دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

حل مسأله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره به‌کمک روش‌های انقباض مخروط و نقطه‌ی مرجع

استاد راهنما

دکتر نسیم نصرآبادی

استاد مشاور

دکتر حسن حسن‌پور

نگارنده

مسلم جوانمرد

شهریور ۱۳۹۳

سپاس...

سپاس مخصوص خداوندی است که نخستین موجود است و پیش از او چیزی نبوده است، آخرین موجود است و بعد از او چیزی نیست. دیده‌ی بینندگان از دیدن او ناتوان است و اندیشه‌ی گویندگان از وصف او عاجز.

سپاس خدایی را که خود را به ما شناساند، شکر خود را به ما الهام کرد، درهای پروردگاریش را به روی ما گشود، ما را به سوی توحید خالص خود راهنمایی کرد و از شک و کج‌روی در کار خود دور کرد. سپاسی که تا زنده‌ایم جزو سپاسگزاران او باشیم و هنگامی‌که عمر به پایان رسید به سوی خشنودی و گذشت او بشتابیم.

سپاس مخصوص خداوندی است که اگر بندگانش را از شناختن سپاسگزاری خود بر نعمت‌های پی‌درپی که به آن‌ها داده است و بخشش‌های پیوسته‌اش که بر آن‌ها تمام گردانیده است، باز می‌داشت آن‌ها نعمت‌هایش را صرف می‌کردند و روزی‌شان گسترده می‌شد ولی شکر نمی‌کردند و در این‌صورت از مرز انسانیّت به حیوانیّت روی می‌آوردند.

سپاسی که تا بلندترین جایگاه‌ها بالا برود، در نامه‌ی اعمال نوشته شود و نزدیکان بارگاه الهی بر آن گواهی دهند، سپاسی که ما را از آتش دردناک خداوند برهاند و در پناه او قرار دهد، سپاسی که تاریکی‌های برزخ را بر ما روشن گرداند و راه رستاخیز را هموار نماید، سپاسی که ما را در سرای جاویدان و جایگاه پر برکت همیشگی، همراه با پیامبران قرار دهد.

سپاس خدا را، آن‌گونه که فرشتگان نزدیک و آفریدگان گرامی او سپاس می‌گویند، خدا را سپاس، برای همه‌ی نعمت‌هایش بر ما و بر همه‌ی بندگانش، به تعداد همه‌ی اشیای عالم که خدا به آن علم دارد و برای هر نعمتی چندین برابر آن شکر و سپاس تا قیامت.

سپاس خدا را، سپاسی بی‌حد و بی‌حساب، سپاسی بی‌شماره و بی‌منتها که پایانی نداشته باشد، سپاسی که به طاعت و عفو او منجر شود، موجب خشنودی خدا، رسیدن به مغفرت و بهشت و نیز پناه و امنیت از عذاب و انتقام او گردد، سپاسی که یاوری بر فرمانبری از او باشد، مانع از معصیتش، کمک به ادای حقوق الهی و انجام وظایف منتهی گردد؛ همانا خداوند بسی یاری‌دهنده و ستوده است.

خدایا به درگاه تو دعا می‌کنم که در قلب منی...

در عبور از دنیای رنج راهنمایم باش، قلبم را به سوی تو می‌گیرم پس مرا به سوی خویشتن بخوان و راه لطف و رحمتت را نشانم ده، در برابر هر آنچه که انسان ماندن را به تباهی می‌کشد، مرا با نداشتن و نخواستن رویین‌تن کن، به قلب کوچکم وسعت ده تا بتوانم بزرگیت را درک کنم و در دریای بزرگی، پاکی و مهربانی تو غرق شوم، به بال‌هایم توانی ده تا بتوانم به سوی تو پرواز کنم اِی تو که آشناترین آشنایی.

پروردگارا به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

یارب دل ما را تو به رحمت جان ده
درد همه را به صابری درمان ده
این بنده نداند که چه می باید جست
دانندهٔ تویی هر آن چه دانی آن ده
یارب دل پاک و جان آگاهم ده
آه شب و گریه ی سحرگاهم ده
در راه خود اول ز خودم بی خود کن
بی خود چو شدم ز خود به خود راهم ده

سپاس گزاری...

چه کسی هر دو لبم را به الف باز نمود
چه کسی جامه‌ی تقوا به تنم ساز نمود
ای معلم که تو را دانش بسیار بوَد
جان شاگرد به فدایت که سزاوار بوَد

به مصداق « من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق »

بسی شایسته است از استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده‌ی خویش بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین کمال قدردانی و تشکر را از مساعدت‌های بی‌شائبه‌ی جناب آقای دکتر حسن حسن‌پور که قبول زحمت فرموده و مشاور پایان‌نامه‌ی اینجانب بوده‌اند را دارم.

از اساتید محترم، دکتر اسداله محمودزاده وزیری و دکتر مسعود امان نیز به جهت قبول داوری این پایان‌نامه بسیار سپاسگزارم.

همچنین از خانواده‌ی عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش و آسایش فکری فرآهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان‌نامه‌ی درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم، سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم سپاس بی‌دریغ خود را تقدیم به آن دوستان گران مایه‌ام کنم که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم صمیمانه و مشفقانه یاری نموده‌اند.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

مسلم جوانمرد

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

لیست تصاویر ۱

۱ مقدمه‌ای بر تصمیم‌گیری چندمعیاره ۳

۱.۱ مقدمه ۴

۲.۱ تاریخچه ۶

۳.۱ بهینه‌سازی چندمعیاره ۸

۱.۳.۱ کارایی و نامغلوب بودن ۱۰

۲.۳.۱ روش‌های بهینه‌سازی چندمعیاره ۱۳

۴.۱ چند روش پایه برای حل مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره ۱۶

