وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

جانمایی رقابتی تسهیلات با بازی ورونوی وزندار

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

زینب حسنی

استاد راهنما: **دکتر بهرام صادقی بی‌غم**

استاد مشاور: **دکتر مرضیه اسکندری**

پاییز ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم.

تشکر و قدردانی

براستی خالق لذّت‌های باشکوه در انسان نه دانش، بلکه آموختن است. نه تملک، بلکه آفرینش است نه در جایی بودن است بلکه به آنجا سفر کردن است. آن هنگام که من نوری را به‌صورت کامل دریافتم، نور دیگری را در تاریکی دنبال خواهم کرد. همانا مردمان کنجکاو هیچگاه سیراب نخواهد شد و آن‌گاه که خانه‌ای ساختند و در آن با آسایش سکنی گزیدند، به ساختن خانه‌ای دیگر همّت می‌ورزند.
نامه‌ی گاوس به بولیای در دوم سپتامبر ۱۸۰۸

در ابتدا از خدای بزرگ سپاس‌گزارم که در تمام لحظات همراه من می‌باشد. از پدر، مادر، خواهرانم و برادرم و همه فرشتگانی که بال‌های محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم.
از استاد گرامیم آقای دکتر بهرام صادقی بی‌غم و خانم دکتر مرضیه اسکندری بسیار سپاسگزارم که در این راه همراه من بودند و بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند.

چکیده

یکی از موارد مهم برای تعیین موفقیّت یا شکست یك سازمان، مکان می‌باشد. به‌طوری که تصمیم‌گیری درست درباره آن می‌تواند باعث پیروزی و انتخاب نادرست آن باعث شکست سازمان شود. به مسائلی که هدف آن‌ها یافتن مکانی برای جانمایی یک تسهیل برای سرویس‌دادن است مسائل جانمایی تسهیلات گفته می‌شود. در این پایان‌نامه آرگومان‌های هندسی با آرگومان‌های مربوط به نظریه بازی‌ها ترکیب شده‌اند تا نشان داده شود که چگونه رفتار تصمیم‌گیران روی یکدیگر اثرگذارند. بازی ورونوی یک مدل هندسی ساده برای جانمایی رقابتی تسهیلات است.

در بازی ورونوی، دو بازیکن هر کدام تعداد مشخص n تسهیل را در ناحیه U جایگذاری می‌کنند. پس از این‌که تمامی $2n$ تسهیلات جایگذاری شد، تصمیمات آنها با توجه به دیاگرام ورونوی این $2n$ نقطه ارزیابی می‌شود. در این صورت بازیکنی که تسهیلات آن ناحیه بزرگتری را تحت کنترل داشته باشد، برنده است.

در حل مسائل سعی می‌کنیم، از الگوریتم‌هائی استفاده کنیم که خروجی آنها به داده‌های دنیای واقعی نزدیک‌تر باشد. بازی ورونوی بر اساس ساختار دیاگرام ورونوی می‌باشد که آن را تنها بر اساس فاصله رسم نموده‌اند. علاوه بر معیار فاصله، ویژگی‌های دیگر تسهیلات با توجه به مسئله در رسم دیاگرام ورونوی در نظر می‌گیریم که یکی از انواع دیاگرام ورونوی به نام دیاگرام ورونوی وزن‌دار می‌باشد. در این بازی به بررسی استراتژی‌های برد بازیکن‌ها می‌پردازیم. این مدل بازی ورونوی تقریبی نزدیک به مسائل دنیای واقعی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: *هندسه محاسباتی، دیاگرام ورونوی، دیاگرام ورونوی وزن‌دار، بازی ورونوی، بازی ورونوی وزن‌دار، جانمایی تسهیلات.*

فهرست

لیست تصاویر

فصل اول

مرور کلیات

۱.۱ مقدمه

یکی از مسائل مهم تصمیم‌گیری در جانمایی رقابتی تسهیلات جستجوی مکان بهینه برای یك موجودیت جدید (ایستگاه پلیس، فروشگاه زنجیره‌ای، سوپرمارکت، جایگاه توزیع و غیره)، با توجه به مجموعه‌ای معین از مشتریان و مصرف‌کنندگان می‌باشد. مکان برای تعیین موفقیت یا شکست یك سازمان نقش مهمی دارد و تصمیم‌گیری درباره‌ای آن می‌تواند باعث پیروزی یا شکست سازمان شود. به مسائلی که هدف آنها یافتن مکانی برای جانمایی یک تسهیل برای سرویس‌دادن است مسائل جانمایی تسهیلات[۱] گفته می‌شود. معمولاً این تسهیلات به شکل‌های مختلف قصد سرویس‌دادن به مجموعه‌ای معین از مشتریان و سرویس‌گیرندگان را دارند.

