برنشتاین می‌باشد. از آنجایی که چندجمله ای‌های قطعه‌ای مانند چندجمله‌ای‌های برنشتاین هم مشتق‌پذیر و هم انتگرال‌پذیر هستند، لذا به فرم یک پایه کامل روی بازه متناهی تعریف می‌شوند [۱۶]. به علاوه این چندجمله‌ای‌ها مثبت و مجموع آنها یک است و از آنها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی مرتبه دوم استفاده می‌شود.

فهرست نمادها

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیدایش معادلات انتگرال

بنا به نظر بوچر [۱] نام معادله انتگرال توسط دوبویس- ریموند [۲] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده بود، هر چند اولین پیدایش معادله انتگرال به آبل [۳] منسوب است. آبل در رساله خود بین سال‌های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول مطالعه روی معادلاتی به شکل

$$f(x) = \int_a^x (t-a)^{-\alpha} g(t)dt \qquad 0 < \alpha < 1$$

بود، که در آن f تابعی پیوسته و معلوم بوده و در شرط $f(a) = 0$ صدق می‌کرد. همچنین بنا به روایتی دیگر، پیدایش معادله انتگرال به لاپلاس [۴] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که در حال مطالعه روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها بود. وی در همان سال معادله انتگرالی به صورت

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt$$

را معرفی نمود که برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌رفت. در سال ۱۸۲۰ فوریه [۵] مفهوم تبدیلات فوریه را مطرح کرد که یافتن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر می‌شود. وی دو سال بعد به معادله‌ای به شکل

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xy) g(y)dy$$

رسید که این معادله از نوع معادله انتگرالی است. پواسون [۶] در سال ۱۸۲۶ با مطالعه معادله مغناطیس به معادله انتگرال

$$g(x) = f(x) + \int_0^x k(x-y)g(y)dy$$

---

[۱] Bocher
[۲] Du Bois-Reymond
[۳] Abel
[۴] Laplace
[۵] Fourier
[۶] Poisson

رسید. او با بسط $g(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ موفق به حل این معادله شد. همگرایی این سری در سال ۱۸۳۷ توسط لیوویل [۷] اثبات شد و یک گام مهم دیگر در راه توسعه معادله انتگرال، یعنی چگونگی حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرالی، برداشته شد.
اصطلاحات نوع اول و دوم که امروزه برای برای معادلات انتگرالی به کار می‌رود اولین بار توسط هیلبرت [۸] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به شکل‌های

$$g(y) = \int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

$$f(x) = g(x) + \int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

که در آنها K و g توابعی معلوم و f تابعی مجهول است مطرح بود که هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند.
در سال ۱۸۷۰ نیومان [۹] ثابت کرد که یافتن جواب مسئله دیریکله معادل است با یافتن جواب یک معادله انتگرالی که اصطلاحا به آن معادله انتگرال مرزی می‌گویند. پوآنکاره [۱۰] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرالی به صورت

$$f(x) = u(x) + \int_a^x k(x,y)u(y)dy$$

را معرفی کرد که با معادله دیفرانسیل

$$\nabla(u) = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$$

معادل است. اریک ایوان فردهلم [۱۱] در اواخر قرن نوزدهم برای رسیدن به جواب این معادله مطالعاتی انجام داد، اما این ویتو ولترا [۱۲] بود که نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه داد. فردهلم برای حل مسئله دیریکله از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد. بعد از ارائه سمیناری توسط اریک هولمگر [۱۳] در سال ۱۹۰۱ روی کارهای فردهلم، هیلبرت به معادله انتگرال علاقه‌مند شد و او موفق به حل بسیاری از معادلات در ریاضیات و فیزیک و سایر علوم با استفاده از معادلات انتگرال گردید. یکی از کارهای مهم هیلبرت فرموله‌کردن معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی به صورت معادله انتگرال است. در اوایل نیمه دوم قرن اخیر تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال توسط هرمن ویل [۱۴] صورت گرفته است. در سال‌های اخیر بیشتر مطالعات بر روی روش‌های عددی حل معادلات انتگرال متمرکز شده است.