۱.۴.۱ روش وزن‌دهی ۱۷

۲.۴.۱ روش ε - محدودیت ۱۸

۳.۴.۱ روش نقطه‌ی مرجع ۲۰

۴.۴.۱ روش تابع ارزش (تابع مطلوبیت) ۲۱

۵.۴.۱ روش برنامه‌ریزی آرمانی ۲۲

۲ حل مسأله‌ی چندمعیاره به کمک روش‌های انقباض مخروط و نقطه‌ی مرجع ۲۴

۱.۲ مقدمه ۲۵

۲.۲ مسأله‌ی اصلی ۲۸

۳.۲ نمایی از روش نقطه‌ی مرجع معرفی شده ۳۰

۴.۲ الگوریتم تعاملی نقطه‌ی مرجع ۳۱

۵.۲ حالت اول: تابع ارزش شبه‌مقعر ۳۳

۱.۵.۲ مقایسه‌های دودویی و اطلاعات ترجیحی ۳۳

۲.۵.۲ نقاط مجاز ۳۴
۳.۵.۲ به‌دست آوردن نقاط بهینه‌ی پارتو ۳۶
۴.۵.۲ به‌هنگام کردن شعاع‌های رأسی مخروط‌های دوگان ۳۸
۶.۲ حالت دوم: تابع ارزش خطی ۴۱
۱.۶.۲ روش LIN ۴۲
۲.۶.۲ روش $SLIN$ ۴۴
۳.۶.۲ نقاط بهینه‌ی پارتوی تکیه‌کننده ۴۴

۳ نتایج عددی **۴۸**
۱.۳ مثال اول ۴۹
۱.۱.۳ تشریح روش QC ۵۰
۲.۱.۳ تشریح روش LIN ۵۴
۳.۱.۳ تشریح روش $SLIN$ ۵۶
۲.۳ مثال دوم ۵۸
۱.۲.۳ معرفی مسأله‌ی کوله‌پشتی چندمعیاره ۵۸
۲.۲.۳ تشریح روش QC ۵۹
۳.۲.۳ تشریح روش LIN ۶۲
۴.۲.۳ تشریح روش $SLIN$ ۶۴
۵.۲.۳ نتیجه‌گیری ۶۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۷**

مراجع **۶۹**

لیست تصاویر

۱.۱ چند دانشمند برجسته در زمینه‌ی تصمیم‌گیری چندمعیاره ۷
۲.۱ مقایسه‌ی شش بردار از لحاظ کارایی ۱۲

۱.۲ تعیین نقاط مجاز ۳۶
۲.۲ به‌هنگام کردن شعاع‌های رأسی ۴۱
۳.۲ شکل (۱) بردارهای ترجیحی یکه و شکل (۲) دو جهت ترجیحی جدید را نشان می‌دهد. ۴۳
۴.۲ حالت‌های ممکن برای یک نقطه‌ی بهینه‌ی پارتو در روش‌های LIN و $SLIN$. . . . ۴۷

۱.۳ نقاط بهینه‌ی پارتوی تکرارهای اول تا سوم و جهت‌های ترجیحی در هر نقطه ۴۹
۲.۳ مخروط‌های غیرترجیحی در نقاط بهینه‌ی پارتوی تکرارهای اول تا سوم روش QC . . ۵۰
۳.۳ ناحیه‌ی غیرمجاز در تکرار چهارم روش QC ۵۱
۴.۳ اجرای روش نقطه‌ی مرجع QC در تکرار چهارم ۵۲
۵.۳ جهت‌های ترجیحی به‌دست آمده در انتهای گام چهارم ۵۲
۶.۳ مخروط‌های غیرترجیحی در نقاط بهینه‌ی پارتوی تکرارهای اول تا چهارم روش QC . ۵۳
۷.۳ ناحیه‌ی غیرمجاز در تکرار پنجم روش QC ۵۳
۸.۳ اجرای روش نقطه‌ی مرجع QC در تکرار پنجم ۵۴
۹.۳ مخروط غیرترجیحی در بهترین نقطه‌ی بهینه‌ی پارتو ۵۵
۱۰.۳ ناحیه‌ی غیرمجاز در تکرار چهارم روش LIN ۵۵
۱۱.۳ اجرای روش نقطه‌ی مرجع LIN در تکرار چهارم ۵۶
۱۲.۳ مخروط‌های غیرترجیحی در نقاط بهینه‌ی پارتوی تکرارهای اول تا سوم روش $SLIN$. ۵۷
۱۳.۳ ناحیه‌ی غیرمجاز در تکرار چهارم روش $SLIN$ ۵۷
۱۴.۳ اجرای روش نقطه‌ی مرجع $SLIN$ در تکرار چهارم ۵۸
۱۵.۳ حل مسأله‌ی کوله‌پشتی سه معیاره توسط الگوریتم ارائه شده در پایان‌نامه ۶۵

