بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل برخی معادلات تحولی کسری-زمانی

سخنران: سمیه فولادی

زمان: ۳۰ /۶ /۹۲ ساعت ۸ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱- دکتر رضا مختاری

۲- دکتر مهدی تاتاری

۳- دکتر مهرزاد قربانی (دانشگاه صنعتی قم)

۴- دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده

در این پایان‌نامه به پیاده‌سازی و آنالیز روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل برخی از معادلات تحولی کسری-زمانی مانند معادله خطی و غیرخطی شرودینگر و معادله انتقال-انتشار و معادله KBK می‌پردازیم. به عبارتی حل و آنالیز با روش گالرکین ناپیوسته موضعی گسسته کامل صورت می‌گیرد که مبنی بر پیاده‌سازی طرح تفاضل متناهی در زمان و روش گالرکین ناپیوسته موضعی در مکان است.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته موضعی، روش تفاضل متناهی، معادله شرودینگر کسری-زمانی، معادله انتقال-انتشار کسری-زمانی، معادله KBK کسری-زمانی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل برخی معادلات تحولی کسری-زمانی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

سمیه فولادی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم سمیه فولادی
تحت عنوان

روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل برخی معادلات تحولی کسری-زمانی

در تاریخ ۳۰ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما	دکتر رضا مختاری
۲- استاد مشاور	دکتر مهدی تاتاری
۳- استاد داور۱	دکتر مهرزاد قربانی (دانشگاه صنعتی قم)
۴- استاد داور۲	دکتر رضا مزروعی سبدانی
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

ای خالق بی‌همتا که کوه‌ها کتیبه پر راز از سکوت تو را، بر دوش دارند و آب‌های جهان در جام مستی تو سرشار از اسرارند.

ای یگانه هستی بی‌مانند، من در کوره راه‌های آغازم، در ابتدای مسیری که جز فکر تو آهنگی بر لب نجوا نمی‌کند. تابش نقره گون انوارت اکنون که بر نیاز من تابیدن گرفته است، من به فراز نظرت محتاجم، که اگر تو بخواهی به آفتابم می‌رسانی و اگر نخواهی به خاکم می‌نشانی. ای یگانه بی‌همتا، سپاسم را بر برگ‌های نیلوفرانه می‌سپارم تا در سکوت و آرامش مرداب‌ها، درک روح زنده بودن را در منتهای مهربانیت آواز کنند. تو را سپاس ای همه هستی

و نیز سپاس به خانواده‌ام، آن‌ها که صخره‌های استوار در زندگی‌ام هستند. همیشه پایدار و همیشه بردبار. سپاس به همسرم، بهترین دوستم، به جهت حمایت، تشویق و عشق بی‌پایانش و شادمانی که به زندگی‌ام بخشید

و نهایت سپاس و قدردانی را از استاد عزیزم آقای دکتر رضا مختاری دارم. او که چون شمعی به راهم روشنایی بخشیده است و تیره راه‌ها را برایم نور بود

شایسته است پاس بدارم توفیق شاگردی در محضر استادی چون دکتر مهدی تاتاری، که اگر پای همت و راهبریش نبود عزم حرکتم میسر نمی‌شد

و تشکر و قدردانی می‌کنم از داوران محترم مدعو آقایان دکتر مهرزاد قربانی و دکتر رضا مزروعی سبدانی که حضورشان سبب بهرمندی و مؤانست علمی برایم بوده است

و در پایان، سپاس گذارم از تمام کسانی که فعالیت‌هایشان طی سالیان گسترده مسیر زندگیم را به جاده استوار علم و دانایی سوق دادند، به تمام کسانی که برای علم و دانش مشعلی برافراشته‌اند.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه به پیاده‌سازی و آنالیز روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل برخی از معادلات تحولی کسری-زمانی مانند معادله خطی و غیرخطی شرودینگر و معادله انتقال-انتشار و معادله KBK می‌پردازیم. به عبارتی حل و آنالیز با روش گالرکین ناپیوسته موضعی گسسته کامل صورت می‌گیرد که مبنی بر پیاده‌سازی طرح تفاضل متناهی در زمان و روش گالرکین ناپیوسته موضعی در مکان است.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته موضعی، روش تفاضل متناهی، معادله شرودینگر کسری-زمانی، معادله انتقال-انتشار کسری-زمانی، معادله KBK کسری-زمانی

