دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

اثباتی از تمامیت برای منطق مرتبه اول پیوسته

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

الهام حیدرزاده

استاد راهنما

دکتر مجتبی آقایی

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه بررسی مجموعه‌ای از اصول است که نوعی تمامیت برای منطق مرتبه اول پیوسته را نتیجه دهد. مخصوصاً نشان داده می‌شود که در منطق مرتبه اول پیوسته مجموعه‌ای از فرمول‌ها (تماماً) قابل‌ارضا است اگر (و تنها اگر) سازگار باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود که منطق مرتبه اول پیوسته نوعی تقریب از تمامیت قوی را ارضا می‌کند، که بنابر آن $\Sigma \models \varphi$ (اگر و) تنها اگر $\Sigma \vdash \varphi \dot{-} ۲^{-n}$ برای تمام $n < \omega$. این صورت تقریبی از تمامیت قوی بیان می کند که اگر $\Sigma \models \varphi$، بنابراین اثبات‌های متناهی از Σ می‌توانند تقریب‌های دلخواهی از درستی φ را بدست دهد. به‌علاوه مسئله‌ای متفاوت که در نظریه مدل به طور سنتی مطرح می‌شود یعنی تصمیم‌پذیری را بررسی می‌کنیم. از تمامیت منطق مرتبه اول پیوسته حاصل می‌شود که یک نظریه کامل با اصول بازگشتی (یا حتی شمارش‌پذیر بازگشتی) تصمیم‌پذیر است.

کلمات کلیدی: تمامیت، منطق مرتبه اول پیوسته.

فصل ۱

مقدمه

منطق مرتبه اول پیوسته در میان متخصصین نظریه مدل که متمایل به توسعه آنالیز کلاسیک ساختارهای متری کامل (همانند جبرهای احتمال، فضاهای هیلبرت و فضاهای باناخ) می‌باشد مورد علاقه قرار گرفته است.
با تحقیق در منطق مرتبه اول پیوسته که از پیش با مطالعه‌ی نظریه مدل در این چارچوب شروع شده، سوالی طبیعی برای بررسی به وجود می‌آید: آیا مجموعه‌ی جالبی از اصول وجود دارد که نوعی از تمامیت را نتیجه دهد؟
به بیان غیر دقیق نظریه‌ی مرتبه اول و کلاس‌های مدل‌های متناظرشان را (مانند کلاسهای مقدماتی) بررسی می‌کند. خواص نظریه مرتبه اول یک ساختار می‌تواند بینشی مستقیم در مورد خود آن ساختار بدست دهد. تحقیقات در این مورد به طور کلاسیک محدود به ساختارهای به اصطلاح جبری همانند میدان‌ها، گروه‌ها و گراف‌ها است. به‌علاوه در نظریه مدل جدید اغلب نظریه‌های پایدار–نظریه‌هایی که مفهومی خوش‌رفتار از استقلال را دارا می‌باشد (که در صورت وجود همیشه یکتا است)– مورد مطالعه قرار می‌گیرد. منطق مرتبه اول پیوسته که در [۷] به‌عنوان گسترشی از منطق مرتبه اول کلاسیک پرداخت شده است، اجازه‌ی وسعت دادن به تحلیل کلاسیک ساختارهای جبری به کلاس‌های طبیعی متنوعی از ساختارهای متریک کامل را می‌دهد. (باید خاطر نشان کرد که کلاس‌های ساختارهای متریک کامل نمی‌توانند به معنای کلاسیک مقدماتی باشند، مثلاً اصل کمال خاصیّتی نامتناهی است و بنابراین قابل بیان در منطق مرتبه اول کلاسیک نیست، همچنین [۱] را برای یک بررسی کلی از منطق مرتبه اول پیوسته و کاربردهایش روی انواعی از ساختارهای متریک در آنالیز تابعی و نظریه احتمال ببینید. مثلاً کلاس (گوی‌های واحد) از فضاهای هیلبرت و کلاس جبرهای احتمال بدین معنی مقدماتی‌اند. (یک جبر بول از پیشامدها در یک فضای احتمالی با تقریب ایده‌آل‌های با اندازه‌ی صفر و با متر $d(A,B)=\mu(A)$ است.) به‌علاوه مفهوم کلاسیک پایداری می‌تواند به منطق مرتبه اول پیوسته گسترش یابد در واقع، تا حدی شگفت‌انگیز است که کلاس فضاهای هیلبرت و جبرهای احتمال پایدار هستند که استقلال در آن‌ها به ترتیب تعامد و استقلال احتمالاتی است.
به طور تاریخی دو نوع منطق پیش از منطق مرتبه اول پیوسته ارائه شده است. از یک طرف منطق مرتبه اول پیوسته پیشینه‌ای ساختاری دارد. پیشینه‌های ساختاری منطق‌هایی هستند که همانند منطق مرتبه اول پیوسته فرایندهای

