وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (گرایش آنالیز)

جبرهای باناخ شبه میانگین پذیر

توسط:
داود هاشم وند

استاد راهنما:
دکتر مرتضی ابطحی

استاد مشاور:
دکتر سید علی تقوی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

جبرهای باناخ شبه میانگین پذیر

توسط:

داود هاشم وند

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های
تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر مرتضي ابطحي استاديار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سید علی تقوی استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر غلامرضا عباسپور تبادگان استادیار دانشگاه دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر محمّد رمضانپور استادیار دانشگاه دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر نرگس تولائي استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

خانواده ام

سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از خدای بزرگ به خاطر این نعمتهایی که به من عطا کرد تا در سایهٔ آن این مقطع تحصیلی را به پایان برسانم. از خانوادهٔ عزیزم تشکر می کنم که در این مدت سایهٔ الطافش بالای سرم بود و من را در تمام این مدّت تحصیل یاری کردند. همچنین از استاد راهنمای عزیزم آقای دکتر مرتضی ابطحی که در طول مراحل این پایان نامه مرا همراهی کردند تشکر می کنم.از استاد مشاور عزیزم آقای دکتر سیّد علی تقوی به خاطر کمکی که به من کردند تشکر می کنم.از اساتید محترم داور آقایان دکتر غلامرضا عباسپور ودکتر محمد رمضانپور به خاطر داوری این پایان نامه تشکر می کنم وهمچنین از کلیه دوستانی که مرا در کار پایان نامه همراهی کردند تشکر می کنم.

چکیده

جبرهای باناخ شبه میانگین پذیر

به وسیله‌ی:
داود هاشم وند

در این پایان نامه به بررسی مفاهیم شبه میانگین پذیری جبرهای باناخ و میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ که در یک کار مشترک توسّط قهرمانی، ژانگ و لوی در سال ۲۰۰۸ معرفی گردید می پردازیم.نشان داده می شود که هر جبر باناخ تقریباً انقباض پذیر کراندار دارای واحد تقریبی کراندار است و بعلاوه جبر فوریه روی گروه آزاد با دو مولد، تقریباً میانگین پذیر عملگری نیست.بعلاوه مثالهایی از جبرهای $\ell^1(S)$ که S یک نیم گروه است ارائه می شود که تقریباً میانگین پذیر هستند امّا میانگین پذیر نیستند.با استفاده از این مثالها نشان داده می شود که تقریباً انقباض پذیری کراندار لزوماً تقریباً میانگین پذیری دنباله ای را نتیجه نمی دهد.و بلا خره نتایجی دربارهٔ جبرهای سگال روی گروههای موضعاً فشرده ارائه می شود.

واژه های کلیدی: جبر باناخ میانگین پذیر، جبر باناخ شبه میانگین پذیر، جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر، قطر تقریبی، همانی تقریبی، جبر فوریه، جبر سگال.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل تعاریف وقضایای مقدماتی که برای ادامه کار به آنها نیاز داریم را ارائه می کنیم.اثباتهای قضایا معمولاً نیازمند تکنیکهای خاصی نیست ودر مراجع مربوطه آمده است ولذا از اثبات آنها صرف نظر میکنیم.مطالب این فصل از مراجع [۴]،[۵]،[۶]،[۱۲]،[۱۳]،[۲۲]،[۲۷]،[۲۸]،[۳۰] گرفته شده است.

۱-۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک گروه آبلی و نگاشت $\mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ دارای شرایط زیر باشد.

(۱) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$؛ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in X$

(۲) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$؛ $\qquad \alpha \in \mathbb{C}, x, y \in X$

(۳) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$؛ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in X$

(۴) $1x = x$؛ $\qquad x \in X$

در این صورت X را فضای برداری مختلط گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را یک نیم نرم روی X گوئیم، هرگاه

(۱) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛ $\qquad x, y \in X$

(۲) $\|\alpha.x\| = |\alpha|\|x\|$ ؛ $\alpha \in \mathbb{C}, x \in X$

نیم نرم $\|\cdot\|$ را نرم گوئیم هرگاه $\|x\| = 0$ آنگاه $x = 0$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X فضای برداری مختلط و $\|.\|$ یک نرم روی آن باشد در این صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم دار گوئیم.اگر X یک فضای نرم دار باشد، آنگاه $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی X است که X را به یک فضای متریک تبدیل می کند.فضای X باناخ است هرگاه با متر d یک فضای کامل باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم A فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. A را جبر مختلط گوئیم هرگاه عمل دوتایی

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a,b) \longmapsto ab$$

به نام ضرب وجود داشته باشد به طوریکه دارای شرایط زیر باشد.

