دانشگاه تربیت معلم

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله‌ی دکتری ریاضی کاربردی

(شاخه‌ی آنالیز عددی)

عنوان:

حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی در حالت‌های فازی و غیر فازی با روش آنالیز هموتوپی

استادان راهنما:

دکتر اسماعیل بابلیان

دکتر سعید عباس‌بندی

تدوین:

محمود پری‌پور

بهار ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادرم، دو بزرگواری که جویبار عمرشان را به پای نهال زندگی من ریختند و به همسرم که در سختیها و مشکلات همواره یاور و مشوق من بوده و خواهند بود.

تقدیروتشکر

خدا را شاکرم که به من آموخت همیشه شاکر کسانی باشم که در طول زندگی مرا یاری دادند. الهی، من هر چه آموخته‌ام از عنایتی است که تو بر این بنده‌ی ناچیز خود ارزانی داشته‌ای.

وظیفه‌ی خود می‌دانم که از لطف و زحمات همه‌ی عزیزانی که در به پایان رساندن این رساله مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم. در ابتدا، صمیمانه‌ترین مراتب سپاس و قدرشناسی خود را به اساتید فرزانه و گرانقدر آقایان دکتر اسمعیل بابلیان و دکتر سعیدعباس‌بندی، که در طول تحصیل در دوره دکتری و انجام رساله از تعالیم و رهنمودهای سازنده‌ی خویش به بهترین نحو ممکن مرا بهره‌مند ساخته‌اند، تقدیم می‌نمایم. از خدای منان برایشان صحت و سلامت آرزو می‌کنم.

از اساتید محترم آقایان دکتر مهدی دهقان و دکتر شهنام جوادی که زحمت داوری رساله را بر عهده داشتند، تشکر می‌نمایم.

از سرکار خانم گلزاری که زحمت تایپ این رساله را متقبل شده و از دوستان عزیزم آقایان دکتر سعیدیان و دکترفریدی قدردانی نموده و از درگاه ایزد منان برای ایشان توفیق روز افزون آرزومندم.

محمود پری‌پور

تیرماه ۱۳۸۹

اظهارنامه

این رساله شامل ۵ فصل است. مقالات زیر از این رساله استخراج شده است:

1. E. Babolian, J. Saeidian, M. Paripour, Application of the homotopy analysis method for solving equal-width wave and modified equal-width wave equations, Zeitchrift fur Naturforshung A, 64a (2009) 649-690.

2. M. Paripour, E. Babolian, J. Saeidian, Analytic solutions to diffusion equations, Mathematical and Computer Modelling, 51 (2010) 649-657.

3. E. Babolian, S. Abbasbandy, M. Paripour, Numerical solution of fuzzy differential equations by homotopy analysis method, Submitted to Information Sciences.

۴. ا. بابلیان ، م. پری پور، مدل فازی کیفیت هوای ساختمان ،گزارش چهارمین کنفرانس ملی محیط زیست، اسفند ۱۳۸۸، همدان ، ایران .

چکیده

اکثر اوقات در رشته‌های مختلف علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و . . . برای بیان یک مساله‌ی معین لازم است از یک مدل ریاضی استفاده کرد. اغلب این مدل‌های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتق یا انتگرال آن نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال یا معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل می‌نامند. در حالت کلی این گونه معادلات را معادلات تابعی می‌نامیم.

بدیهی است که حل این دسته از معادلات با توجه به کاربرد فراوان آن‌ها از اهمیت به سزایی برخوردار است. چون فقط حالت‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل معمولی ، معادلات دیفرانسیل جزئی یا معادلات انتگرال به وسیله‌ی روش‌های تحلیلی قابل حل هستند، بنابراین برای تقریب جواب معادلاتی که به وسیله‌ی روش‌های تحلیلی حل‌پذیر نیستند یا به سختی حل می‌شوند، ناچار به استفاده از روش‌های عددی هستیم. بدین ترتیب معادلاتی را که جواب واقعی آنها از روش‌های تحلیلی به دست می‌آید با روش‌های عددی مورد نظر حل می‌کنیم و اختلاف بین جواب واقعی و جواب تقریبی روش عددی را به دست آورده و در صورت مناسب بودن روش عددی، برای معادلات مشابه که به روش تحلیلی قابل حل نیستند، از آن استفاده می‌کنیم. از طرفی روش‌های تحلیلی که معمولاً برای حل معادلات تابعی به کار می‌روند، بسیار محدود بوده و در حالات خاصی به کار می‌روند، همچنین در حل بسیاری از مسائل واقعی نمی توان آن‌ها را به کار برد. روش‌های عددی برای معادلات ذکر شده نیز به محاسبات زیادی نیاز داشته و معمولاً خطاهای گردکردن موجب کاهش دقت آن‌ها می‌شود.