پیش گفتار

تصمیم‌گیری چندمعیاره یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین شاخه‌های علم ریاضی است که کاربردهای بسیاری در حوزه‌های مدیریتی دارد. بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری در دنیای واقعی مبتنی بر تحلیل‌های چندمعیاره می‌باشند. از این‌رو به کارگیری روش‌های کارآمد برای حل چنین مسائلی حائز اهمیت است. در یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره که به صورت ریاضی فرمول‌بندی می‌شود اغلب جوابی که به‌طور همزمان همه‌ی توابع هدف را بهینه کند، وجود ندارد و لذا تصمیم‌گیرنده با مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه‌ی پارتو مواجه است. بنابراین وی اغلب به دنبال یافتن بهترین جواب با مرتب کردن گزینه‌های موجود است. تاکنون روش‌های زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره مطرح و بررسی شده است که هر کدام دارای نقاط ضعف و قوت خود هستند. به عنوان مثال روش‌های AHP، $TOPSIS$، روش وزن‌دهی، روش تابع ارزش و روش نقطه‌ی مرجع از جمله روش‌های موجود برای یافتن جواب‌های بهینه‌ی پارتو می‌باشند. همچنین روش‌های تعاملی از جمله روش‌های پرکاربرد برای حل مسائل چندمعیاره می‌باشند. از طرفی روش‌های زیادی برای دسته‌بندی و رتبه‌بندی گزینه‌ها در حالتی که تعداد گزینه‌های موردنظر متناهی است، وجود دارد که اغلب مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی بوده و از مجموعه‌ای از اطلاعات ترجیحی تصمیم‌گیرنده استفاده می‌کنند. در این پایان‌نامه به کمک مجموعه‌ای از اطلاعات ترجیحی تصمیم‌گیرنده از روش‌های تعاملی مبتنی بر روش نقطه‌ی مرجع، مقایسه‌های دودویی و انقباض مخروط برای تولید مجموعه‌ای از نقاط بهینه‌ی پارتو، مرتب کردن این نقاط با یک ترتیب کلی و سپس تعیین بهترین جواب استفاده می شود. بدیهی است که در بسیاری از کاربردهای عملی، از جمله در مسأله‌ی کوله‌پشتی و بسیاری از مسائل دنیای واقعی می‌توان از روش پیشنهاد شده در این پایان‌نامه استفاده نمود. در فصل اول این پایان‌نامه مقدماتی درباره‌ی تصمیم‌گیری چندمعیاره و تعاریف اصلی بیان می‌شود. سپس فصل دوم که مبحث اصلی پایان‌نامه است به ارائه‌ی یک روش تعاملی مبتنی بر نقطه‌ی مرجع و با ایده‌ی انقباض مخروط می‌پردازد. در نهایت در فصل سوم کاربرد الگوریتم معرفی شده در این پایان‌نامه را توسط یک مثال تشریحی و یک مثال کاربردی بیان می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر تصمیم‌گیری چندمعیاره

۱.۱ مقدمه

همه‌ی ما در زندگی روزمره همواره با مسائل متعددی مواجه می‌شویم. در واقع زندگی چیزی جز روند پیاپی برخورد با مسائل متعدد و تلاش برای حل آن‌ها نیست. بنابراین تصمیم‌گیری از جمله رخ‌دادهایی به شمار می‌آید که خواسته یا ناخواسته با آن سروکار داریم و نقش گسترده‌ای در زندگی آدمی دارد. تصمیم‌گیری می‌تواند فرآیندی عقلانی اطلاق شود که هدف آن افزایش قدرت اعتمادبنفس در جهت انتخاب گزینه‌ی درست یا بهترین گزینه از بین گزینه‌های قابل قبول می‌باشد. فرض کنید مسأله‌ی موردنظر تنها انتخاب گزینه بلی یا خیر درمورد خریدن یا نخریدن یک ماشین جدید باشد. این‌چنین مسائلی آن‌قدر جزئی و پیش‌پاافتاده هستند که تصمیم‌گیری در مورد آن‌ها می‌تواند به آسانی صورت پذیرد به‌طوری‌که امری عادی محسوب می‌شود. حال فرض کنید مسأله، انتخاب یک ماشین جدید باشد به‌طوری‌که معیارهایی همچون قیمت، راحتی، ایمنی، مدل و ... موردنظر می‌باشند. بدیهی است که نمی‌توان به سرعت و به آسانی درباره‌ی آن تصمیم گرفت. یک سوءتفاهم بزرگ پیش‌آمده است که اغلب چنان می‌پندارند که مسائل پیرامون ما تک‌هدفی بوده و یافتن جواب یکتا[۱] برای آن‌ها به آسانی ممکن می‌باشند. در حالی‌که در عمل این‌گونه نیست، چراکه با پیشرفت علم و پیچیده‌تر شدن نیازهای بشری، مسائلی که با آن‌ها روبرو هستیم همواره بیش از یک تابع هدف دربردارند که در اغلب موارد این اهداف نیز با یکدیگر در تعارض هستند. مثالی ساده از انتخاب یک هتل برای یک شب را در نظر بگیرید، اگر گزینه‌های ممکن یک هتل یک ستاره با هزینه ۷۰ یورو و یک هتل بدون ستاره با ۲۰ یورو باشند، ممکن است هتل یک ستاره با وجود اینکه هزینه آن بیشتر است، انتخاب شود. از طرفی دیگر اگر گزینه‌های موجود یک هتل پنج ستاره با ۳۰۰ یورو و یک هتل چهار ستاره با ۲۵۰ یورو باشند، ممکن است هتل چهار ستاره با وجود اینکه ستاره‌ی آن کمتر است انتخاب گردد. بنابراین می‌بینیم که نمی‌توان فقط به یک معیار بسنده کرد. همچنین نمی‌توان به‌آسانی و بدون داشتن اطلاعات کافی از ماهیت گزینه‌ها و معیارهای