(۱) $a(b+c) = ab + ac$ برای هر $a, b, c \in A$

(۲) $a(bc) = (ab)c$ برای هر $a, b, c \in A$

(۳) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ برای هر $a, b, c \in A, \alpha \in \mathbb{C}$

اگر $ab = ba$ برای هر $a, b \in A$ آنگاه A را جابجائی گوئیم.اگر عنصر $e \in A$ موجود باشد به طوری که $ea = ae = a$ آنگاه A را یکدار گوئیم و e را عنصر همانی A گوئیم.

تعریف ۵.۱.۱. نرم $\|.\|$ روی جبر A را یک نرم جبری گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in A$

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

$(A, \|.\|)$ را جبر نرمدار گوئیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $(A, \|.\|)$ یک جبر نرم دار باشد.در این صورت A را جبر باناخ گوئیم هرگاه نسبت به متریک حاصل از نرم یک فضای کامل شود. یعنی هر دنباله ی کشی در A همگرا باشد.

مثال ۷.۱.۱. فرض کنیم X فضای هاسدورف فشرده باشد.در این صورت قرار می دهیم

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C};\ f \text{ پیوسته است}\}$$

اعمال جبری روی $C(X)$ را نقطه وار تعریف می کنیم.در این صورت $C(X)$ با این اعمال یک جبر مختلط است.نرم روی $C(X)$ را نرم یکنواخت تعریف می کنیم.

$$\|f\|_u = sup\{|f(x)|; x \in X\}$$

با این نرم $C(X)$ تبدیل به یک جبر باناخ جابجائی و یکدار می شود.

مثال ۸.۱.۱. تعریف می کنیم $L^{۱}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{اندازه پذیر}} \mathbb{C}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\}$ عمل ضرب روی $L^{۱}(\mathbb{R})$ را پیچش تعریف می کنیم.

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}x$$

عمل جمع و ضرب اسکالری را نقطه وار تعریف می کنیم.ونرم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f\|_{۱} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|\,\mathrm{d}x$$

در این صورت $L^{۱}(\mathbb{R})$ با اعمال جبری و نرم فوق یک جبر باناخ است.که به آن جبر گروه $\mathbb{R}$ گوئیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده ای از نیم نرمها روی X باشد. این خانواده را روی X جداساز گوئیم هرگاه برای هر $X \ni x \neq ۰$ لااقل یک $\gamma \in I$ وجود داشته باشد بطوریکه $p_\gamma(x) \neq ۰$.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده ای از نیم نرمهای جدا کننده روی فضای برداری X روی $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت (p_α) -توپولوژی روی X ، یک توپولوژی موضعاً محدب روی X می باشد. و با این توپولوژی X به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدّب تبدیل می شود. (به مرجع [۲۷] مراجعه شود)*

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $\mathcal{B}(X)$ فضای عملگرهای خطی روی X باشد. بطوریکه

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq ۱\} < \infty$$

عملگر T را کراندار گوئیم هرگاه $\|T\| < \infty$. روی $\mathcal{B}(X)$ اعمال جمع و ضرب اسکالری را نقطه به نقطه تعریف می کنیم و ضرب را ترکیب تعریف می کنیم.

$$TS = T \circ S \quad ; \quad S, T \in \mathcal{B}(X)$$

در این صورت داریم

$$\|TS\| \leq \|T\|.\|S\|$$

$\mathcal{B}(X)$ همراه با اعمال بالا یک جبر باناخ یکدار است. برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ خانواده نگاشت های

$$p_x : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad T \longmapsto \|T(x)\|$$

$$p_{f,x} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad T \longmapsto |f(T(x))|$$