جانمایی رقابتی تسهیلات با جانمایی سایت‌ها توسط سرویس‌دهندگان در حال رقابت بازار سروکار دارد. آرگومان‌های هندسی با آرگومان‌های مربوط به نظریه بازی‌ها ترکیب شده‌اند تا نشان داده شود که

۱ Facility Location

چگونه رفتار تصمیم‌گیران روی یکدیگر اثرگذار است. مدل‌های جانمایی رقابتی در فیلدهای مختلفی نظیر اقتصاد مکانی، سازمان‌های صنعتی، ریاضیات و تحقیق در عملیات مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱].

بازی ورونوی[۱] یک مدل هندسی ساده برای جانمایی رقابتی تسهیلات است. دو بازیکن سفید و سیاه که هر کدام تعداد مشخصی n تسهیل را در ناحیه U جایگذاری می‌کنند. پس از این‌که تمامی $2n$ تسهیلات جایگذاری شد، تصمیمات آنها با توجه به دیاگرام ورونوی[۲] این $2n$ نقطه ارزیابی می‌شود. بازیکنی که تسهیلات آن ناحیه بزرگتری را تحت کنترل داشته باشد، برنده است.

دیاگرام ورنوی یکی از ساختارهای هندسی است که صفحه را براساس کمترین فاصله نقاط صفحه به ناحیه‌های ورونوی افراز می‌کند.

در مدل‌های بازی ورونوی، دیاگرام ورنوی براساس فاصله اقلیدسی تسهیلات رسم می‌شود. یکی از ملاک‌های تعیین ارزش مکان معین برای تسهیل، فاصله آن از منطقه و محل مشتریان می‌باشد. در اینجا علاوه بر فاصله اقلیدسی، ویژگی‌های دیگر تسهیلات را در رسم ورونوی در نظر می‌گیریم که ما یکی از تعمیم‌های دیاگرام ورونوی به نام دیاگرام ورنوی وزن‌دار را به کار می‌بریم. این مدل بازی ورونوی، تقریبی نزدیک به مسائل دنیای واقعی می‌باشد.

مدل‌های مختلف بازی ورنوی را با بعدهای مختلف ناحیه بازی و تعداد دورهای که بازیکن‌ها می‌توانند بازی کنند، در نظر گرفته می‌شود. آهن[۳] و همکاران [۱] سناریوی دو بعدی را به عنوان عادی‌ترین سناریوی بازی ارائه کرده‌اند و استراتژی برد را برای سناریوی یك بعدی بررسی کرده‌اند. چه‌اونگ[۴] و

---

۱ $Voronoi\ Game$

۲ $Voronoi\ Diagram$

۳ Ahn

۴ $Cheong$

همکاران [۲] برای حالت‌های دو بعدی و بیشتر، جواب‌هایی ارائه داده‌اند. همچنین فکت[۱] و میجر[۲] [۳] حالت دو بعدی یک روندی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. مسعود حسن[۳] و همکارانش بازی ورونوی همسایه[۴] را معرفی کردند که هدف از استراتژی بازی بیشتر نسبت به همسایه بازیکن تا نسبت به حریف می‌باشد. آن‌ها با فرض کیفیت خدمات یکسان تسهیلات، به بررسی انواع مختلف بازی پرداخته‌اند. یکی از بازی‌ها ماکزیمم حریف همسایه[۵] است که شبیه مسائل بهینه‌سازی می‌باشد. پس از این‌که بازیکن اول تمام نقاط خود را بازی کرد، بازیکن دوم می‌خواهد همه سایت بازیکن اول را با کم‌ترین نقطه همسایه خود کند. آنها در ادامه استراتژی برد بازیکن‌ها را در هر بازی ارائه می‌کنند [۴].