[۱] Unique Solution

موجود، مسأله‌ای با چندین هدف ناسازگار[۲] را به‌صورت مسأله‌ای تک هدفی تبدیل نمود. در هر مسأله با چندین هدف ناسازگار انتظار یافتن جواب بهینه‌ی یکتا غیرمنطقی می‌باشد. لذا در این مسائل به دنبال مجموعه‌ای از جواب‌های ممکن که جواب‌های بهینه‌ی پارتو[۳] نامیده می‌شوند، هستیم. با وجود چندین جواب بهینه‌ی پارتو در این مسائل در عمل همواره یکی از جواب‌ها انتخاب می‌شود، در نتیجه در بهینه‌سازی چندهدفی حداقل دو وظیفه‌ی مهم و با اهمیت یکسان وجود دارد که یکی وظیفه‌ی بهینه‌سازی برای یافتن مجموعه تمام جواب‌های بهینه‌ی پارتو و دیگری وظیفه‌ی تصمیم‌گیری درست برای انتخاب بهترین جواب مسأله می‌باشد. بنابراین همواره در پی آن هستیم که بهترین جواب ممکن را از بین گزینه‌های موجود بیابیم. واضح است که بهینه‌سازی چندهدفی از سه مرحله‌ی مدل‌سازی[۴]، بهینه‌سازی[۵] و تصمیم‌گیری[۶] تشکیل می‌شود. به‌وضوح قبل از اینکه بتوانیم هرگونه بهینه‌سازی را انجام دهیم باید مسأله مدل‌سازی شود. لذا ساختن مدل ریاضی یا محاسباتی مناسب برای یک مسأله به اندازه بهینه‌سازی آن اهمیت دارد چراکه مدل‌سازی اشتباه منجر به جوابی اشتباه خواهد شد که سبب زیان می‌شود و حتی گاهی خسارت‌های غیرقابل جبرانی برجای می‌گذارد. مدل‌سازی مسأله وابستگی زیادی به پس‌زمینه‌ی واقعی مسأله دارد که در زیرساخت مسأله قرار می‌گیرد. در هرحال در این پایان‌نامه فرض بر آن است که مسأله به‌طور صریح مدل‌سازی و مشخص شده است و در واقع مدل‌سازی مسأله مبحث مورد نظر ما نمی‌باشد. ساده‌ترین روشی که برای حل یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی با اهداف ناسازگار به ذهن می‌رسد این است که آن را به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفی[۷] تبدیل کنیم، اما این‌کار موجب آن می‌شود که فرآیند تصمیم‌گیری قبل از بهینه‌سازی صورت پذیرد، یعنی قبل از اینکه گزینه‌های ممکن شناسایی شوند فرآیند تصمیم‌گیری صورت گرفته است. از آن‌جایی‌که تشخیص ارجحیت‌های بین گزینه‌های ممکن بدون داشتن دانش کافی مشکل است، لذا نقطه‌ی بهینه‌ای که به‌عنوان جواب به‌دست می‌آید ممکن است هیچ ربطی به جواب‌های بهینه‌ی پارتوی به‌دست آمده‌ی قبلی نداشته باشد. لذا اهمیت تصمیم‌گیری در این‌جا به خوبی جلوه می‌کند. در واقع بیشتر مسائلی که اغلب با آن‌ها روبه‌رو هستیم به اندازه کافی پیچیده و دشوار می‌باشند و اقدام به تصمیم‌گیری در مورد آن‌ها نیاز به زمان طولانی دارد. این چنین مسائلی که در آن‌ها چندین معیار نقش دارند به عنوان مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره[۸] معرفی می‌شوند. ماهیت اساسی یک مسأله‌ی

[۲] Conflicting Objective
[۳] Pareto Optimal Solutions
[۴] Modeling
[۵] Optimization
[۶] Dicision Making
[۷] Single Objective Optimization
[۸] Multi Criteria Dicision Making

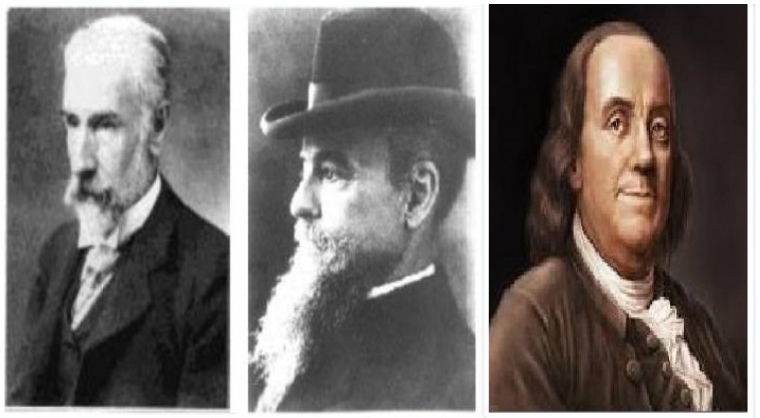
تصمیم‌گیری چندمعیاره این است که می‌تواند با اطلاعات متناقض و پیچیده فرمول‌بندی شود. این اطلاعات می‌توانند بازتاب‌های متفاوت نظرات و یا به‌عنوان توابعی از متغیرهای مسأله باشند. از آن‌جایی که گرفتن یک تصمیم نامعقول می‌تواند از نظر مالی گران و یا حتی در برخی حالت‌ها مخاطره‌آمیز باشند لذا دانستن راه‌های متفاوت برای گرفتن تصمیم درست بسیار مهم می‌باشد. انواع مختلف روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره در بخش‌های بعدی بیان و تشریح شده است.

۲.۱ تاریخچه

بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، چندین تابع هدف ناسازگار را دربردارند که باید به‌طور همزمان در نظر گرفته و بهینه شوند. این چنین مسائلی به‌طور کلی به‌عنوان مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره یا بهینه‌سازی چندمعیاره شناخته می‌شوند. مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره به طرق مختلفی قابل دسته‌بندی هستند که به نوع سؤال و ویژگی‌های موجود در آن بستگی دارد. به‌عنوان مثال اگر مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره را بر طبق گسسته یا پیوسته بودن مجموعه‌ی تمام گزینه‌های ممکن برای مسأله تفکیک کنیم می‌توان مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره[۹] را به دو شاخه اصلی مسائل بهینه‌سازی چندشاخصی[۱۰] تعریف شده در فضای گسسته و مسائل بهینه‌سازی چندهدفی[۱۱] که در فضای پیوسته تعریف می‌شوند، دسته‌بندی نمود. اگرچه نمی‌توانیم تشخیص دهیم که مطالعه‌ی مبحث تصمیم‌گیری به‌طور رسمی چه موقع آغاز شده است ولی اگر به گذشته برگردیم، می‌بینیم اولین مباحثی که در زمینه‌ی تصمیم‌گیری شرح داده شده‌اند به ترتیب مباحث نظریه‌ی تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی بوده‌اند. اساس کار بر روی نظریه‌ی تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری به تحقیقات راسمی[۱۲] و فینتی[۱۳] تقریباً در سال ۱۹۳۰ میلادی برمی‌گردد[۳۳، ۱۴]. مبحث برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی نسبتاً مستقل از مبحث تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری بوده است هرچند که اغلب تعیین مرز دقیق بین این دو مبحث به‌عنوان موضوعی مطرح است که قطعی نیست و حتی ممکن است باهم اشتراک نیز داشته باشند. پروفسور اقتصاددان ایجورث[۱۴] اولین کسی بود که بهینه‌سازی چندهدفی را برای تصمیم‌گیری اقتصادی چندهدفی تعریف نمود. همزمان با او، در سال ۱۸۹۳ پارتو[۱۵] که یکی از تحلیلگران اقتصادی عصر خود بود نظریه‌های جدیدی معرفی کرد که یکی از