در شرایط قضیه ی ۱۰.۱.۱ صدق می کند. $(p_{f,x})_{f \in X^*, x \in X}$ - توپولوژی روی $\mathcal{B}(X)$ را با WOT نشان داده و آن را توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{B}(X)$ گوئیم. همچنین $(p_x)_{x \in X}$ -توپولوژی روی $\mathcal{B}(X)$ را با SOT نشان داده و آن را توپولوژی عملگری قوی گوئیم .(به مرجع [۴] مراجعه کنید)

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد.یک همانی تقریبی چپ برای A عبارت است از یک تور (e_α) در A بطوریکه

$$e_\alpha.a \longrightarrow a \quad (a \in A)$$

به همین ترتیب همانی تقریبی راست قابل تعریف است.یک همانی دو طرفه برای A یک تور (e_α) است که هم همانی تقریبی راست و هم همانی تقریبی چپ است.همانی تقریبی (e_α) را کراندار گوییم هر گاه ثابت M وجود داشته باشد بطوریکه برای هر α

$$\|e_\alpha\| \leq M$$

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم A و B جبرهای باناخ باشند.نگاشت $T : A \longrightarrow B$ را یک همریختی گوییم هر گاه T نگاشت خطی باشد و برای هر $a \in A$ و $b \in A$ داشته باشیم

$$T(ab) = T(a)T(b)$$

اگر $B = \mathbb{C}$ و $T \neq ۰$ در این صورت T را یک همریختی مختلط گوییم.

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم ϕ یک همریختی مختلط روی جبر باناخ A باشد، آنگاه ϕ پیوسته است و داریم*

$$\|\phi\| \leq ۱$$

در صورتیکه A یکدار باشد داریم $\phi(۱) = ۱$

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه کنید. □

بنابراین مجموعه تمام همریختی های مختلط زیر مجموعه ای از گوی یکه A^* است.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم $m(A)$ مجموعه تمام همریختی های مختلط باشد.گردایه همه زیر مجموعه های $m(A)$ به شکل

$$V(\varphi; x_۱, x_۲, ..., x_n, \epsilon_۱, \epsilon_۲, ..., \epsilon_n) = \{\psi; |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| \leq \epsilon_i \quad i = ۱, ۲, ..., n\}$$

یک زیر پایه برای توپولوژی(توپولوژی گلفاند[۱]) روی $m(A)$ است. $m(A)$ با این توپولوژی را فضای ایده آل ماکسیمال A گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم Δ یک مجموعه جزئی مرتب باشد. یعنی Δ همراه با یک رابطه ε به قسمی که ε متعدی،پاد متقارن و انعکاسی باشد.هر گاه برای هر $\alpha, \beta \in \Delta$ عنصری از Δ مانند γ وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha_i \leq \gamma$ $(i = ۱, ۲)$ آنگاه Δ را یک مجموعه جهت دار گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۷. یک تور در فضای توپولوژیک عبارت است از یک تابع از یک مجموعه جهت دار به فضای توپولوژیک.همچنین تور (x_α) را به نقطه x همگرا گوییم و نشان می دهیم $x_\alpha \to x$ هر گاه، برای هر مجموعه ی باز U شامل x ، $i \in \Delta$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $\gamma \geq i$ ، $x_\gamma \in U$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم S یک مجموعه ی ناتهی و $\{S_\alpha\}$ خانواده ای از فضاهای توپولوژیک و $f_\alpha : S \longrightarrow S_\alpha$ خانواده ای از نگاشت ها باشد. توپولوژی تولید شده بوسیله ی زیر پایه ی

$$\bigcup_\alpha \{f_\alpha^{-۱}(U_\alpha) \ ; \ U_\alpha \subseteq S_\alpha \ \text{باز}\}$$

را f_α - توپولوژی روی S گوئیم. در حقیقت f_α - توپولوژی کوچکترین توپولوژی روی مجموعه ی S است که هر f_α در آن پیوسته است.(به مرجع [۲۷] مراجعه شود)

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم X فضای باناخ باشد . X^* -توپولوژی روی X را توپولوژی ضعیف روی X می نامیم. به عبارت دیگر توپولوژی ضعیف کوچکترین توپولوژی روی X است بطوریکه هر عنصر X^* در آن پیوسته است.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم X یک فضای باناخ و κ نشاننده ی متعارف X در X^{**} باشد.

$$\kappa : X \longrightarrow X^{**} \quad ; \quad x \longmapsto \hat{x} \ \text{و} \ \hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ f \longmapsto f(x)$$

قرار می دهیم $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ ، $\hat{X}$ -توپولوژی روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می نامیم و آن کوچکترین توپولوژی است که هر $\hat{x}$ در آن پیوسته است.