[۷] Lhouvill
[۸] Hilbert
[۹] Neumann
[۱۰] Poincare
[۱۱] Erik Ivan- Fredholm
[۱۲] Vito-Voltra
[۱۳] Erik Holmger
[۱۴] Hermann Weyl

۲.۱ معرفی انواع معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در بخشی از آن از یک عبارت شامل یک تابع مجهول، انتگرال‌گیری می‌شود. در مثال زیر به نمونه‌هایی از معادلات انتگرال اشاره شده است.

مثال ۱.۲.۱. در معادلات انتگرال زیر تابع $y(t)$ مجهول و سایر توابع معلوم‌اند.

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a\leq x\leq b \tag{۱.۱}$$

$$y(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a\leq x\leq b \tag{۲.۱}$$

$$y(x)=\int_a^b k(x,t)y^{2}(t)dt \qquad a\leq x\leq b \tag{۳.۱}$$

$$y(x)=\int_a^b\int_a^b k(x,t,s)y(t)y(s)dtds \qquad a\leq x\leq b \tag{۴.۱}$$

هر یک از معادلات (۱.۱) و (۲.۱) را می‌توان به صورت:

$$L[y(x)]=f(x)$$

نمایش داد که در آن L یک عملگرخطی است. لذا در معادله (۱.۱) عملگر L عبارتست از:

$$L[y(x)]=\int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a\leq x\leq b \tag{۵.۱}$$

و در معادله (۲.۱) عملگر L به شکل

$$L[y(x)]=y(x)-\int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a\leq x\leq b \tag{۶.۱}$$

است. در نظریه کلاسیک معادلات انتگرال، با معادلات فردهلم و ولترا روبرو می‌شویم. در معادلات فردهلم ناحیه انتگرال‌گیری ثابت و در معادلات ولترا ناحیه انتگرال‌گیری متغیر است. لذا معادله

$$cy(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s,y(s))ds \qquad a\leq t\leq b \tag{۷.۱}$$

یک معادله فردهلم و معادله

$$cy(t)=f(t)+\lambda\int_a^t k(t,s,y(s))ds \qquad a\leq t\leq b \tag{۸.۱}$$

یک معادله ولترا می‌باشد.

$k(t,s,y(s))$ که روی مربع $a\leq s,t\leq b$ از صفحه (s,t) تعریف شده هسته معادله انتگرال گویند. در این معادلات توابع هسته و $f(t)$ معلوم بوده و $y(t)$ تابعی مجهول است. پارامتر λ اغلب نوشته نمی‌شود ولی در برخی تحقیقات نظری خاص و به عنوان مثال در مسائل پایداری و همچنین در مسائل مقدار ویژه از اهمیت خاصی برخوردار است. اخیرا تحقیقاتی توسط هرمن ویل در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال می‌تواند جواب داشته باشد، صورت گرفته است.

این دو نوع معادلات انتگرال، یعنی معادلات انتگرال ولترا و فردهلم به طور کلی مربوط به مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی‌اند. لذا معادلات ولترا که دارای حد بالایی انتگرال‌گیری متغیرند با

روش‌های چندگامی حل می‌شوند در حالی که معادلات انتگرال فردهلم بیشتر با روش‌هایی که به حل تقریبی دستگاه معادلات جبری منجر می‌شود، قابل حل‌اند.

۳.۱ هسته معادلات انتگرال

در روش‌های حل عددی معادلات انتگرال می‌توان، با توجه به شکل و نوع هسته، روشی را برای حل انتخاب کرد که ما را سریع تر به جواب مسئله برساند. در زیر به چند حالت خاص از هسته‌ها اشاره می‌کنیم.