در سال‌های اخیر روش‌های تجزیه‌ی آدومین، تکرار وردشی، پریشندگی هموتوپی و آنالیز هموتوپی برای حل معادلات تابعی معرفی شده‌اند.

هدف از این رساله معرفی این روش‌ها و بررسی کارایی روش آنالیز هموتوپی در مقایسه با دیگر روش‌ها است. برای این منظور روش آنالیز هموتوپی را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی فازی، معادلات دیفرانسیل جزئی پخش و موج با پهنای باند یکسان به کار می‌بریم و جواب‌های به دست آمده را با روش‌های گفته شده، مقایسه می‌کنیم.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 34A07 - 35C10 - 70G75 - 74G10 - 35A20 - 65H20.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل غیرخطی، معادلات دیفرانسیل فازی، روش تجزیه‌ی آدومین، روش پریشندگی هموتوپی، روش تکرار وردشی، روش آنالیز هموتوپی.

پیشگفتار

معادلات غیرخطی در مدل‌بندی بسیاری از پدیده‌های طبیعی ظاهر می‌شوند و بسیاری از پیشرفت‌های صورت گرفته در آنالیز عددی و نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل مرهون تلاش‌هایی است که در راستای شناخت و حل معادلات غیرخطی صورت گرفته است.

روش‌های عددی به طورگسترده برای حل این گونه از معادلات استفاده شده‌اند، محدودیت روش‌های عددی از یک طرف و از طرف دیگر علاقه‌ی ذاتی که برای یافتن جواب تحلیلی برای این معادلات وجود دارد، باعث شده تا روش‌های تحلیلی مختلفی ارائه گردد.

روش آنالیز هموتوپی[۱] اولین بار توسط پروفسور شی‌جان لیائو[۲] ارائه شد و در سال‌های اخیر توسط دانشمندان علوم مختلف برای حل انواع معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفته است و توانسته جایگاه ویژه‌ای در بین محققین به عنوان یک روش تحلیلی کارا پیدا کند. این روش ترکیبی از روش‌های پریشندگی کلاسیک و مفهوم هموتوپی در توپولوژی است و توانایی آن در ارائه‌ی تقریب‌های دقیق و در اکثر موارد جواب‌های دقیق، باعث شهرت و محبوبیت آن شده است. ایده‌ی اصلی روش، تبدیل معادله‌ی غیر خطی به دستگاهی از معادلات خطی است که به راحتی به روش بازگشتی قابل حل هستند.

در فصل اول این رساله به تعاریف و مفاهیمی مقدماتی از حساب فازی پرداخته‌ایم، در فصل دوم که شامل شش بخش است روش‌های تحلیلی را معرفی خواهیم کرد، در بخش اول هموتوپی، در بخش دوم روش پریشندگی هموتوپی، در بخش سوم روش تجزیه‌ی‌آدومین[۳]، در بخش چهارم روش آنالیز هموتوپی و در بخش پنجم حساب وردشی [۴] و در بخش پایانی روش تکرار وردشی[۵] را معرفی خواهیم کرد و به عنوان یک مثال معادله‌ی ریکاتی[۶] درجه‌ی‌دو را با هر چهارروش حل می‌کنیم .

در فصل سوم به حل معادلات دیفرانسیل فازی با روش آنالیز هموتوپی می‌پردازیم .این فصل شامل سه بخش است، در بخش اول به معرفی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی‌اول فازی و جواب باکلی-فیورینگ[۷] می‌پردازیم، در بخش دوم مسأله‌ی‌مقدار اولیه‌ی فازی را ارائه خواهیم کرد و سپس در بخش پایانی با استفاده از روش آنالیز هموتوپی تقریبی از جواب معادلات دیفرانسیل فازی را در حالت کریسپ[۸] پیدا کرده و سپس جواب حاصل را به

1) Homotopy Analysis Method 2) Shijun Liao 3) Adomian 4) Variational 5) Variational iteration 6) Riccati 7) Buckly-Feuring 8) Crisp

یک جواب در حالت فازی گسترش می‌دهیم.