---

[۱] Gel'fand

قضیه ۲۱.۱.۱. *(اصل کرانداری یکنواخت)* [۲] *فرض کنیم X و Y فضا های باناخ و $\{T_\alpha : X \longrightarrow Y\}$ خانواده ای از نگاشت های خطی کراندار باشد. اگر برای هر $x \in X$ ، $sup_\alpha\|T_\alpha(x)\| < \infty$ آنگاه $sup_\alpha\|T_\alpha\| < \infty$.*

اثبات. به مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

قضیه ۲۲.۱.۱. *(گلدشتاین)* [۳] *فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، در این صورت A با توپولوژی ضعیف ستاره در A^{**} چگال است. به طور دقیق تر برای هر $a \in A^{**}$ تور $(a_\nu) \in A$ موجود است به طوری که به ازای هر ν، $\|a_\nu\| \leq \|a\|$ و $a_\nu \longrightarrow a$ درتوپولوژی ضعیف ستاره.*

اثبات. برای اثبات به صفحه ی ۸۱۸از مرجع[۴] مراجعه شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱. *(مازور)* [۴] *بستار قوی و بستار ضعیف مجموعه های محدب در فضاهای باناخ باهم برابر است.*

اثبات. به صفحه ی ۸۱۸ از مرجع [۴]مراجعه شود. □

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم X و Y و Z فضاهای خطی نرمدار باشد. نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را نگاشت دوخطی گوئیم هرگاه

(الف) برای هر $x \in X$ ، نگاشت $y \longmapsto \phi(x,y)$ خطی باشد

(ب) برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \longmapsto \phi(x,y)$ خطی باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. نگاشت دوخطی $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را کراندار گوئیم هرگاه ثابت M ی وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in X$ و برای هر $y \in Y$ ،

$$\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|.\|y\|$$

اگر ϕ کراندار باشد، نرم ϕ را به صورت

$$\|\phi\| = sup\{\|\phi(x,y)\| \; ; \; \|x\| \leq ۱ \; , \; \|y\| \leq ۱\}$$

تعریف می کنیم. مجموعه ی تمام نگاشت های دو خطی و کراندار از $X \times Y$ به Z را به $BL(X,Y;Z)$ نشان می دهیم.

[۲] Uniform Boundedness Principle

[۳] Goldstine

[۴] Mazur

گزاره ۲۶.۱.۱. *اگر X و Y و Z فضاهای خطی و نرمدار باشند آنگاه $BL(X, Y; Z)$ یک فضای خطی نرمدار است. این فضا باناخ است اگر Z یک فضای باناخ باشد.*

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای خطی نرمدار با فضاهای دوگان X^* و Y^* باشند برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ قرار می دهیم

$$x \otimes y(f, g) = f(x)g(y)$$

که $f \in X^*$ و $g \in Y^*$. در این صورت $x \otimes y$ عنصری از $BL(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ است. زیر فضای تولید شده بوسیله ی تمام $x \otimes y$ در $BL(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ را حاصل ضرب تانسوری جبری X و Y نامیده و آن را با $X \otimes Y$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. نرم القایی عملگری بوسیله $BL(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ روی $X \otimes Y$ را نرم تانسور ضعیف گوئیم .پس برای هر $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i \in X$

$$\|u\|_w = sup\{|\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)g(y_i)| \; ; \; \|f\| \leq ۱ \; , \; \|g\| \leq ۱\}$$