- اگر هسته یک معادله انتگرال خطی در رابطه $k(s,t) = k(t,s)$ صدق کند، معادله را با هسته متقارن [۱۵] گوییم. این خاصیت در نظریه معادلات انتگرال فردهلم نقش کلیدی ایفا می‌کند.
- اگر هسته یک معادله انتگرال خطی به شکل $k(t,s) = k(a+b-t, a+b-s)$ باشد، هسته را دارای مرکز تقارن [۱۶] گوییم.
- اگر $k(t,s,y(s)) = f(t-s)g(s,y(s))$ ، آنگاه معادله انتگرال را پیچشی گوییم.
- اگر در معادله انتگرال فردهلم، هسته به صورت

$$k(t,s,y(s)) = k_۱(t,s,y(s)) \qquad a \le s \le t$$

$$k(t,s,y(s)) = k_۲(t,s,y(s)) \qquad t \le s \le b$$

باشد و $k_۱$ و $k_۲$ خوش رفتار باشند به طوریکه k یا مشتق آن نسبت به s احتمالا ناپیوسته باشند، آنگاه این هسته را دوبخشی گوییم.

۴.۱ معادلات انتگرال یک بعدی

همان طور که گفته شد معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. نمونه‌ای از یک معادله انتگرال بر حسب تابع مجهول $u(x)$ به صورت

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (۹.۱)$$

است که در آن $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال‌اند. $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ هم از قبل معلوم هستند.

هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u(x)$ است که در رابطه (۹.۱) صدق می‌کند. در مثال زیر درباره نحوه تبدیل یک مسئله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال بحث خواهیم کرد.

مسئله مقدار اولیه

$$u'(x) = ۲xu(x) \quad x \geqslant ۰ \qquad (۱۰.۱)$$

[۱۵] Symmetry

[۱۶] Symmetry Center

با شرط اولیه

$$u(۰) = ۱ \tag{۱۱.۱}$$

را در نظر می‌گیریم. معادله (۱۰.۱) را می‌توان به سادگی با به کار بردن ایده جدا کردن متغیرها حل کرد. جواب این معادله دیفرانسیل با توجه به شرط آن به صورت

$$u(x) = e^{x^۲} \tag{۱۲.۱}$$

خواهد بود. اما اگر از طرفین رابطه (۱۰.۱) نسبت به t از ۰ تا x انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_۰^x u'(t)dt = \int_۰^x ۲tu(t)dt \tag{۱۳.۱}$$

که با توجه به شرط اولیه رابطه

$$u(x) = ۱ + \int_۰^x ۲tu(t)dt \tag{۱۴.۱}$$

نتیجه می‌شود. با مقایسه روابط (۹.۱) و (۱۴.۱) می‌توان دریافت که (۱۴.۱) یک معادله انتگرال با هسته $K(x,t) = ۲t$ و تابع $f(x) = ۱$ است.

همان‌طور که هدف اصلی ما تعیین تابع مجهول $u(x)$ است که زیر علامت انتگرال در معادلات (۹.۱) و (۱۴.۱) ظاهر شده و در معادله انتگرال داده شده صدق می‌کند. به معادلات انتگرال (۹.۱) و (۱۴.۱) معادلات انتگرال خطی می‌گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی است یعنی توان یک دارد، اما اگر تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال با توابعی غیرخطی نظیر $u^۲(x)$ یا $\cos u(x)$ یا $e^{u(x)}$ و غیره تعویض شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی گویند.

۵.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b اند به صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad ۰ \le x,t \le b \tag{۱۵.۱}$$

است که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$، و تابع $f(x)$ و پارامتر λ داده شده‌اند.

معادله (۱۵.۱) را خطی گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ داخل علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است، یعنی توان $u(x)$ یک است. معادلات انتگرال فردهلم خطی بر حسب انتخاب $\phi(x)$ به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

الف: اگر $\phi(x) = ۰$ آنگاه معادله (۱۵.۱) به معادله

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = ۰ \tag{۱۶.۱}$$

تبدیل می‌شود که آن را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

ب: اگر $\phi(x) = ۱$ آنگاه معادله

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{۱۷.۱}$$

را خواهیم داشت که به آن، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.
توجه به این نکته ضروری است که معادله (۱.۱۷) را می‌توان از معادله (۱.۱۵) با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ با شرط $\phi(x) \neq ۰$ به دست آورد. بنابراین دو حالت فوق از شروط $\phi(x) = ۰$ و $\phi(x) \neq ۰$ به دست می‌آیند.