ترامونو[۶] و همکارانش [۵] بازی ورونوی گسسته را معرفی کردند. دو بازیکن به نوبت n رأس روی یك گراف که ناحیه‌ای محدود و گسسته است را اشغال می‌کنند. پس گراف حداقل ۲n رأس دارد. بازی ورونوی گسسته در یك گراف محدود مشخص G، به جای فضای پیوسته محدود بازی می‌شود. هر رأسی از G به نزدیك‌ترین رأسی که به یکی از بازیکنان سفید و سیاه تعلق دارد، تخصیص می‌یابد. در پایان بازی بازیکنی که تعداد بیشتری از رئوس را به خود اختصاص داده است برنده می‌شود. ممکن است که بازی در بعضی حالات به مساوی منجر شود. آنها نشان می‌دهند که بازیکن اول در بازی ورونوی گسسته در یك درخت کامل kتایی، در حالتی که درخت در مقایسه با n و k به اندازه کافی بزرگ باشد، برتری دارد.

---

۱ $Fekete$

۲ $Meijer$

۳ $Masud\ Hasan$

۴ $Neighborship\ VoronoiGames$

۵ $Maximizing\ opponent\ neighbors$

۶ $Sachio\ Teramoto$

۱.۱.۱ ساختار پایان نامه

در این پایان نامه قصد داریم مدلی از بازی ورونوی را ارائه دهیم که علاوه بر فاصله، ویژگی‌های دیگری از تسهیلات را بتوان در آن نظر گرفت تا تقریب نزدیک به مسائل دنیای واقعی داشته باشند. در سه فصل آتی به بررسی مدل مورد نظر می‌پردازیم.

در فصل دوم به بیان تعاریف اولیه و مفاهیم مرتبط می‌پردازیم. در ابتدا دیاگرام ورونوی و تعمیمی از دیاگرام ورونوی به نام دیاگرام ورونوی وزن‌دار را معرفی می‌کنیم. در ادامه آن جانمایی تسهیلات را معرفی می‌کنیم.

در فصل سوم به بررسی مدل‌های بازی ورونوی می‌پردازیم. در بخش اول بازی ورونوی در حالت یک بعدی روی خط و دایره را معرفی می‌کنیم و استراتژی برد برای بازیکن دوم را بررسی می‌کنیم، پیروی از این استراتژی تضمین می‌کند بازیکنی که ابتدا بازی را شروع نکرده بازی را می‌برد. در بخش دوم همین مسئله را در حالت دو بعدی مورد بررسی قرار می‌دهیم امّا با اعمال این محدودیت که بازی تنها در یک دور انجام شود، به عبارتی ابتدا بازیکن اول تمامی تسهیلات خود را جانمایی می‌کند و سپس بازیکن دوم بازی می‌کند. در این حالت نیز استراتژی برد برای بازیکن دوم بررسی شده است.

در فصل چهارم مدل بازی ورونوی را با مدلی متفاوت بررسی کرده‌ایم. در این مدل هم فاصله و هم ویژگی‌های دیگر تسهیلات را در نظر گرفته‌ایم. مشتریان همیشه علاوه بر نزدیکی فاصله تسهیلات، امکانات تسهیلات مانند پارکینگ، تنوع تسهیلات (نوع و اندازه و امکانات و نحوه‌ی سرویس دهی تسهیلات) را در نظر می‌گیرند [۶]. در بخش اول بازی ورونوی وزن‌دار برای یک بعد را بررسی می‌کنیم. یک استراتژی برد برای بازیکن دوم با مهره‌های (نقطه‌های) یکسان برای دو بازیکن و مهره‌های غیرهمسان برای دو بازیکن ارائه می‌نمائیم. در بخش بعدی بازی ورونوی وزن‌دار دو بعدی را مطالعه می‌کنیم و استراتژی برد برای بازیکن‌ها با مهره‌های (نقطه‌های) یکسان را بررسی می‌کنیم. در پایان نتیجه‌گیری و کارهای آتی را بیان می‌کنیم.