کامل شده ی $X \otimes Y$ نسبت به نرم تانسور ضعیف در $BL(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ را ضرب تانسور ضعیف X و Y گوئیم و آن را با $X \otimes_w Y$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض X و Y فضاهای خطی نرمدار باشد. تابع p را روی $X \otimes Y$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$p(u) = inf\{\sum_{i=۱}^{n} \|x_i\|\|y_i\| \; ; \; u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i\}.$$

که در آن inf روی مجموعه ی همه ی نمایشهای متناهی u گرفته می شود. تابع p یک نرم روی $X \otimes Y$ است که آن را نرم تانسور تصویری گوئیم.(به مرجع [۱۳] مراجعه شود)

تعریف ۳۰.۱.۱. کامل شده ی $X \otimes Y$ نسبت به نرم تانسور تصویری را ضرب تانسور تصویری X و Y گوئیم و آن را به $X \hat{\otimes} Y$ نمایش می دهیم.

گزاره ۳۱.۱.۱. *فضای $X \hat{\otimes} Y$ را می توان به عنوان زیر فضای خطی $BL(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ متشکل از عناصری به شکل $u = \sum_{n=۱}^{\infty} x_n \otimes y_n$ که $\sum_{n=۱}^{\infty} \|x_n\|\|y_n\| < \infty$ در نظر گرفت.در این صورت.*

برای هر $u \in X\hat{\otimes}Y$

$$p(u) = inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| \ ; \ u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\}$$

اثبات. به مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۳۲.۱.۱. *برای هر نگاشت دوخطی* $\phi : X\times Y \longrightarrow Z$ *نگاشت خطی یکتای* $\sigma : X\otimes Y \longrightarrow Z$ *وجود دارد بطوریکه* $\sigma(x \otimes y) = \phi(x, y)$ *برای هر* $x \in X$ *و* $y \in Y$.

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه شود. □

گزاره ۳۳.۱.۱. *فرض کنیم* A *و* B *جبرهای نرمداری باشند. در این صورت نرم تانسور تصویری روی* $A \otimes B$ *یک نرم جبری است.*

گزاره ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم* A *و* B *جبرهای نرمدار باشند. در این صورت ضرب یکتایی روی* $A\otimes B$ *وجود دارد که آن را به یک جبر تبدیل می کند و*

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac \otimes bd)$$

برای هر $a, c \in A$ *و برای هر* $b, d \in B$.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر نرمدار و X یک فضای خطی باشد. X را یک A - مدول چپ گوئیم هرگاه نگاشت $A\times X \longrightarrow X$ با ضابطه ی $(a, x) \longmapsto a.x$ وجود داشته باشد. بطوریکه،

(الف) برای هر $a \in A$ ، نگاشت $x \longmapsto a.x$ خطی باشد.

(ب) برای هر $x \in X$ ، نگاشت $a \longmapsto a.x$ خطی باشد

(ج) برای هر $a, b \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم $(ab).x = a.(b.x)$. اگر A یکدار باشد و علاوه براین برای هر $x \in X$ داشته باشیم $e.x = x$ ، X را یکانی گوئیم.

به همین ترتیب A - مدول راست و A - مدول راست یکانی قابل تعریف است.

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر نرمدار و X یک A - مدول چپ روی A باشد. هرگاه ثابت C_X وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $a \in A$ و $x \in X$ ،

$$\|a.x\| \leq C_X\|a\|.\|x\|$$

آنگاه X را یک A - مدول چپ نرمدار گوئیم، C_X را ثابت مدول X گوئیم. اگر علاوه بر این X یک فضای باناخ باشد X را یک A - مدول چپ باناخ گوئیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. اگر X یک A - مدول چپ و همچنین یک A - مدول راست باشد و برای هر a, b و $x \in X$

$$a(xb) = (ax)b$$

آنگاه X را یک A - دو مدول گوئیم. A - دو مدول X را شبه یکانی گوئیم هرگاه

$$X = A.X.A = \{a.x.b | a, b \in A, x \in X\}$$

و X را یک A -دو مدول باناخ گوئیم هرگاه هم A - مدول چپ باناخ و هم A - مدول راست باناخ باشد. از این به بعد منظور از A - مدول یک A - دو مدول است، مگر اینکه خلاف آن گفته شود.