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیشگفتار

امروزه مشتق و انتگرال مرتبه ناصحیح تحت عنوان حسابان کسری معرفی شده است. تاریخ حسابان کسری به قرن ۱۷، یعنی به زمان حسابان مرتبه صحیح برمی‌گردد. رشته حسابان کسری، موضوع ریاضی توسعه‌پذیری است که توجه بسیاری از علاقه‌مندان ریاضی که برای توسعه حسابان کسری نقش اساسی دارند، همچون هوپیتال، لایب‌نیتز، لیوویل، ریمان، گراندوالد و لتنیکوف را به خود جلب کرده است [۳، ۱۱، ۱۸، ۳۱، ۳۴–۳۶، ۴۶، ۴۷، ۴۹].

نخستین تعریف از مشتق کسری در پایان قرن ۱۹ توسط لیوویل و ریمان معرفی شد، اما مفهوم مشتق و انتگرال غیرصحیح به عنوان تعمیمی از حساب انتگرال و مشتق مرتبه صحیح متداول در سال ۱۶۹۵ توسط لایب‌نیتز و هوپیتال بیان شد. به‌تازگی معادلات مشتق کسری ابزارهای با ارزشی را در طرح بسیاری از پدیده‌ها در رشته‌های مختلفی مانند مهندسی، فیزیک و اقتصاد بهبود بخشیده است. همچنین کاربرد وسیعی در نوسانات غیرخطی زمین لرزه و بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند مدل‌های نفوذ جریان در جسم متخلخل و حرکت پویای سیالات دارد.

معادلات مشتقات پاره‌ای مرتبه کسری کاربرد گسترده‌ای در مدل‌سازی ریاضی (مایناردی ۱۹۹۷، پادلبنی ۱۹۹۹، دیتلم و فورد ۲۰۰۲) و معادلات مشتق کسری مختلف که به‌تازگی روی آن‌ها کار شده است مانند معادله **KdV**- برگرز کوراموتو (توسط سزار و همکاران ۲۰۱۱)، معادلات مشتقات پاره‌ای مکان–زمان کسری (لیو و همکاران ۲۰۰۷، چن و همکاران ۲۰۰۸، ماریو ۲۰۰۸)، مسأله با دو مقدار مرزی مرتبه کسری (فیکس و روپ ۲۰۰۴)، مسأله انتشار زمان–کسری (لین و زو ۲۰۰۷، جیانگ و ما ۲۰۱۱) معادله **KdV** کسری (مومانی ۲۰۰۵) و معادلات مشتق پاره‌ای کسری مکانیک سیالات (اودیبات و مومانی ۲۰۰۹) دارد.

گالرکین ناپیوسته اولین بار اوایل سال ۱۹۷۰ به‌عنوان روشی برای حل معادلات با مشتقات پاره‌ای پیشنهاد و آنالیز شد. اولین طرح گالرکین ناپیوسته در سال ۱۹۷۳ توسط رید و هیل در چارچوبی از انتقال خطی نوترون، یعنی به صورت یک معادله هذلولوی خطی مستقل از زمان معرفی شد [۴۰]. روش گالرکین ناپیوسته برای معادلات بیضوی توسط بیکر برای معادلات مرتبه چهارم در سال ۱۹۷۷ ارائه شد [۴]. شرح کامل‌تری از توسعه تاریخچه و معرفی