[۹] Multi Critria Optimization
[۱۰] Multi Attribute Optimization
[۱۱] Multi Objective Optimization
[۱۲] Rasmey
[۱۳] Finetti
[۱۴] F. Y. Edgeworth
[۱۵] Pareto

نظریه‌های معروف او بهینه‌سازی پارتو بود. سپس در سال ۱۹۵۱ کان و تاکر[۱۶] برای اولین بار مسائل



شکل ۱.۱ : چند دانشمند برجسته در زمینه‌ی تصمیم‌گیری چندمعیاره

برنامه‌ریزی چندهدفی را مطرح کردند و شرایط لازم و کافی را برای کارایی توسعه بخشیدند. در قرن نوزدهم در برخی کشورها این شاخه از علم رشد خوبی داشت. به‌عنوان مثال در آمریکا کسانی مانند استوئر[۱۷]، استدلر[۱۸] و ... این علم را گسترش دادند و یا در ژاپن کسانی مانند ساو[۱۹]، آراگی[۲۰]، ناکایاما[۲۱]، تانینو[۲۲] و ... در زمینه‌ی این نظریه تحقیقات زیادی را به انجام رساندند. برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی در طی دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی به‌طور عمده شکل گرفت و از جمله دلایل مهم این شکل‌گیری، شکاکی و بدبینی محسوس درباره‌ی توابع ارزش (مطلوبیت) به‌کار رفته در مسائل بوده است. می‌توان اولین کار شناخته شده‌ی ثبت شده در تصمیم‌گیری چندمعیاره را به دانشمند و سیاست‌مدار آمریکایی بنیامین فرانکلین[۲۳] نسبت داد. البته قبل از آن فیلسوف و دانشمند یونان باستان ارسطو[۲۴] ترجیحات را به‌عنوان مطلوبیات منطقی بیان نموده است و در واقع ممکن است اولین نفری باشد که ارتباط بین تصمیم‌گیری عقلانی را با خواسته‌های انسانی بررسی کرده است. به‌عنوان یک حقیقت باید این را پذیرفت که بسیاری از ایده‌ها و روش‌ها پایه و اساس خود را از تئوری برنامه‌ریزی ریاضی گرفته‌اند و لذا اهمیت مطالعه روی این موضوع به خوبی قابل توجیه است. افراد

[۱۶] Khun and Tucker
[۱۷] Steuer
[۱۸] Stadler
[۱۹] Saw
[۲۰] Aragi
[۲۱] Nakayama
[۲۲] Tanino
[۲۳] Benjamin Franklin
[۲۴] Aristotle

زیادی مسائل بهینه‌سازی چندهدفی را در طی چندین دهه با جدیت مورد مطالعه قرار دادند که البته این مطالعات بیشتر جنبه نظری داشتند. در دهه‌های اخیر ظهور اینترنت و برگزاری کنفرانس‌ها سبب شد، تحقیقات در مورد بهینه‌سازی چندهدفی شکل منظم‌تری پیدا کند. کتاب‌ها و مقالات پایه‌ای بسیاری در مورد تصمیم‌گیری چندمعیاره و مباحث مرتبط با آن به‌وجود آمدند که برای نمونه می‌توان به [۱۱، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۳۱، ۳۴] اشاره کرد. به‌طور معمول در اکثر کتب شامل تصمیم‌گیری چندمعیاره، ایده‌ی حل کردن یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی بر پایه کمک کردن به تصمیم‌گیرنده[۲۵] در جهت پیدا کردن جواب بهینه‌ی پارتوی مورد رضایت وی معطوف می‌باشد. بنابراین فرآیند رسیدن به جواب نیاز به دخالت تصمیم‌گیرنده دارد تا به‌وسیله‌ی ارائه‌ی اطلاعات ترجیحی خود جواب نهایی را از بین مجموعه‌ی تمام جواب‌های بهینه‌ی پارتو برگزیند. در این پایان‌نامه فرض بر آن است که یک تصمیم‌گیرنده در حل مسأله مشارکت دارد. البته تصمیم‌گیری گروهی نیز با چندین تصمیم‌گیرنده مورد مطالعه قرار گرفته است که در این زمینه می‌توان به [۱۲، ۱۹] مراجعه نمود.

۳.۱ بهینه‌سازی چندمعیاره

شکل کلی یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{ll} Max & \{f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)\} \\ s.t. & x \in S, \end{array} \qquad (۱.۱)$$

که در آن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه شدنی، k تعداد توابع هدف و برای $i = ۱, ۲, ..., k$، تابع $f_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ i-امین تابع هدف حقیقی مقدار است که می‌تواند خطی[۲۶] یا غیرخطی[۲۷] باشد. همچنین هر $x \in S$ را جواب شدنی، مجموعه‌ی $f(S) = \{z | z = f(x), x \in S\} \subseteq \mathbb{R}^k$ را ناحیه‌ی شدنی در فضای معیار و بردار $z = f(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$ را بردار معیار متناظر با جواب شدنی x می‌نامند. در ادامه بعضی مفاهیم اولیه مربوط به مسأله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره‌ی (۱.۱) را بیان می‌کنیم. همانطور که قبلاً اشاره شد، در حالتی که فضای S پیوسته باشد مسأله‌ی (۱.۱) را چندهدفی و اگر S گسسته باشد، مسأله‌ی (۱.۱) را چندشاخصی گوییم.