فصل دوم

دیاگرام ورونوی

۱.۲ مقدمه

در این فصل یکی از ساختارهای مهم هندسه محاسباتی به نام دیاگرام ورونوی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. دیاگرام ورونوی تمام مسائل مربوط به هم‌جواری مجموعه‌ای از نقاط را در خود جای می‌دهد. دیاگرام ورونوی در سال ۱۸۵۰ توسط دیریکله[۱] مطرح شد و اولین مقاله در این زمینه در سال ۱۹۰۸ توسط ورونوی چاپ شد.

دیاگرام ورونوی بر اساس نزدیکی فاصله بین نقاط صفحه و مجموعه نقاط به نام سایت رسم می‌شود. با توجه به اهمیت و کاربرد دیاگرام ورونوی، تعمیم‌های مختلفی از آن به‌وجود آمده است. با استفاده از تابع فاصله می‌توان تعمیم‌های مختلفی از آن را رسم کرد. در حل اکثر مسائل از فاصله اقلیدسی استفاده شده است. در بازی ورونوی وزن‌دار علاوه بر فاصله اقلیدسی، با توجه به مسئله ویژگی دیگری در تابع فاصله می‌توان در نظر گرفت. ساختار دیاگرام ورونوی مورد نظر را دیاگرام ورونوی وزن‌دار می‌نامند.

---

۱ *Dirichlet*

بحث را با معرفی هندسه محاسباتی شروع می‌کنیم. در ادامه ساختار و ویژگی‌های دیاگرام ورونوی را بیان می‌کنیم. بیان این مفاهیم پیش از مطرح کردن بازی ورونوی و استراتژی‌هایی که در فصل آینده مطرح می‌شود ضروری است. در پایان، به بیان مفاهیم اولیه جانمایی تسهیلات می‌پردازیم.

۲.۲ دیاگرام ورونوی

۱.۲.۲ هندسه محاسباتی

هندسه محاسباتی، علم طراحی، تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های کارا برای حل مسائل هندسی می‌باشد. هندسه علمی از اشکال، ویژگی‌ها و روابط اشیاء فضا چون نقطه و خط می‌باشد و ابزاری برای آنالیز دنیای اطراف ما می‌باشد.

در بسیاری از موارد ما نیاز به نوشتن برنامه‌هایی داریم که شامل محاسبات با ماهیت هندسی می‌باشد. برای مثال بازی‌های ویدیوئی که کامپیوتر باید صحنه را از یک محیط سه بعدی برای بازیکنی که به اطراف حرکت می کند، نشان دهد و یا کنترل حرکت ربات که کامپیوتر باید یک مدل از موانع اطراف را برای پیدا کردن یک موقعیت ربات ایجاد کند.

رشته هندسه محاسباتی در زمینه طراحی الگوریتم در اواخر سال ۱۹۷۰ پدیدار شده است که آن را می‌توان به عنوان مطالعه سیستماتیک الگوریتم‌ها و ساختمان داده‌های اشیاء هندسی تعریف کرد. این رشته توجه بسیاری از پژوهشگران و محققان را در حل مسائل جلب کرده است. امروزه مجموعه‌های غنی از الگوریتم‌های کارآمد هندسی در درک و پیاده سازی مسائل وجود دارند. هندسه محاسباتی کاربرد گسترده‌ای در گرافیک کامپیوتری، سیستم‌های اطلاعات جغرافیائی (GIS[۱])، رباتیک کامپیوتری و غیره دارد.

---

۱ $Geographic\ Information\ System$

ما در این پایان‌نامه با استفاده از دیاگرام ورونوی که یکی از ساختارهای مهم هندسی است به بررسی مسائل جانمایی رقابتی تسهیلات می‌پردازیم.