روش گالرکین ناپیوسته توسط آرنولد، برتسی، کاکبرن و مارینی ارائه شد [۲]. تعدادی از مقاله‌های چالشی روی روش گالرکین ناپیوسته برای مسائل بیضوی در مجموعه مقاله‌های ویرایش شده توسط کاکبرن، شو و کارنیاداکیس جمع‌آوری شد [۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۷، ۲۰]. در این مقاله‌ها روشی برای حل ساده‌تر از مسأله‌های وابسته به زمان غیرخطی با استفاده از گسسته‌سازی رانگ-کوتا صریح مرتبه بالا برای زمان [۴۸] و گسسته‌سازی گالرکین ناپیوسته در مکان با حل‌کننده‌های ریمان دقیق یا تقریبی به‌عنوان شار عددی، وجود دارد. کاربرد روش گالرکین ناپیوسته را می‌توان در حوزه‌های مختلفی مانند الکترومغناطیس، دینامیک گاز، جریان دانه‌های ریز، هواشناسی، اقیانوس‌شناسی، شبیه‌سازی وسایل عایق، انتقال آلوده‌کننده در رسانه‌های متخلخل، دستگاه و ماشین‌آلات توربینی، جریان متلاطم، پیش‌بینی وضع هوا بیان کرد. برای جزییات بیشتر، به‌علاوه پیاده‌سازی‌ها و کاربردها به مقاله [۱۰، ۱۵]، مقاله مروری [۱۹] و مقاله‌های دیگری که در نخستین همایش روش‌های گالرکین ناپیوسته که در سال ۱۹۹۹ در جزیره ژوده واقع در نیوپورت ایالت متحده برگزار شد، ارجاع می‌دهیم. همچنین مقاله [۱۵] و مقاله مروری [۱۰] نیز جزییات کامل‌تری را شامل می‌شوند.

به‌تازگی دو موضوع خاص روی روش گالرکین ناپیوسته اختصاص داده شده است که شامل مقاله‌های جالب کار شده روی این روش در همه جنبه‌ها مانند طراحی الگوریتم، آنالیز، به‌کارگیری و کاربردها است [۱۶، ۲۲]. کاکبرن و شو اولین روش گالرکین ناپیوسته موضعی را برای مسائل انتقال-انتشار (با مشتقات مرتبه دوم) معرفی کردند [۱۳]. روش گالرکین ناپیوسته موضعی که توسط آن‌ها معرفی شد را می‌توان به عنوان تعمیمی از روش گالرکین ناپیوسته مطرح شده توسط بیسی و ریبی برای جواب‌هایی از معادله ناویه-استوکس تراکم‌پذیر دانست [۵]. این روش دارای چند ویژگی است که آن را برای محاسبات کاربردی جذاب‌تر ساخته است. شاید مهم‌ترین ویژگی، خاصیت قانون بقا در این روش است که ویژگی مستحکمی در کاربردها به حساب می‌آید. سیالات با محیط‌های پرمنفذ یا متخلخل و پدیده‌های انتقال نمونه‌هایی از این نوع است. از دیدگاه محاسباتی، چون در هر عنصر داخلی پیوستگی تحمیل نشده است، روش را می‌توان روی بیشتر شبکه‌های کلی با نقاط آویزان با چندجمله‌ای‌هایی از درجه دلخواه در ساخت هر عنصر تعریف کرد.

روش گالرکین ناپیوسته موضعی، شکلی مانند گسسته‌سازی مکانی گالرکین ناپیوسته استفاده شده روی دستگاه غیرخطی انتقال محض، دارد. البته کارائی آن زمانی است که روش رانگ-کوتای صریح برای گسسته‌سازی زمانی برای مسأله انتقال-انتشار که عبارت انتقال غالب بر عبارت انتشار است، استفاده شود. شو و یان در [۲۸] روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای معادله **KdV** با مشتق مرتبه سوم پیاده‌سازی کردند و تعمیم روش گالرکین ناپیوسته را برای معادلات با مشتقات پاره‌ای با مشتق مکانی چهارم و پنجم در [۵۴] ارائه دادند. لوی، شو و یان روش گالرکین ناپیوسته موضعی را برای معادلات پراکندگی غیرخطی که جواب موجی متحرک با تکیه‌گاه یا محمل فشرده دارند و کامپکتون نامیده می‌شوند، بهبود بخشیدند [۳۳]. برای مطالعه بیشتر کارهای انجام شده با روش گالرکین ناپیوسته موضعی [۵۵] مراجع خوبی را معرفی کرده است.