تعریف ۱.۳.۱. یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره، خطی نامیده می‌شود هرگاه همه‌ی توابع هدف و محدودیت‌های مسأله خطی باشند.

[۲۵] Decision Maker
[۲۶] Linear
[۲۷] Nonlinear

تعریف ۲.۳.۱. برای دو بردار $x^۱ = (x^۱_۱, x^۱_۲, ..., x^۱_n), x^۲ = (x^۲_۱, x^۲_۲, ..., x^۲_n) \in \mathbb{R}^n$ گوییم، $x^۱ \leq x^۲$ هرگاه برای هر $j = ۱, ۲, ..., n$ داشته باشیم $x^۱_j \leq x^۲_j$.

تعریف ۳.۳.۱. تابع $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ نانزولی[۲۸] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x^۱, x^۲ \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که $x^۱ \leq x^۲$ داشته باشیم $g(x^۱) \leq g(x^۲)$.

تعریف ۴.۳.۱. یک نرم برداری روی فضای $\mathbb{R}^k$ تابعی است مانند $|| \ . \ || : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ که به هر بردار $z \in \mathbb{R}^k$ یک عدد حقیقی $||z||$ نسبت دهد و در خواص زیر صادق باشد:

۱) برای هر $z \in \mathbb{R}^k$، $||z|| \geq ۰$ و نیز $z = ۰$ اگر و تنها اگر $||z|| = ۰$،

۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $z \in \mathbb{R}^k$، $||\alpha z|| = |\alpha| ||z||$،

۳) برای هر $z, w \in \mathbb{R}^k$، $||z + w|| \leq ||z|| + ||w||$.

تعریف ۵.۳.۱. مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب[۲۹] نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و به‌ازای هر $\lambda \in [۰, ۱]$، داشته باشیم $\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲ \in X$. هر نقطه به شکل $\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲$ که در آن $\lambda \in [۰, ۱]$ ترکیب محدب $x_۱$ و $x_۲$ گفته می‌شود و نیز اگر $\lambda \in (۰, ۱)$ این ترکیب را ترکیب محدب اکید[۳۰] گوییم.

تعریف ۶.۳.۱. تابع $g : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که در آن X مجموعه‌ای محدب است، محدب نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و به‌ازای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$g(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \leq \lambda g(x_۱) + (۱ - \lambda) g(x_۲).$$

به‌طور مشابه تابع $g : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را مقعر[۳۱] گوییم هرگاه $-g$ تابعی محدب باشد.

تعریف ۷.۳.۱. مجموعه‌ی محدب غیرتهی $X \in \mathbb{R}^n$ و تابع $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. گوییم تابع g شبه‌محدب[۳۲] است هرگاه به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و به‌ازای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$g(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \leq \max\{g(x_۱), g(x_۲)\},$$

و نیز با مفروضات فوق تابع g را شبه‌مقعر گوییم[۳۳] هرگاه داشته باشیم:

$$\min\{g(x_۱), g(x_۲)\} \leq g(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲).$$

[۲۸] Non-Decreasing
[۲۹] Convex
[۳۰] Strictly Convex Combination
[۳۱] Concave
[۳۲] Quasi-Convex
[۳۳] Quasi-Concave

۱.۳.۱ کارایی و نامغلوب بودن

در مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره اغلب f_i ها ناسازگارند، به‌این مفهوم که برای یک جواب شدنی اگر یکی از توابع هدف به بیشترین مقدار خود رسیده باشد تابع هدف دیگری بیشترین مقدار خود را نگرفته است. از این‌رو جواب بهینه‌ی کامل، یعنی جوابی منحصربه‌فرد که همزمان همه‌ی توابع هدف را به مقدار بهینه‌شان برساند، وجود ندارد. در واقع، با یک دسته از جواب‌ها روبه‌رو هستیم که هیچ‌کدام بر دیگری برتری ندارند. لذا به‌جای جواب بهینه‌ی کامل، مفهوم جدیدی به نام جواب کارا[۳۴] یا جواب بهینه‌ی پارتو[۳۵] براساس ایده‌ی اقتصاددان ایتالیایی، ویلفردو پارتو معرفی می‌شود. ویلفردو پارتو (۱۹۲۳-۱۸۴۸) اولین محققی بود که کارش به‌طور رسمی به‌عنوان موضوعی از $MCDM$ دسته‌بندی شد. انتشار نظریه‌ی مشهور وی در سال ۱۹۰۶ باعث شد که ۲۰ درصد مردم ایتالیا، صاحب ۸۰ درصد املاک کشور شوند. بعداً این نظریه توسط ژوران [۳۶] تحت عنوان اصل پارتو تعمیم یافت. همچنین نام دیگر آن اصل ۲۰-۸۰ است. پارتو اولین نفری بود که مفهوم کارایی را معرفی نمود که بعداً به‌عنوان پارتو بهینگی که یکی از مفاهیم کلیدی اقتصاد و تصمیم‌گیری چندمعیاره‌ی مدرن می‌باشد، معروف شد. در مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره همواره به دنبال جواب‌های کارا و در صورت لزوم انتخاب بهترین جواب از بین آن‌ها می‌باشیم. همچنین تصمیم‌گیرنده به کسی گفته می‌شود که بتواند در مورد مسائل واقعی که با استفاده از بهینه‌سازی مدل‌بندی می‌شوند، تصمیم‌گیری نماید. به‌عبارت دیگر تصمیم‌گیرنده کارشناسی است که بر طبق تابع ارزش (یا ترجیحات) مورد نظرش در محیط‌های کاربردی اختیار و قدرت تصمیم‌گیری برای مسأله را دارد. هدف نهایی از بهینه‌سازی چندمعیاره این است که به تصمیم‌گیرنده کمک کند تا بتواند جوابی رضایت‌بخش برای خود پیدا کند.