۲.۲.۲ تعاریف و ویژگی‌های اساسی

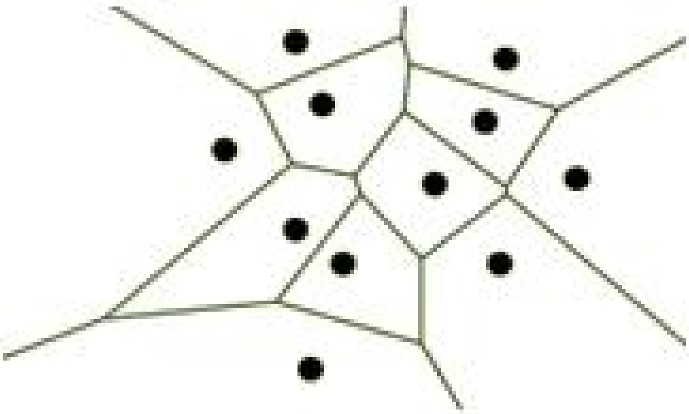
یکی از ساختارهای مهم هندسه محاسباتی، دیاگرام ورونوی می‌باشد. اگر چندین نقطه در صفحه موجود باشد، دیاگرام ورونوی صفحه را بین این نقاط براساس نزدیکی فاصله به آن‌ها همانند شکل ۱.۲ تقسیم‌بندی می‌کند. تقسیم‌بندی یک منطقه به زیر نواحی طبق برخی معیارها جهت کاربردهای مختلف مانند مراکز آتش‌نشانی در آن منطقه، مفید می‌باشد.

این مفاهیم بیش از صد سال عمر دارند. دیاگرام ورونوی در سال ۱۸۵۰ توسط دیریکله[۱] مطرح شد و اولین مقاله در این زمینه در سال ۱۹۰۸ توسط ورونوی چاپ شد [۷].

دیاگرام ورونوی یک ساختار هندسی متنوع و متغییر می‌باشد که نه تنها در جغرافیای اجتماعی کاربرد دارد بلکه در فیزیک، اخترشناسی، رباتیک، پزشکی، زمین‌شناسی و غیره نیز مورد توجه قرار گرفته است [۸] و ارتباط نزدیکی به ساختار هندسه محاسباتی مثلث‌بندی دلونی دارد. مثلث‌بندی دلونی، دوگان دیاگرام ورونوی می‌باشد. مثلث‌بندی دلونی و دیاگرام ورونوی برای مجموعه نقاط داده شده در صفحه، دوگان یکدیگر هستند. در صورتی که یکی از این دو، داده شده باشند می‌توان دیگری را نیز به‌دست آورد. فاصله اقلیدسی دو نقطه p و q در صفحه $d(p,q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ تعریف می‌شود که همان فاصله متری است که با آن سروکار داریم.

فرض کنید $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ مجموعه‌ای از نقاط در یک سطح دوبعدی اقلیدسی باشد که سایت‌ها را نشان می‌دهد. جهت درک راحت‌تر مطلب بهتر است این نقاط را مانند مراکز آتش نشانی، مراکز پلیس، دکل‌های مخابراتی و یا سایر سرویس‌دهنده‌ها در نظر بگیرید، زیرا کار نهایی این سایت‌ها مشابه این مراکز است. ناحیه ورونوی $v(p_i)$ شامل تمامی نقاطی است که فاصله آن‌ها از p_i از فاصله آن‌ها از

[۱] $Dirichlet$



شکل ۱.۲: دیاگرام ورونوی

هر سایت دیگری کمتر است.

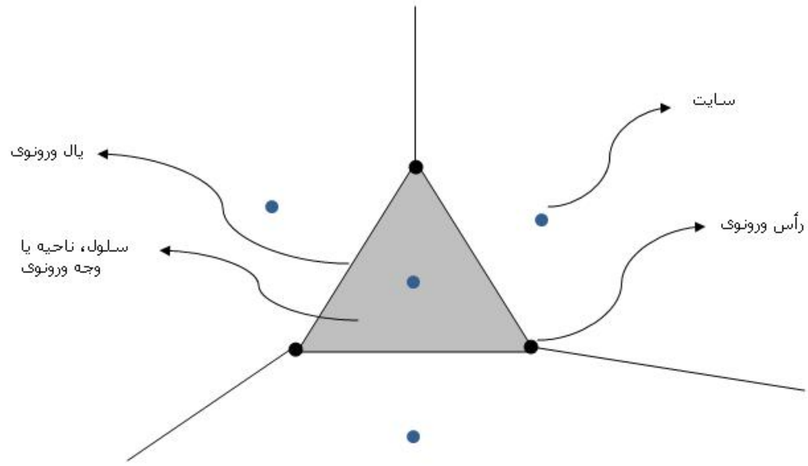
بعضی از نقاط نزدیک‌ترین سایت یکتا و منحصر به فردی (یا نزدیک‌ترین همسایه یکتا) ندارند. تمامی نقاطی که نزدیک‌ترین همسایه آن‌ها بیش‌تر از یکی است، دیاگرام ورونوی $v(p_i)$ را برای مجموعه سایت‌ها تشکیل می‌دهند. برای n سایت داده شده در مجموعه P، دیاگرام ورونوی افرازی از صفحه است به‌طوری که این افزار شامل n سلول خواهد بود. سلول متناظر با سایت p_i را با $v(p_i)$ نشان می‌دهیم. هر سایت یک سلول منحصر به خود را خواهد داشت. با این خاصیت که نقطه دلخواه q از صفحه متعلق به ناحیه سایت $v(p_i)$ است اگر و تنها اگر