۱.۶ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، به صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱.۱۸)$$

است، که در آن تابع مجهول $u(x)$ در داخل علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.
باید توجه کرد که (۱.۱۸) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوریکه هسته $K(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود. معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه تقسیم کرد.
الف: اگر $\phi(x) = ۰$ آنگاه معادله (۱.۱۸) به صورت

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = ۰ \qquad (۱.۱۹)$$

تبدیل می‌شود که به آن معادله انتگرال ولترای نوع اول می‌گویند.
ب: اگر $\phi(x) = ۱$ آنگاه معادله (۱.۱۸) به شکل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱.۲۰)$$

در خواهد آمد که آن را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌نامند.
با توجه به معادلات (۱.۱۵) تا (۱.۲۰) نتایج زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۱ (ساختار معادلات فردهلم و ولترا)
در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول $u(x)$ تنها به طور خطی در داخل علامت انتگرال ظاهر می‌شود، اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم، تابع مجهول هم در داخل علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

نتیجه ۲ (حدود انتگرال‌گیری)
در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود، اما در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود بازه انتگرال‌گیری و معمولا حد بالای انتگرال‌گیری متغیر است.

نتیجه ۳ (منشا ظهور معادلات انتگرال)
معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. البته

معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند، به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مساله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد بود و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.
بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مساله‌ای حاصل می‌شود، تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد.
نتیجه ۴ (خاصیت خطی)
تاکنون تابع مجهول $u(x)$ در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم در داخل علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شد. اگر در داخل علامت انتگرال، عبارتی غیرخطی بر حسب $u(x)$ مانند $F(u(x))$ قرار گیرد، آنگاه معادلات انتگرال غیرخطی فردهلم و ولترا را خواهیم داشت. مثال‌هایی از معادلات انتگرال غیرخطی به صورت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u^2(t)dt$$
$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)e^{u(t)}dt$$
$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)\sin(u(t))dt$$

خواهند بود. همان طور که مشاهده می‌کنیم در روابط فوق در مقایسه با معادله (۹.۱) به جای $u(t)$ به ترتیب $u^2(t)$ و $e^{u(t)}$ و $\sin(u(t))$ آورده شده است.
نکته (خاصیت همگن بودن)
اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (۱۷.۱) و معادله انتگرال ولترای نوع دوم (۲۰.۱) شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامند، در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.
نتیجه ۵ (رفتارتکین معادله انتگرال)
یک معادله انتگرال را منفرد (تکین) می‌نامند اگر انتگرال‌گیری مجازی باشد. به عبارت دیگر بازه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا چند نقطه از بازه موردنظر بی‌کران باشد.

۷.۱ جواب یک معادله انتگرال

یک جواب معادله انتگرال روی بازه انتگرال‌گیری، تابعی است که در معادله داده شده صدق کند. در این رابطه به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱.۷.۱. تابع $u(x) = e^x$ یک جواب از معادله انتگرال ولترای

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \qquad (۲۱.۱)$$

است، زیرا با جایگذاری $u(x)=e^x$ در طرف راست معادله (RHS) ، طرف چپ معادله (LHS) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} RHS &= 1+\int_0^x e^t dt \\ &= 1+e^t \mid_0^x \\ &= e^x = u(x) = LHS. \end{aligned}$$

مثال ۲.۷.۱. تابع $u(x)=x$ جوابی از معادله انتگرال فردهلم

$$u(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\int_0^1 (x+t)u(t)dt \tag{۲۲.۱}$$

است، زیرا با جایگذاری $u(x)=x$ داریم:

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{5}{6}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\int_0^1 (x+t)u(t)dt \\ &= \frac{5}{6}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}[\frac{xt^2}{2}+\frac{t^3}{3}]|_0^1 \\ &= x = u(x) = LHS. \end{aligned}$$