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم M و N ، A - مدول های باناخ باشند. نگاشت خطی $f : M \longrightarrow N$ را یک همریختی مدولی باناخ گوئیم هرگاه کراندار بوده و علاوه براین برای هر $m \in M$ و $a \in A$

$$f(a.m) = a.f(m) \quad , \quad f(m.a) = f(m).a$$

مثال ۳۹.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد. نگاشت ضرب $\pi : A\hat{\otimes}A \longrightarrow A$ که به صورت $a \otimes b \longmapsto ab$ تعریف می شود یک همریختی مدولی است.

$$\pi((a \otimes b).c) = \pi(a \otimes bc) = abc = \pi(a \otimes b).c$$

$$\pi(a.(b \otimes c)) = \pi(ab \otimes c) = abc = a.\pi(b \otimes c)$$

$$\|\pi(a \otimes b)\| = \|ab\| \leq \|a\|.\|b\| = p(a \otimes b)$$

بنابراین $ker\ \pi$ یک A - زیر مدول باناخ از $A\hat{\otimes}A$ است، نگاشت های π^* و π^{**} که به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود نیز هم ریختی های مدولی اند.

$$\pi^* : A^* \longrightarrow (A\hat{\otimes}A)^* \quad ; \quad \pi^*(f) = f \circ \pi \quad , \quad f \in A^*$$

$$\pi^{**} : (A\hat{\otimes}A)^{**} \longrightarrow A^{**} \quad ; \quad \pi^{**}(F) = F \circ \pi^* \quad , \quad F \in (A\hat{\otimes}A)^{**}$$

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و X یک A -مدول باناخ باشد.نگاشت خطی کراندار $D : A \longrightarrow X$ را یک اشتقاق گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in A$،

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b)$$

اگر $x \in X$ در این صورت نگاشت $ad_x : x \longmapsto ax - xa$ یک اشتقاق است که آن را اشتقاق درونی متناظر با x می گوئیم.

ملاحظه ۴۱.۱.۱. فرض کنیم X یک A -مدول باناخ باشدتعریف می کنیم .

$$(a.f)(x) = f(xa), \quad (f.a)(x) = f(ax), \quad (a \in A, \;\; x \in X, \quad f \in X^*)$$

در این صورت X^* با ضرب مدولی فوق یک A -مدول باناخ است.به طریق مشابه می توان $X^{(n)}$ (دوگان مرتبه ی n -ام X) را به یک A -مدول باناخ تبدیل کرد.

تعریف ۴۲.۱.۱. جبر باناخ A رامیانگین پذیر ضعیف گوئیم هرگاه هر اشتقاق پیوسته ی $D : A \longrightarrow A^*$ درونی باشد.و آن را n -میانگین پذیر ضعیف گوئیم هرگاه هر اشتقاق پیوسته ی $D : A \longrightarrow A^{(n)}$ درونی باشد. و آن را غالباً میانگین پذیر ضعیف گوئیم هر گاه برای هر n ، n -میانگین پذیر ضعیف باشد. مشابه میانگین پذیری تقریبی، می توان میانگین پذیری تقریبی ضعیف را تعریف کرد.

تعریف ۴۳.۱.۱. جبر باناخ A را میانگین پذیر گوئیم هرگاه برای هر A -مدول باناخ X هر اشتقاق $D : A \longrightarrow X^*$ درونی باشد.

تعریف ۴۴.۱.۱. جبر باناخ A را غالباً میانگین پذیر ضعیف تقریبی گوئیم هرگاه برای هر n هر اشتقاق پیوسته ی $D : A \longrightarrow A^{(n)}$ تقریباً درونی باشد.