معادله شرودینگر غیرخطی یکی از مدل‌های اصلی است که بیشتر پدیده‌های فیزیکی را توصیف می‌کند و کاربردهای مهمی در دینامیک سیالات و اپتیک غیرخطی دارد. معادله شرودینگر کسری نیز از معادلات اساسی مکانیک کوانتوم کسری است که اولین بار نیک لاسکین آن‌را به‌عنوان نتیجه‌ای از بسط انتگرال مسیر فیمن معرفی کرد [۳۷]. ریدا

و همکاران در [۴۱] روش تجزیه آدومین را برای معادله کسری زمانی شرودینگر غیرخطی پیاده‌سازی کردند. یلدریم روش آشفتگی هموتوپی را برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی این معادله به کار گرفت [۵۶]. اگرچه روش‌های عددی زیادی برای معادلات مشتق پاره‌ای کسری پیشنهاد شده است اما به تازگی تقریب عددی با استفاده از روش عنصر متناهی، برای معادله کسری شرودینگر به کار گرفته شده است. روش عنصر متناهی گالرکین ناپیوسته، روش مناسبی برای معادلات مشتق پاره‌ای است. به این دلیل که کارایی و انعطاف‌پذیری و مرتبه همگرایی بالا بدون تکرارهای بالا به‌دست می‌آید. هدف از این پایان نامه حل و آنالیز با روش گالرکین ناپیوسته موضعی گسسته کامل است که مبنی بر پیاده‌سازی طرح تقاضل متناهی در زمان و روش گالرکین ناپیوسته موضعی در مکان باشد. ادامه ساختار پایان نامه به شرح زیر است. فصل اول شامل پیش‌نیازهای لازم برای درک بهتر از مفاهیم اصلی است. این فصل شامل فضای توابع، تقریب توابع قطعه‌ای خطی پیوسته و ناپیوسته، درونیابی و حسابان کسری است. در فصل دوم انواع روش گالرکین که شامل گالرکین پیوسته، گالرکین ناپیوسته، گالرکین ناپیوسته موضعی است، بیان می‌شود. پیاده‌سازی روش گالرکین ناپیوسته موضعی در حل تعدادی از معادلات کسری-زمانی خطی و غیرخطی و بررسی تخمین خطا و پایداری آن‌ها در فصل سوم آورده شده است و در پایان، پیوست پایان‌نامه شامل نامساوی‌های مورد استفاده و ویژگی‌های عملگر تصویر در آنالیز خطا و انواع شارهای عددی است.

۲.۱ مفاهیم اولیه

در این بخش به معرفی فضاهای موردنیاز در پیاده‌سازی روش‌های گالرکین می‌پردازیم و درونیابی مورد استفاده در این فضاها را بیان می‌کنیم. سپس مختصر توضیحی از حسابان کسری آورده می‌شود.

۱.۲.۱ فضای توابع

مطالب این بخش برگرفته از [۳۰] است و خواننده برای جزییات بیشتر می‌تواند به این مرجع مراجعه کند.

فضاهای باناخ

فرض می‌کنیم $\mathbb{X}$ بیانگر یک فضای خطی روی میدان اعداد حقیقی باشد.

تعریف ۱.۲.۱ نگاشت $\|.\| : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty)$ را نرم گوییم اگر

- برای هر $u, v \in \mathbb{X}$، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$؛
- برای هر $u \in \mathbb{X}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$؛
- $\|u\| = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$؛

حال فرض می‌کنیم $\mathbb{X}$ فضای نرم‌دار باشد.

تعریف ۲.۲.۱ دنباله $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ همگرا به $u \in \mathbb{X}$ نامیده می‌شود و می‌نویسیم

$$u_k \longrightarrow u,$$

اگر

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0.$$

تعریف ۳.۲.۱

- دنباله $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ را دنباله کوشی گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $N > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|u_k - u_l\| < \varepsilon \qquad \forall k, l \geq N.$$

- $\mathbb{X}$ کامل است اگر هر دنباله کوشی در $\mathbb{X}$ همگرا باشد؛ به‌عبارتی، اگر $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله کوشی باشد، $u \in \mathbb{X}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ همگرا به u است.