در فصل چهارم معادلات پخش را، که از رده‌ی‌مهمی از معادلات سهموی هستند، با روش آنالیز هموتوپی حل می‌کنیم و در حل تمام مثال‌ها در فصل پنجم معادله‌ی‌موج با پهنای باند یکسان[1] و معادله‌ی‌موج پهنای باند یکسان اصلاح شده را با انتخاب‌های یکسان با روش آنالیز هموتوپی حل می‌کنیم و جواب‌های تقریبی را با روش‌های پریشندگی هموتوپی، تجزیه‌ی‌آدومین و روش تکرار وردشی مقایسه می‌کنیم.

1) Equal-width wave

فهرست مطالب

ی

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه.

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی شاخه‌ی نسبتاً جدیدی از ریاضیات است که مبدع آن پروفسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار است. این نظریه از زمان ارائه‌ی آن در سال ۱۹۶۵ تاکنون گسترش و تعمیق بسیاری در هر دو جنبه‌ی نظری و کاربردی یافته است. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی ابزارهایی فراهم می‌آورد که می‌توان به وسیله آنها نحوه‌ی استدلال و تصمیم‌گیری انسانی را صورت بندی ریاضی بخشید و از الگوهای ریاضی به دست آمده، در زمینه‌های گوناگون علوم، تکنولوژی و مدیریت استفاده کرد.

در این فصل به مرور تعاریف و مفاهیم مهمی از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز خواهند بود، خواهیم پرداخت. این فصل شامل سه بخش است، در بخش اول زیرمجموعه‌های محدب فشرده در R^n و در بخش دوم فضای ε^n را معرفی خواهیم کرد. سپس در بخش پایانی انواع مشتق را که در حساب فازی استفاده می‌شوند، معرفی خواهیم کرد.

۱-۱ زیرمجموعه‌های محدب فشرده در R^n

دو زیرفضای زیر را از زیرمجموعه‌های ناتهی فضای R^n در نظر می‌گیریم:

۱) $\mathcal{K}^n$ که شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی و فشرده (بسته و کراندار) از فضای R^n است.

۲) $\mathcal{K}_c^n$ که شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی و محدب و فشرده از فضای R^n است بنابراین $\mathcal{K}_c^n \subset \mathcal{K}^n$.

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی‌ناتهی از R^n و $\lambda \in R$ باشد جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

۱-۱-۲ قضیه [۲۷,۳.۴.۵]. $\mathcal{K}^n$ و $\mathcal{K}_c^n$ تحت عمل جمع و ضرب اسکالر فوق بسته هستند.

در حقیقت این دو عمل یک ساختار خطی روی $\mathcal{K}^n$ و $\mathcal{K}_c^n$ با عضوصفر $\{0\}$ ایجاد می‌کنند اما در این ساختار $A + (-1)A$ برابر $\{0\}$ نخواهد بود.

۱-۱-۳ مثال. فرض کنید $A = [0, 1]$ بنابراین $(-1)A = [-1, 0]$، داریم:

$$A + (-1)A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1].$$

۱-۱-۴ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی ناتهی باشند تفاضل هاکوآرا[1]، را به صورت $A = B + C$ تعریف می‌کنیم مشروط به آنکه مجموعه‌ی ناتهی C موجود باشد و به صورت $A \sim_h B$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۵ مثال. برای مثال قبل داریم:

$$[-1, 1] \sim_h [-1, 0] = [0, 1],$$

$$[-1, 1] \sim_h [0, 1] = [-1, 0].$$

1) Hukuhara difference

واضح است که برای هر مجموعه‌ی ناتهی A، $A \sim_h A = \{0\}$.

شرط لازم برای وجود تفاضل هاکوآرا $A \sim_h B$ آن است که هر انتقال از B مانند $B + \{c\}$ (برای هر $c \in R^n$) زیرمجموعه‌ی A باشد. در صورت وجود، تفاصل هاکوآرا منحصر به فرد است.

۱-۱-۶ مثال. $[0,1] \sim_h \{0\}$ وجود ندارد زیرا هیچ انتقالی از $[0,1]$ در مجموعه‌ی $\{0\}$ نیست.

۱-۱-۷ تعریف. فرض کنید x یک نقطه از R^n و A زیرمجموعه‌ی ناتهی از R^n باشد $d(x,A)$، فاصله‌ی x از A ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}.$$

بنابراین، $d(x,A) = d(x,\bar{A}) \geq 0$ و $d(x,A) = 0$ اگر و فقط اگر $x \in \bar{A}$ [۵۴,۲.۳.۲].