تعریف ۱.۳.۸. نقطه‌ی شدنی $\bar{x} \in S$ کارا نامیده می‌شود هرگاه هیچ تابع هدفی در این نقطه نتواند بهبود یابد مگر این‌که برخی توابع هدف بدتر شوند. به عبارت دیگر اگر هیچ نقطه‌ی $x \in S$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای $i = ۱, ۲, ..., k$ داشته باشیم $f_i(x) \geq f_i(\bar{x})$ و همچنین اگر حداقل به‌ازای یک اندیس، نامساوی به‌صورت اکید برقرار باشد. بردار معیار $\bar{z} = f(\bar{x})$ یک بردار نامغلوب[۳۷] نامیده می‌شود.

مفهوم نامغلوب بودن مفهومی معادل کارایی است با این تفاوت که کارایی در فضای تصمیم

[۳۴] Efficient Solution
[۳۵] Pareto Optimal Solution
[۳۶] Juran
[۳۷] Nondominated

ولی نامغلوب بودن در فضای معیار مطرح می‌شود. به عبارت دیگر یک نقطه (در فضای تصمیم) کارا است اگروتنهااگر تصویر معکوس یک بردار معیار نامغلوب (در فضای معیار) باشد. همچنین مفهوم کارا بودن به عنوان بهینگی پارتو نیز شناخته می‌شود و لذا مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های کارا تحت عنوان مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی پارتو نیز بیان می‌شود. همچنین اگر نقطه‌ی شدنی $\bar{x} \in S$ کارا (یا بهینه‌ی پارتو) باشد، بردار هدف متناظر با آن یعنی $\bar{z} = f(\bar{x})$ را بردار هدف بهینه‌ی پارتو می‌نامند.

تعریف ۹.۳.۱. برای هر دو بردار معیار $z^1 = (z_1^1, z_2^1, ..., z_k^1), z^2 = (z_1^2, z_2^2, ..., z_k^2) \in \mathbb{R}^k$ گوییم z^1 غالب بر z^2 است و به‌صورت $z^1 \gtrsim z^2$ نشان می‌دهیم هرگاه به‌ازای $i = 1, 2, ..., k$ داشته باشیم $z_i^1 \geq z_i^2$ به‌طوری‌که به‌ازای حداقل یک اندیس نامساوی به‌صورت اکید برقرار باشد.

با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت جواب شدنی $\bar{x} \in S$ کارا است اگروتنهااگر در فضای معیار هیچ برداری غالب بر $\bar{z} = f(\bar{x})$ وجود نداشته باشد.

مشابه با مفهوم جواب کارا می‌توان جواب کارای ضعیف را به‌صورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۱۰.۳.۱. نقطه‌ی شدنی $\bar{x} \in S$ را کارای ضعیف (بهینه‌ی پارتوی ضعیف) نامند هرگاه هیچ نقطه‌ی $x \in S$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای $i = 1, 2, ..., k$ داشته باشیم $f_i(x) > f_i(\bar{x})$. در این‌صورت بردار معیار $\bar{z} = f(\bar{x})$ را نامغلوب ضعیف[۳۸] نامند.

تعریف ۱۱.۳.۱. مجموعه‌ی متشکل از تمام نقاط بهینه‌ی پارتو را با E نشان می‌دهیم و تصویر متناظر آن یعنی $f(E)$ را اصطلاحاً مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتو (شامل تصویر همه‌ی نقاط شدنی بهینه‌ی پارتو) یا مرز پارتو می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. بردار هدف $z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_k^*)$ را بردار هدف ایده‌آل[۳۹] نامند هرگاه تک‌تک مؤلفه‌های آن با بیشینه‌کردن توابع هدف متناظرشان روی مجموعه‌ی شدنی به‌دست آیند، یعنی

$$z_i^* = max_{x \in S} f_i(x) = max_{x \in E} f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., k.$$

تعریف ۱۳.۳.۱. بردار هدف حضیض[۴۰]، $z^{nad} = (z_1^{nad}, ..., z_k^{nad})^T$ برداری است که تک‌تک مؤلفه‌های آن با کمینه کردن هریک از توابع هدف روی همه‌ی جواب‌های مرز پارتو به‌دست می‌آیند. به‌عبارت دیگر

$$z_i^{nad} = min_{x \in E} f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., k.$$

[۳۸] Weakly Non-Dominated
[۳۹] Ideal Objective Vector
[۴۰] Nadir Objective Vector

معمولاً به‌دست آوردن بردار هدف حضیض دشوار است، چراکه در مسائل کاربردی واقعی هیچ شناختی از مرز پارتو موجود نیست، از این‌رو معمولاً تقریبی از نقطه‌ی حضیض را با روش‌های موجود به‌دست می‌آورند [۳۰، ۸].

مثال ۱.۳.۱۴. شش بردار معیار جدول زیر را در نظر می‌گیریم. بردارهای معیار z^1، z^3 و z^5 توسط سایر بردارهای معیار مغلوب می‌شوند.