- فضای باناخ $\mathbb{X}$، فضای نرم‌دار خطی و کامل است.

مثال ۴.۲.۱ فضاهای L^p؛
فرض می‌کنیم Ω زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و $1 \leq p \leq \infty$. اگر $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_\Omega |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_\Omega |f|, & p = \infty. \end{cases}$$

$L^p(\Omega)$ را فضای خطی از تمام توابع اندازه‌پذیر $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ که $\|f\|_{L^p}(\Omega) < \infty$، معرفی می‌کنیم. فضای $L^p(\Omega)$ فضای باناخ است [۴۵].

فضاهای هیلبرت

فرض می‌کنیم $\mathbb{H}$ بیانگر یک فضای خطی روی میدان اعداد حقیقی باشد.

تعریف ۵.۲.۱ نگاشت $(,) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ را ضرب داخلی گوییم هرگاه

- برای هر $u, v \in \mathbb{H}$، $(u, v) = (v, u)$؛

- نگاشت $u \longmapsto (u,v)$ برای هر $v \in \mathbb{H}$ خطی باشد؛
- برای هر $u \in \mathbb{H}$، $(u,u) \geq ۰$؛
- $(u,u) = ۰$ اگر و فقط اگر $u = ۰$؛

اگر $(,)$ یک ضرب داخلی باشد، نرم وابسته به آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad u \in \mathbb{H}.$$

تعریف ۶.۲.۱ به یک فضای ضرب داخلی کامل فضای هیلبرت گویند.

مثال ۷.۲.۱ فضای $L^۲(\Omega)$ با ضرب داخلی

$$(f,g) = \int_\Omega fg dx,$$

فضای هیلبرت است.

فضای سوبولف

فضاهای هولدر [۳۰] اغلب مجموعه‌های مناسبی برای نظریه مقدماتی معادلات با مشتقات پاره‌ای نیستند و در بعضی مواقع نمی‌توانند تخمین تحلیلی خوبی برای جوابی که در این فضاها ساخته می‌شوند، معرفی کنند. بنابراین نیاز به معرفی فضاهای دیگری داریم که توابع در آن‌ها دارای همواری کمتر هستند.

مشتقات ضعیف

در حالت کلاسیک نیاز است که مشتقات پاره‌ای وجود داشته باشند و همچنین پیوسته باشند. به همین علت فضای $C^k(\overline{\Omega})$ تعریف می‌شود. اما در شکل ضعیف معادله نیاز نیست تابع و مشتقات پیوسته باشند. بنابراین می‌توان گفت مشتق پاره‌ای ضعیف تعریف دیگری برای مشتق ضعیف است که در شکل ضعیف معادله استفاده می‌شود. برای بیان این تعریف نیاز به معرفی چند مفهوم داریم. بعد از بیان این مفاهیم به تعریف مشتق پاره‌ای ضعیف می‌پردازیم.

ملاحظه ۸.۲.۱ محمل تابع ϕ، بستار مجموعه‌ای است که تابع روی آن مقدار غیرصفر می‌گیرد؛ به‌عبارتی

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : \phi(x,y) \neq ۰\}}.$$

اگر $\text{supp}(\phi)$ فشرده باشد، گفته می‌شود تابع ϕ محمل (تکیه‌گاه) فشرده در Ω است.

ملاحظه ۹.۲.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ فضای توابع بینهایت‌بار مشتق‌پذیر $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، با تکیه‌گاه فشرده در Ω باشد. توابع $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ را توابع آزمایشی می‌نامیم.

فرض می‌کنیم $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. اگر $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$، از انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم

$$\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi dx. \tag{۱.۱}$$

برای حالت کلی‌تر
اگر k عدد صحیح باشد، $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ و $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ با مرتبه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$ آن‌گاه

$$\int_\Omega uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\phi dx, \tag{۲.۱}$$

که در آن

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\phi.$$

رابطه (۲.۱) فقط زمانی برقرار است که $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. حال اگر u، k بار مشتق‌پذیر نباشد، کافی است که تابع به‌طور موضعی جمع‌پذیر v وجود داشته باشد که با جای‌گذاری آن به‌جای $D^\alpha u$، رابطه (۲.۱) برقرار باشد، زیرا در سمت چپ (۲.۱) کافی است u به‌طور موضعی جمع‌پذیر باشد.