۱-۱-۸ تعریف. εـ‌همسایگی از مجموعه‌ی ناتهی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_\varepsilon(A) = \{x \in R^n : d(x,A) < \varepsilon\},$$

و بستار آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{S}_\varepsilon(A) = \{x \in R^n : d(x,A) \leq \varepsilon\}.$$

${\bar{S}_1}^n$ را گوی یکه در R^n می‌نامیم و برای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرمجموعه‌ی ناتهی A از R^n داریم:

$$\bar{S}_\varepsilon(A) = A + \varepsilon \bar{S}_1^n.$$

۱-۱-۹ تعریف. فرض می‌کنیم A و B دو زیرمجموعه‌ی‌ناتهی از R^n باشند در این صورت جداسازی هاسدورف[1] از B به A را به صورت

$$d_H^*(B,A) = \sup\{d(b,A) : b \in B\},$$

تعریف می‌کنیم که هم ارز است با

$$d_H^*(B,A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subseteq A + \varepsilon \bar{S}_1^n\}.$$

1) Hausdorff separation

بنابراین، $d_H^*(B,A) \geq \circ$ و $d_H^*(B,A) = \circ$ اگر و فقط اگر $B \subseteq \bar{A}$، بعلاوه برای زیرمجموعه‌های ناتهی A، B و C نامساوی مثلث برقرار است یعنی:

$$d_H^*(B,A) \leq d_H^*(B,C) + d_H^*(C,A).$$

در حالت کلی $d_H^*(B,A) \neq d_H^*(A,B)$ [۳۶,۵.۴.۲].

۱-۱-۱۰ تعریف. فاصله‌ی‌هاسدورف بین دو زیرمجموعه‌ی‌ناتهی A و B از R^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_H(A,B) = \max\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\},$$

بنابراین، برای زیر مجموعه‌های ناتهی A، B و C داریم:

۱) $d_H(A,B) \geq \circ$ و $d_H(A,B) = \circ$ اگر و فقط اگر $\bar{A} = \bar{B}$؛

۲) $d_H(A,B) = d_H(B,A)$؛

۳) $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$.

۱-۱-۱۱ قضیه [۳۶,۷.۴.۵]. $(\mathcal{K}^n, d_H)$ و $(\mathcal{K}_c^n, d_H)$ فضاهای متری جدایی‌پذیر کامل[۱] هستند.

۱-۲ فضای ε^n

۱-۲-۱ تعریف. یک مجموعه‌ی‌فازی از R^n مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند به طور پیوسته از بازه $I = [\circ, ۱]$ اختیار شود، این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu : R^n \longrightarrow [\circ, ۱]$ نمایش می‌دهیم، مشخص می‌شود. μ تابعی است که به هر عضو x از R^n یک عدد را از بازه‌ی$[\circ, ۱]$ به عنوان درجه‌ی عضویت x در مجموعه‌ی‌فازی نسبت می‌دهد.

$\mathcal{F}^n$ را مجموعه‌های فازی از R^n در نظر می‌گیریم.

1) Complete Separable

۱-۲-۲ تعریف. برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ مجموعه‌ی αـبرش[1] $U[\alpha]$ از مجموعه‌ی فازی U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U[\alpha] = \{x \in R^n : \mu_U(x) \geq \alpha\}.$$

۱-۲-۳ تعریف. تکیه‌گاه[2] $U[۰]$ از یک مجموعه‌ی‌فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U[۰] = \overline{\bigcup_{\alpha \in (۰, ۱]} U[\alpha]}.$$

۱-۲-۴ تعریف. مجموعه‌ی فازی U را محدب فازی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in U[۰]$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\mu_U(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \geq \min\{\mu_U(x), \mu_U(y)\}$$

خواص زیر را برای αـبرش‌های مجموعه‌ی‌فازی U داریم: [۲.۳, ۳۶]

۱) برای هر $۰ \leq \alpha \leq \beta \leq ۱$ داریم:

$$U[\beta] \subseteq U[\alpha] \subseteq U[۰].$$

۲) برای هر $\alpha \in I$، $U[\alpha] \neq \phi$.

۳) $U[۰]$ یک زیرمجموعه‌ی‌کراندار از R^n است.

۴) $U[\alpha]$ یک زیرمجموعه‌ی‌فشرده از R^n برای هر $\alpha \in I$ است.

۵) برای هر دنباله غیر نزولی $\{\alpha_i\}$ در I که $\alpha \underset{i \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \alpha_i$ داریم:

$$U[\alpha] = \bigcap_{i \geq ۱} U[\alpha_i].$$

۶) اگر U یک مجموعه‌ی‌محدب فازی باشد آنگاه برای هر $\alpha \in I$، $U[\alpha]$ محدب است.