$$d(p_i, q) < d(p_j, q) \quad \forall j \neq i,$$

به آن ناحیه ورونوی p_i نیز می‌گوییم. ناحیه‌های ورونوی افرازی از صفحه می‌باشد که توسط سایت‌های مجموعه P ایجاد می‌شود.

بدیهی است که نقاطی از صفحه وجود دارند که فاصله آن‌ها از دو (و یا بیشتر) سایت مساوی است. مکان هندسی این نقاط همان مرز بین سلول‌ها خواهد بود و این مرزها به صورت پاره‌خط‌هایی در صفحه هستند که به آن‌ها یال ورونوی می‌گوییم و محل برخورد یال‌های ورونوی، رأس ورونوی[۱] نامیده می‌شود. مجموعه این خطوط شکلی در صفحه پدید می‌آورند که آن را دیاگرام ورونوی متناظر با مجموعه P

۱ $Voronoi\ Vertex$



شکل ۲.۲: اجزای دیاگرام ورونوی

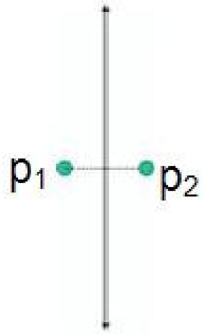
می‌نامیم. ناحیه مربوط به سایت p_i را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$V(p_i) = \{x \mid d(p_i, x) \leq d(p_j, x) : \forall j \neq i\}. \quad (۱.۲)$$

پس دیاگرام ورونوی از سه زیر مجموعه رأس ورونوی، یال ورونوی و سلول ورونوی تشکیل شده است (شکل ۲.۲). توجه کنید که یک نقطه روی یک مرز ورونوی، به دو سایت نزدیک‌ترین فاصله را دارد و یک رأس ورونوی حداقل سه تا نزدیک‌ترین سایت را خواهد داشت.

تعداد یال‌ها، رئوس و وجه‌های دیاگرام ورونوی از درجه $O(n)$ است. برای n سایت، دقیقاً n ناحیه ورونوی وجود دارد. بنابر ویژگی‌های دیاگرام ورونوی، هیچ چهار نقطه روی محیط دایره قرار ندارند و بنابراین هر رأس دیاگرام ورونوی از درجه سه است. دوگان دیاگرام ورونوی، گرافی مسطح به نام مثلث‌بندی دلونی می‌باشد. در فرمول اویلر برای گراف مسطح G با n نقطه، $3n - 6$ یال و $2n - 5$ رأس وجود دارد و وجوه گراف برابر با رئوس ورونوی هستند و یال‌های G برابر با یال‌های ورونوی هستند پس نشان داده‌ایم که تعداد یال‌ها، رئوس و وجه‌های دیاگرام ورونوی از درجه $O(n)$ هستند.

دیاگرام‌های ورونوی را برای مجموعه‌هایی از اشیاء که حالت کلی‌تری از نقطه هستند، می‌توان تشریح



شکل ۳.۲: دیاگرام ورونوی با دو سایت

کرد. پیش از پرداختن به جزئیات ویژگی‌های دیاگرام ورونوی برای تعداد نقاط زیاد، نگاهی به دیاگرام ورونوی با سایت‌های کم و محدود خواهیم داشت.