ملاحظه ۱۰.۲.۱ تابع انتگرال‌پذیر موضعی (یا تابع جمع‌پذیر موضعی) تابعی است که روی هر زیرمجموعه فشرده از دامنه، انتگرال‌پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض می‌کنیم Ω مجموعه باز در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ تابع لبگ اندازه‌پذیر است. اگر برای f روی Ω داشته باشیم

$$\int_K |f| < +\infty,$$

یعنی انتگرال لبگ f روی هر زیرمجموعه فشرده K از Ω متناهی است. پس f انتگرال‌پذیر موضعی است. مجموعه چنین توابع را با L^1_{loc} نشان می‌دهیم

$$L^1_{loc} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\text{اندازه‌پذیر} : f|_K \in L_1(K) \quad \forall K \subset \Omega, \quad K\text{فشرده}\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض می‌کنیم u, v در $L^1_{loc}(\Omega)$ هستند. v را مشتق پاره‌ای ضعیف مرتبه α-ام u می‌نامیم و

می‌نویسیم

$$D^\alpha u = v,$$

اگر برای هر تابع آزمایشی $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ داشته باشیم،

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx.$$

مثال ۱۳.۲.۱ اگر $\Omega = (0, 2)$ و $n = 1$ و

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < \text{اگر ۲}. \end{cases}$$

به آسانی نشان داده می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \phi' dx &= \int_0^1 x \phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= -\int_0^1 \phi dx + \phi(1) - \phi(1) = -\int_0^2 v \phi dx. \end{aligned}$$

در ادامه، فرض می‌کنیم $1 \leq p \leq \infty$ و k یک عدد صحیح نامنفی است.

تعریف ۱۴.۲.۱ فضای سوبولف $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$، شامل همه توابع به‌طور موضعی جمع‌پذیر $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که برای هر α با $|\alpha| \leq k$، $D^\alpha u$ در شکل ضعیف وجود داشته باشد و به فضای $L^p(\Omega)$ متعلق باشد. به عبارتی

$$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \in L^1_{loc}(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض می‌کنیم $u \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$. نرم در این فضا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & ۱ \le p < \infty \text{ اگر}, \\ \sum_{|\alpha|\le k} \text{ess sup}_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty \text{ اگر}. \end{cases}$$

ملاحظه ۱۶.۲.۱

- اگر $p = ۲$ می‌توان نوشت $H^k(\Omega) = \mathbb{W}^{k,۲}(\Omega)$ برای $k = ۰,۱,\dots$. همچنین $H^{\circ}(\Omega) = L^{۲}(\Omega)$ تعریف می‌شود.
- توجه داریم که برابری توابع در $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ به طور a.e. (تقریباً همه‌جا) است.

۲.۲.۱ تقریب چندجمله‌ای قطعه‌ای خطی پیوسته و ناپیوسته در فضای یک‌بعدی

در این بخش به معرفی توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای می‌پردازیم که برای تقریب توابع کلی‌تری از آن استفاده می‌شود و پیاده‌سازی آن آسان‌تر است. برای محاسبه تقریب چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای از دو روش درونیابی و $L۲$-تصویر استفاده می‌کنیم. همچنین در این بخش تخمینی برای خطای این تقریب‌ها بیان می‌شود.