بردار معیار	مقادیر معیار			بردار غلبه کننده	
				ضعیف	قوی
z^1	-۱	۴	۴		z^2
z^2	۲	۵	۶		
z^3	۲	۲	۵	z^2	z^4
z^4	۳	۳	۶		
z^5	۸	۳	-۱	z^6	
z^6	۸	۳	۰		

شکل ۲.۱: مقایسه‌ی شش بردار از لحاظ کارایی

تعریف ۱.۳.۱۵. فرض کنید x_1، x_2، ...، x_k نقاطی دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این‌صورت به مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب این نقاط، پوسته‌ی محدب این نقاط گوییم و این مجموعه را با نماد $Con(x_1, x_2, ..., x_k)$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$Con(x_1, x_2, ..., x_k) = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., k\}.$$

تعریف ۱.۳.۱۶. نقطه‌ی x در مجموعه‌ی محدب X، نقطه‌ی رأسی[۴۱] گفته می‌شود هرگاه x را نتوان به‌صورت ترکیب محدب اکید دو نقطه‌ی متمایز در X نوشت.

تعریف ۱.۳.۱۷. بردار $d \in \mathbb{R}^n$ را جهت دور شونده‌ی مجموعه‌ی X نامند هرگاه برای هر نقطه‌ی دلخواه $x_0 \in X$ و به‌ازای هر اسکالر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $x_0 + \lambda d \in X$.

[۴۱] Extreme Point

تعریف ۱.۳.۱۸. جهت دورشونده d از مجموعه‌ی X، جهت رأسی مجموعه‌ی X گفته می‌شود هرگاه نتوان آن‌را به‌صورت ترکیب خطی مثبتی از دو جهت دورشونده‌ی متمایز از X نوشت.

تعریف ۱.۳.۱۹. مجموعه‌ی (محدب) $C \subseteq \mathbb{R}^n$، یک مخروط[۴۲](محدب) نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \in C$ و به‌ازای هر $\lambda \geq ۰$، $\lambda x \in C$. همچنین در مخروط‌ها به جهت دورشونده‌ی رأسی، شعاع رأسی[۴۳] گفته می‌شود.

تعریف ۱.۳.۲۰. مخروط تولید شده توسط بردارهای $v_۱, v_۲, ..., v_k$ به‌صورت زیر تعریف و با نماد $C(v_۱, v_۲, ..., v_k)$ نمایش داده می‌شود:

$$C(v_۱, v_۲, ..., v_k) = \{x | x = \sum_{i=۱}^{k} \alpha_i v_i, \alpha_i \geq ۰, i = ۱, ۲, ..., k\}.$$

تعریف ۱.۳.۲۱. مخروط دوگان [۴۴] مجموعه‌ی C را با نماد C^* نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C^* = \{p \mid p^t x \leq ۰, \forall x \in C\}.$$

لم ۱.۳.۲۲. *فرض کنید C، $C_۱$ و $C_۲$ مجموعه‌هایی ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این‌صورت:*

۱) *C^* یک مخروط محدب بسته می‌باشد.*

۲) *$C \subseteq C^{**}$ که در آن C^{**} دوگان مخروط C^* است.*

۳) *اگر $C_۱ \subseteq C_۲$ آن‌گاه داریم $C_۲^* \subseteq C_۱^*$.*

برهان. به [۲] رجوع شود. □

قضیه ۱.۳.۲۳. *فرض کنید $C \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مخروط محدب بسته‌ی ناتهی باشد. در این‌صورت $C = C^{**}$.*

برهان. به [۲] رجوع شود. □

۱.۳.۲ روش‌های بهینه‌سازی چندمعیاره

مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره به دو قسمت اصلی مسائل بهینه‌سازی چندشاخصی که در فضای گسسته و مسائل بهینه‌سازی چندهدفی که در فضای پیوسته بیان می‌شوند، تقسیم‌بندی می‌شود.

[۴۲] Cone
[۴۳] Extreme Ray
[۴۴] Dual Cone

تاکنون روش‌های بسیاری برای حل مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره ارائه شده است که گنجاندن آن‌ها در دسته‌های مجزا به‌طور کامل و مطلق امکان‌پذیر نیست. در واقع ادغام و ترکیب این دسته‌ها نه تنها غیرمنطقی نیست، بلکه برخی از روش‌ها می‌توانند بینابین باشند یا به بیشتر از یک دسته تعلق داشته باشند. برای دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی تفسیرهای متفاوتی وجود دارد. طبق [۲۰] روش‌های بهینه‌سازی چندمعیاره بر پایه‌ی نقش تصمیم‌گیرنده در طول فرآیند حل مسأله، ارتباط بین چگونگی تعیین ترجیحات و بهینه‌سازی به چهار دسته‌ی زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) روش‌های تأخری[۴۵]

در این روش‌ها تصمیم‌گیرنده اطلاعات ترجیحی خود را بعد از اینکه حل‌کننده جواب‌های بهینه‌ی پارتو را ارائه کرد، در جریان بهینه‌سازی دخیل می‌کند. به عبارتی دیگر تصمیم‌گیرنده از مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتویی که حل‌کننده ارائه کرده است، متناسب با ترجیحات خود جواب نهایی را انتخاب می‌کند. نقطه‌ی ضعف این روش‌ها این است که نحوه‌ی ارائه جواب‌های نامغلوب به تصمیم‌گیرنده و تجسم آن‌ها برای تصمیم‌گیرنده واضح نیست به‌ویژه هنگامی‌که بیش از دو تابع هدف موجود باشد. علاوه بر این تولید تعداد زیادی از جواب‌های نامغلوب در مسائل پیچیده‌ی دنیای واقعی ممکن است از لحاظ محاسباتی پرهزینه باشد.

۲) روش‌های تقدمی[۴۶]

در این روش‌ها تصمیم‌گیرنده ابتدا اطلاعات ترجیحی خود را ارائه می‌دهد و حل‌کننده سعی می‌کند جوابی نزدیک به ترجیحات تصمیم‌گیرنده ارائه دهد. نقطه‌ی ضعف این روش‌ها این است که برای تصمیم‌گیرنده دشوار است که قبل از شناخت مسأله انتظارات و ترجیحات خود را در سطح معقولانه‌ای بیان کند.

[۴۵] Posteriori Methods
[۴۶] Priori Methods