دو سایت

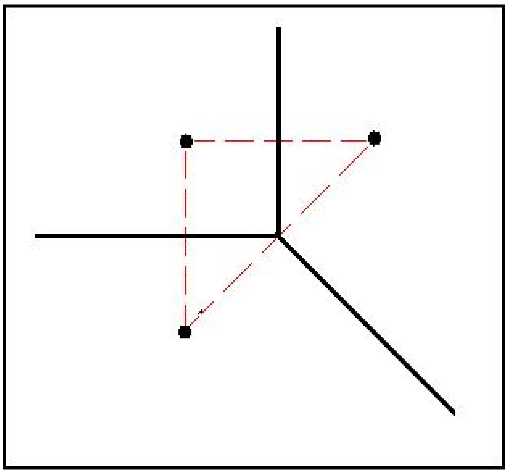
دو سایت $p_۱$ و $p_۲$ را در شکل ۳.۲ در نظر بگیرید که در آن $B(p_۱,p_۲) = B_{۱۲}$ عمودمنصف[۱] پاره‌خط $p_۱p_۲$ باشد. در این‌صورت نقطه دلخواه x روی $B_{۱۲}$، دارای فاصله مساوی از $p_۱$ و $p_۲$ است و لذا دیاگرام ورونوی این دو سایت همان عمودمنصف پاره خط $p_۱p_۲$ خواهد بود.
عمودمنصف پاره خط $p_۱p_۲$ صفحه را به دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند که یکی از نیم‌صفحه‌ها شامل $p_۱$ و یکی دیگر از آن‌ها شامل $p_۲$ است. نیم‌صفحه‌ای که شامل سایت $p_۱$ است با $h(p_۱,p_۲)$ و نیم‌صفحه شامل $p_۲$ با $h(p_۲,p_۱)$ نمایش داده می‌شود.

سه سایت

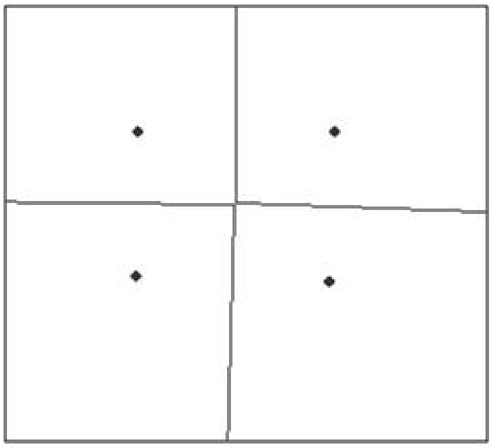
برای این حالت، واضح است که به غیر از مثلث ($p_۱$، $p_۲$، $p_۳$)، دیاگرام ورونوی شامل عمودمنصف‌های $B_{۱۲}$، $B_{۲۳}$ و $B_{۳۱}$ می‌باشند. نکته‌ای که واضح نیست، حالتی است که محل برخورد عمودمنصف‌ها در مجاورت مثلث روی می‌دهد. با توجه به قوانین اقلیدس می‌دانیم که عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث از نقطه‌ای عبور می‌کنند که مرکز دایره‌ای یکتا است، به‌طوری که آن نقطه از سه رأس مثلث عبور می‌کند. دیاگرام ورونوی سه نقطه در شکل ۴.۲ قابل رویت خواهد بود. مرکز مثلث همیشه داخل آن نمی‌باشد.

---

۱ $Bisector$



شکل ۴.۲: دیاگرام ورونوی با سه سایت



شکل ۵.۲: دیاگرام ورونوی چهار نقطه که روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند.

چهار سایت

در شکل ۵.۲، دیاگرامی با چهار نقطه که گوشه‌های یک چهارضلعی قائمه[۱] را تشکیل می‌دهند، نشان داده شده است. توجه کنید که رأس ورونوی از درجه چهار است. حال فرض کنید که یک سایت اندکی جا به جا شود. در این حالت گفته می‌شود دیاگرام نرمال است (شکل ۶.۲). در حالی‌که دیاگرام شکل ۵.۲ غیر نرمال یا تباهیده است. این دیاگرام از این نظر تباهیده است که چهار نقطه وجود دارند که روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند. غالباً در بر نگرفتن این نوع تباهیدگی، مفید خواهد بود.

---

۱ *Rectangle*