فضای چندجمله‌ای‌های خطی

فرض می‌کنیم $I = [x_{\circ}, x_{۱}]$ بازه‌ای روی محور اعداد حقیقی باشد. $\mathcal{P}_{۱}(I)$ فضای برداری از توابع چندجمله‌ای خطی روی I به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{P}_{۱}(I) = \{v : v(x) = c_{\circ} + c_{۱}x, x \in I, c_{\circ}, c_{۱} \in \mathbb{R}\}.$$

به عبارتی $\mathcal{P}_{۱}(I)$ شامل همه توابع به شکل $v = c_{\circ} + c_{۱}x$ است.
شاید بتوان گفت معمول‌ترین توابع پایه برای $\mathcal{P}_{۱}(I)$ توابع تک جمله‌ای $\{۱, x\}$ هستند. چون هر تابع $v \in \mathcal{P}_{۱}(I)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از این توابع نوشت. با مشخص شدن $c_{\circ}$ و $c_{۱}$، ضرایب ترکیب خطی v به طور یکتا تعیین می‌شود. به این ترتیب گفته می‌شود v دارای دو درجه آزادی است؛ با وجود این‌که $c_{\circ}$ و $c_{۱}$ تنها درجه‌های آزادی ممکن برای v نیست.
برای درک بهتر تابع خطی، یادآوری می‌کنیم که یک خط با دو نقطه داده شده، به طور یکتا مشخص می‌شود اما جفت نقطه‌های بسیاری وجود دارند که می‌توانند یک خط را نشان دهند. برای مثال $(۰,۱)$ و $(۲,۳)$ برای مشخص کردن $v = x + ۱$ استفاده می‌شوند، همین‌طور نقاط $(۴,۵)$ و $(-۱,۰)$. در حالت خاص، v را می‌توان با مقدارهای $\alpha_{\circ} = v(x_{\circ})$ و $\alpha_{۱} = v(x_{۱})$ در نقاط انتهایی $x_{\circ}$ و $x_{۱}$ در I مشخص کرد. برای نشان دادن این موضوع فرض می‌کنیم

$\alpha_0 = v(x_0)$ و $\alpha_1 = v(x_1)$ معلوم هستند. با قرار دادن x_0 و x_1 در $v = c_0 + c_1 x$ دستگاه خطی زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \tag{۳.۱}$$

دترمینان این ماتریس برابر است با $x_1 - x_0$ که همان طول بازه I بوده و به‌وضوح مقداری مثبت است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فقط یک تابع v در $\mathcal{P}_1(I)$ وجود دارد که در x_0 و x_1 به ترتیب مقدارهای α_0 و α_1 را می‌گیرد. توجه داریم که ماتریس دستگاه اخیر، ماتریس واندرموند است.

در ادامه، به نقاط x_0 و x_1 نام گره را انتساب می‌دهیم. می‌دانیم که هر تابع در $\mathcal{P}_1(I)$ با مقدارهای گره‌ای α_0 و α_1 مشخص می‌شوند. حال پایه‌های جدید $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ را برای $\mathcal{P}_1(I)$ معرفی می‌کنیم. پایه‌های جدید، توابع پایه گره‌ای نام‌گذاری می‌شود که به شکل زیر هستند

$$\lambda_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \tag{۴.۱}$$

دلیل معرفی توابع پایه گره‌ای، این است که هر تابع خطی v در $\mathcal{P}_1(I)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی زیر نوشت

$$v(x) = \alpha_0 \lambda_0(x) + \alpha_1 \lambda_1(x).$$

در این‌جا برخلاف نمایش قبلی نیازی به وارون ماتریس واندرموند نیست. توابع پایه گره‌ای را می‌توان به شکل زیر نشان داد

$$\lambda_0 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \qquad \lambda_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

که از تعریف (۴.۱) و یا حل دستگاه خطی (۳.۱) با سمت راست $[0, 1]^T$ و $[1, 0]^T$ به‌دست می‌آید.

فضای چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای خطی پیوسته

گسترشی از توابع خطی، توابع قطعه‌ای خطی هستند. برای بیان توابع پایه در این فضا لازم است در اولین گام دامنه v را به زیربازه‌ها تقسیم کنیم. بنابراین در هر زیربازه، v به‌وسیله یک تابع خطی داده می‌شود. پیوستگی v میان زیربازه‌های مجاور، ممکن است با قراردادن درجه آزادی در نقاط مشترک زیربازه‌ها تحمیل شود. به بیان ریاضی، بازه $I = [a, b]$ و $n + 1$ نقطه گره‌ای $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ را با افراز

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$