۲-۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. علاوه براین فرض کنیم، G یک فضای توپولوژیک نیز باشد بطوریکه نگاشت های

$$G \times G \longrightarrow G \quad ; \quad (x,y) \longmapsto xy \;\; \text{و} \;\; G \longrightarrow G \quad ; \quad x \longmapsto x^{-۱}$$

پیوسته باشد در این صورت G را یک گروه توپولوژیک گوئیم. وقتی با گروههای توپولوژیک کار می کنیم، معمولاً فرض می کنیم که توپولوژی آن هاسدورف نیز است. هر گاه G به عنوان یک فضای توپولوژیک هاسدورف یک فضای موضعاً فشرده نیز باشد، در این صورت گروه G را موضعاً فشرده گوئیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد، مجموعه ی تمام توابع پیوسته با محمل فشرده روی G را با $C_{۰۰}(G)$ نشان می دهیم و مجموعه ی تمام توابع پیوسته f روی G به طوری که برای هر $\varepsilon > ۰$ یک زیر مجموعه ی فشرده $K \subseteq G$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad , \quad x \in G \setminus K \text{ برای هر}$$

را با $C_\circ(G)$ نشان می دهیم. برای هر $f \in C_\circ(G)$ قرار می دهیم $\|f\|_u = sup_{x\in G}|f(x)|$ در این صورت $(C_\circ(G), \|\ .\ \|_u)$ یک جبر باناخ و $C_{\circ\circ}(G)$ زیر فضای چگال آن است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی و $\mathcal{M}$ یک گردایه از زیر مجموعه های X باشد بطوریکه $\emptyset \in \mathcal{M}$ و $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$. آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$ ، در این صورت $\mathcal{M}$ را یک σ - جبر روی X گوئیم. $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه پذیر و هر $A \in \mathcal{M}$ را یک مجموعه ی اندازه پذیر گوئیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای اندازه پذیر و $\mathcal{M}$ یک σ - جبر روی آن باشد. تابع : μ $\mathcal{M} \longrightarrow [\circ, \infty]$ را یک اندازه روی X گوئیم هرگاه

(۱) $\mu(\emptyset) = \circ$

(۲) اگر ... $E_1, E_2, E_3, \ldots$ زیرمجموعه های اندازه پذیر جدا از هم در X باشد، داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

سه تایی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ را یک فضای اندازه گوئیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ یک گردایه از زیر مجموعه های X باشد. کوچکترین σ - جبر شامل $\mathcal{E}$ را σ - جبر تولید شده بوسیله ی $\mathcal{E}$ گوئیم. این تعریف خوشتعریف است زیرا لااقل یکی از σ - جبرها وجود دارد ($\mathcal{P}(X)$) .

تعریف ۶.۲.۱. فرض می کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت σ - جبر تولید شده بوسیله ی مجموعه های باز X را با $\mathcal{B}(X)$ نشان داده و آن را σ - جبر مجموعه های برل فضای توپولوژیک X گوئیم. هر عضو $\mathcal{B}(X)$ را یک مجموعه ی برل گوئیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و μ یک اندازه روی X با دامنه بورل σ - جبر مجمو عه های برل باشد. در این صورت μ را یک اندازه ی برل گوئیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم μ یک اندازه ی بورل روی X باشد. و $E \in \mathcal{B}(X)$ در این صورت μ را روی E منظم خارجی گوئیم هرگاه

$$\mu(E) = inf\{\mu(U)\ ;\ U \supseteq E\ \ ,\ \ U \text{ باز است}\}$$

و μ را روی E منظم داخلی گوئیم هرگاه

$$\mu(E) = sup\{\mu(K) \ ; \ K \subseteq E \ \ , \ \ \text{فشرده است } K\}$$

و آن را روی E منظم گوئیم هرگاه روی E هم منظم داخلی باشد و هم منظم خارجی باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم μ یک اندازه بورل روی فضای توپولوژیک X باشد. μ را یک اندازه ی منظم روی X گوئیم هرگاه روی هر مجموعه ی برل از X منظم باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک هاوسدورف موضعاً فشرده باشد. یک اندازه برل منظم روی X که روی هر مجموعه ی فشرده از X متناهی باشد را اندازه ی رادون گوئیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. اندازه μ را کراندار گوئیم هرگاه ثابت M ای وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $A \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $\mu(A) < M$.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. مجموعه ی تمام اندازه های رادون مختلط و کراندار روی G را با $M(G)$ نمایش می دهیم و آن را جبر اندازه روی G گوئیم. اعمال جبری روی $M(G)$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$(\mu+\nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) \ ; \ \mu, \nu \in M(G) \ , \ E \in \mathcal{B}(G)$$

$$(\lambda.\mu)(E) = \lambda\mu(E) \ ; \ \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \mu \in M(G) \ , \ E \in \mathcal{B}(G)$$