1) α-cut 2) Support

۱-۲-۵ تعریف. تابع مشخصه‌ی χ_A از زیرمجموعه‌ی A از R^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A \\ ۰, & x \notin A. \end{cases}$$

۱-۲-۶ تعریف. فرض کنید U یک زیرمجموعه‌ی فازی از R^n باشد اگر برای $x \in R^n$، $\mu_U(x) = ۱$ در این صورت مجموعه‌ی فازی U را نرمال گوییم.

۱-۲-۷ تعریف. تابع $\mu : R^n \longrightarrow [۰, ۱]$ را نیم پیوسته‌ی بالایی گوئیم اگر برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ مجموعه‌ی $\{x \in R^n : \mu(x) < \lambda\}$ باز باشد.

۱-۲-۸ مثال. تابع مشخصه روی یک بازه‌ی بسته نیم پیوسته‌ی بالایی است و روی یک بازه‌ی نیم باز نیم پیوسته‌ی بالایی نیست.

۱-۲-۹ تعریف. فضای همه زیرمجموعه‌های فازی U از R^n که نرمال، محدب فازی، نیم پیوسته‌ی بالایی و دارای تکیه گاه کراندار هستند را با ε^n نمایش می‌دهیم.

وقتی $n = ۱$ اعضای ε را اعداد فازی می‌گوییم که αـبرش‌های فشرده و محدب آنها بازه‌های حقیقی فشرده هستند.

۱-۲-۱۰ قضیه. [۳۶,۸.۲.۶] اگر $A \in \mathcal{K}_c^n$ آنگاه $\chi_A \in \varepsilon^n$.

۱-۲-۱۱ تعریف. جمع و ضرب اسکالر مجموعه‌های فازی در ε^n را برای هر $U, V \in \varepsilon^n$، $c \in R - \{۰\}$ و $\alpha \in I$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(U + V)[\alpha] = U[\alpha] + V[\alpha],$$

$$(cU)[\alpha] = cU[\alpha].$$

براساس اصل گسترش این تعریف معادل تعریف زیر است [۶۳,۴.۳.۵]:

$$\mu_{u+v}(Z) = \sup_{Z=x+y} \min\{\mu_u(x), \mu_v(y)\}$$

$$\mu_{cu}(x) = \mu_u(x/c).$$

۱-۲-۱۲ قضیه [۲۷,۲.۳.۴]. ε^n تحت عمل جمع و ضرب فوق بسته است.

۱-۲-۱۳ تعریف. اعداد فازی مثلثی مجموعه‌های فازی در ε می‌باشند با سه تایی مرتب $(x_l, x_c, x_r) \in R^۳$ که در آن $x_l \leq x_c \leq x_r$ نمایش داده می‌شوند به طوری که $U[۰] = [x_l, x_r]$ و $U[۱] = \{x_c\}$ و همچنین برای هر $\alpha \in I$ داریم:

$$U[\alpha] = [x_c - (۱ - \alpha)(x_c - x_l) \text{ و } x_c + (۱ - \alpha)(x_r - x_c)],$$

وگراف تابع عضویت به شکل یک مثلث است. ε_{TG} را مجموعه‌ی‌تمام زیرمجموعه‌های اعداد فازی مثلثی در نظر می‌گیریم.

۱-۲-۱۴ تعریف. اعداد فازی ذوزنقه‌ای که مجموعه‌های فازی در ε هستند با چهارتایی مرتب $(x_l, x_{cl}, x_{cr}, x_r) \in R^۴$، که در آن $x_l \leq x_{cl} \leq x_{cr} \leq x_r$، نمایش داده می‌شوند به طوری که $U[۰] = [x_l, x_r]$ و $U[۱] = [x_{cl}, x_{cr}]$. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های اعداد فازی ذوزنقه‌ای را با ε_{TP} نمایش می‌دهیم. دراین صورت، $\varepsilon_{TG} \subset \varepsilon_{TP}$.

۱-۳ انواع مشتق در حساب فازی

۱-۳-۱ تعریف. عدد فازی پارامتری را با دوتایی $(u_۱, u_۲)$ از توابع $u_۱(\alpha)$ و $u_۲(\alpha)$ که برای هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ در شرایط زیر صدق می‌کنند، تعریف می‌کنیم:

۱) $u_۱(\alpha)$ یک تابع غیر کاهشی کراندار و از راست پیوسته است؛

۲) $u_۲(\alpha)$ یک تابع غیر افزایشی کراندار و از چپ پیوسته است؛