۸.۱ مساله آبل

آبل در سال ۱۸۲۳ حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم، در یک صفحه قائم، تحت تأثیر نیروی جاذبه لغزیده می‌شد، را مطالعه کرد. در این مسئله فرض بر آن است که ذره از حالت سکون در یک نقطه نظیر P با ارتفاع x ، در طول منحنی مجهول به سمت پایین ترین نقطه روی منحنی نظیر نقطه O که فاصله عمودی آن صفر است، لغزیده شود. کل زمان لغزیدن ذره از مرتفع‌ترین نقطه به پایین‌ترین نقطه روی منحنی یعنی T داده شده است و چون به ارتفاع x بستگی دارد، می‌توان آن را به صورت

$$T=h(x) \tag{۲۳.۱}$$

نشان داد. فرض کنید که منحنی حرکت بین نقاط P و O طولی برابر با S داشته باشد. لذا سرعت در یک نقطه نظیر Q روی منحنی بین P و O به وسیله‌ی رابطه

$$\frac{ds}{dT}=-\sqrt{2g(x-t)} \tag{۲۴.۱}$$

مشخص می‌شود که در آن t متغیری است که فاصله عمودی نقطه Q را تعریف می‌کند و g شتاب جاذبه را مشخص می‌کند. با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه (۲۴.۱) خواهیم داشت:

$$T=-\int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x-t)}}.$$

با قرار دادن:

$$ds=u(t)dt$$

و همچنین استفاده از (۲۳.۱) معادله حرکت ذره لغزنده به صورت

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}u(t)dt} \qquad (۲۵.۱)$$

به دست می‌آید. توجه کنید که $f(x)$ یک تابع معلوم است و مقدار آن بستگی به ارتفاع x دارد و به صورت

$$f(x) = \sqrt{2g}h(x)$$

مشخص می‌شود که در آن g ثابت جاذبه و $h(x)$ زمان لغزیدن از بالاترین نقطه روی آن به سمت پایین ترین نقطه روی منحنی است. هدف اصلی مسأله آبل تعیین تابع مجهول $u(x)$ در داخل علامت انتگرال است که معادله منحنی فوق را مشخص می‌کند.

معادله انتگرال آبل به معادله انتگرال ولترای نوع اول هم شهرت دارد. به علاوه هسته $K(x,t)$ در معادله (۲۵.۱) به صورت

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$$

است. این رابطه نشان می‌دهد که هسته فوق منفرد است، زیرا اگر $t \to x$ آنگاه $K(x,t) \to \infty$ میل می‌کند. در ادامه این مطالب تبدیلات لاپلاس را تنها برای تعیین یک فرمول مناسب برای حل مسأله آبل یعنی معادله انتگرال (۲۵.۱) به کار می‌گیریم. باید توجه کرد که در روش مورد نظر، تبدیلات لاپلاس را برای مواجه شدن با معادلات انتگرال منفرد به کار نمی‌بریم.

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین معادله انتگرال (۲۵.۱) رابطه

$$\mathcal{L}(x)] = \mathcal{L}[u(x)]\mathcal{L}[x^{-\frac{1}{2}}] = \mathcal{L}[u(x)]\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{z^{\frac{1}{2}}} \qquad (۲۶.۱)$$

نتیجه می‌شود که در آن تابع گاما با نماد Γ نشان داده شده است. در انتهای همین بخش، تعریف تابع گاما و برخی روابط متناظر با آن جهت یادآوری آورده شده است.

با توجه به اینکه $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ معادله‌ی قبل به

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}[f(x)]$$

تبدیل می‌شود که می‌توان آن را به صورت

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{z}{\pi}(\sqrt{\pi}z^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}[f(x)]) \qquad (۲۷.۱)$$

نوشت. با قرار دادن:

$$h(x) = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}f(t)dt$$

در رابطه (۲۷.۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{z}{\pi}\mathcal{L}[h(x)]$$

که با توجه به رابطه

$$\mathcal{L}[h'(x)] = z\mathcal{L}[h(x)]$$