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(Ex^{-1}) \, d\nu = \int_G \nu(x^{-1}E) \, d\mu$$
$$(\mu+\nu)(f) = \int_G f \, d(\mu+\nu) = \int_G f \, d\mu + \int_G f \, d\nu = \mu(f) + \nu(f)$$
$$(\lambda\mu)(f) = \int_G f \, d(\lambda\mu) = \int_G f\lambda \, d\mu = \lambda\mu(f)$$
$$\mu * \nu(f) = \int_G f \, d(\mu * \nu) = \int_G \int_G f(xy) \, d\mu . d\nu \ \ , \ \lambda \in \mathbb{C} \text{ و } f \in C_0(G) \text{ برای هر}$$

اگر قرار دهیم

$$\|\nu\| = |\nu|(G) = sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_n)| \ ; \ E_1, ..., E_n \ \ \text{ یک افراز از مجموعه های بورل برای } G\}$$

که در آن $|\nu|$ ، تغییر کل ν می باشد و به صورت زیر تعریف می شود.

$$|\nu|(E) = sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_n)| \ ; \ E_1, ..., E_n \ \ \text{یک افراز از مجموعه های برل برای } E\}$$

آنگاه $M(G)$ با اعمال جبری تعریف شده ی فوق به یک جبر باناخ تبدیل می شود. $M(G)$ جابه جائی است اگر و تنها اگر G جابه جائی باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. یک اندازه ی بورل روی G را پایای چپ گوئیم هر گاه برای هر $x \in G$ و $E \in \mathcal{B}(G)$ ، $\lambda(xE) = \lambda(E)$. یک اندازه ی هار چپ روی G یک اندازه ی رادون پایای چپ روی G می باشد.

گزاره ۱۴.۲.۱. *هر گروه موضعاً فشرده دارای یک اندازه ی هار چپ است.*

اثبات. به مرجع [۶] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم I یک انتگرال هار چپ روی G باشد.(به مرجع [۶] مراجعه شود) تابع Δ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} = \frac{\mu(Ex)}{\mu(E)} \quad \text{است } G \text{ اندازهٔ هار چپ روی } \mu$$

که در آن $\circ \neq f \in C_{\circ\circ}^{+}(G)$. مقدار Δ به انتخابهای f بستگی ندارد و فقط به x بستگی دارد. $f_{x^{-1}}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_{x^{-1}}(y) = f(yx^{-1}) \quad ; \quad y \in G \text{ برای هر }$$

که یک عنصری از $C_{\circ\circ}^{+}(G)$ می باشد. $\Delta : G \longrightarrow (\circ, +\infty)$ یک هم ریختی پیوسته است که $\mathrm{d}(yx_\circ) = \Delta(x_\circ)\,\mathrm{d}y$ و برای هر $x \in X$ و $E \in \mathcal{B}(G)$ ،

$$\lambda(Ex) = \Delta(x).\lambda(E)$$

Δ را تابع مودولار G گوئیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده با اندازه ی هار λ باشد. مجموعه ی تمام توابع مختلط مقدار انتگرال پذیر نسبت به λ را به $L^{1}(G)$ نشان می دهیم. $L^{1}(G)$ با اعمال

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{و} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x) \;;\; \lambda \in \mathbb{C} \text{ و } x, y \in G \text{ برای هر }$$

که در آن تساوی تقریباً همه جا برقرار می باشد، تشکیل یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ می دهد و با نرم $\|f\|_1 = \int_G |f|\,\mathrm{d}\lambda < \infty$ یک فضای باناخ است. برای هر $f, g \in L^{1}(G)$ فرض کنید

$$(f*g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\,\mathrm{d}y = \int_G g(y^{-1}x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

با این ضرب $L^{1}(G)$ به جبر باناخ تبدیل می شود.نگاشت $f \longmapsto fd\lambda$ یک نشاننده ی طولپای از $L^{1}(G)$ به ایدال بسته ای از $M(G)$ می باشد.(به مرجع [۶] مراجعه شود)