ماشینی را به‌کار می‌برند ولی هیچ‌گاه آن‌را به مطالعه‌ی ساختارهای متریک کامل توسعه ندادند. چنین پیشینه‌های ساختاری شامل منطق پیوسته چانگ و کایسلر [۱۱]، منطق چند ارزشی لوکاسویچ [۱۴] و منطق چند ارزشی پاولکا [۱۷] می‌شود. منطق چانگ و کایسلر برای مطالعه‌ی فضاهای متریک کامل بیش از اندازه کلی است. در حالی‌که منطق لوکاسویچ و منطق پاولکا به منظورهای متفاوتی توسعه یافته‌اند. با این وجود منطق مرتبه اول پیوسته گونه‌ای بهبود یافته از منطق چاینگ و کایسلر است، از طرف دیگر منطق مرتبه اول پیوسته پیشینه‌های منظوری دارد. پیشینه‌های منظوری آن منطق‌هایی هستند که برای مطالعه‌ی ساختارهای متریک کامل توسعه یافته‌اند ولی از روش‌های ماشینی مشابه روش‌های منطق مرتبه اول پیوسته استفاده نمی‌کنند. پیشینه‌های منظوری منطق مرتبه اول پیوسته شامل منطق هنسون برای ساختارهای باناخ [۱۶] و نظریه‌های مجرد فشرده یا به اختصار $cats$، [۴–۶] می‌باشد. منطق مرتبه اول پیوسته دیگر از چنین کاستی در منطق‌ها رنج نمی‌برد. مخصوصاً مهم این‌که منطق مرتبه اول پیوسته درگیری تکنیکی کمتری از منطق‌های پیشین داشته و در بسیاری از جهات به منطق مرتبه اول کلاسیک نزدیک‌تر است. به‌علاوه قدرت بیان در این منطق معادل با منطق نظریه‌های مجرد فشرده باز متریک است. این منطق همچنین منطق هنسون برای ساختارهای باناخ را توسعه می‌دهد و همچنان قدرت بیانی معادل با گونه‌ای طبیعی از منطق هنسون را داراست. به‌عنوان گسترشی از منطق مرتبه اول کلاسیک، منطق مرتبه اول پیوسته، قضیه‌ی لون‌هایم–اسکولم، برهان‌های دییاگرام، قضیه‌ی درون‌یابی کریگ، قضیه‌ی تعریف‌پذیری بس، مشخصه‌های حذف سور و تمامیت مدلی، نتایجی برای وجود مدل‌های اشباع و همگن، قضیه‌ی حذف تایپ نتایجی اساسی از نظریه‌ی پایایی و تقریباً همه‌ی نتایج دیگر نظریه مدل مقدماتی را برآورده می‌کند. به‌علاوه منطق مرتبه اول پیوسته چارچوبی قابل ردیابی برای ساختن‌های فوق ضربی (و بنابراین ساختن‌های غلافی) در کاربردهای نظریه‌ی مدل در آنالیز و هندسه بدست می‌دهد و در واقع در بیان شرایط از آنالیز و هندسه، در منطق مرتبه اول پیوسته با تجهیز نظریه‌ی متخصصین مدل و آنالیز با یک زبان مشترک، احساسی کاملاً طبیعی وجود دارد.

۱.۱ ساختار کلی پایان‌نامه

فصل دوم:

در این فصل ابتدا منطق گزاره‌ای لوکاسویچ و منطق گزاره‌ای پیوسته را تعریف می‌کنیم. قضایای درستی و تمامیت را برای منطق لوکاسویچ اثبات کرده و با ارائه‌ی ترجمه‌ای مناسب بین این دو منطق، قضایای مشابهی را برای منطق گزاره‌ای پیوسته بدست خواهیم آورد.

فصل سوم:

در این فصل ابتدا زبان و معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول پیوسته مشابه منطق مرتبه‌ی اول کلاسیک بیان می‌شود، که در آن نمادهای تابعی و محمولی به توابعی پیوسته و رابط‌های منطقی مشابه حالت گزاره‌ای تعبیر می‌شود.

همانند منطق مرتبه‌ی اول کلاسیک، مقدار یک ترم یا درستی یک فرمول در یک ساخت فقط بستگی به مقدار متغیرهای آزاد در آن‌ها دارد و لم جانشینی نیز برقرار است. تغیر متغیرهای بسته اثری در درستی فرمول در

یک ساخت ندارد.
ساختارهای پیوسته دارای متریک بوده که قابل کامل‌سازی هستند و تمامیت و درستی نسبت به هر دو ساختارهای پیوسته با متریک‌های کامل یا ناکامل برقرار است.
دستگاهی از اصول معرفی شده و برخی از خواص آن مانند قضیه‌ی استنتاج، قضیه‌ی تعمیم و تغیر متغیرهای بسته با ارائه‌ی الگوریتم‌هایی در جهت تولید اثبات‌ها و اجرای آن‌ها روی چند مثال انجام می‌شود. مجموعه‌ی سازگارهای ماکسیمال از فرمول‌ها با ملاحظاتی در تفاوت تعریف آن‌ها با حالت کلاسیک و برخی از خواص آن‌ها بیان می‌شود.

فصل چهارم:

در این فصل با ارائه‌ی بحثی درباره‌ی نامناسب بودن تعریف یک مجموعه‌ی کامل هنکین در حالت کلاسیک برای حالت پیوسته، تعریف مناسبی برای آن ارائه شده و همانند حالت کلاسیک قضایایی داریم مبنی بر گسترش هر نظریه‌ی سازگار به یک نظریه‌ی کامل هنکین و سازگار ماکسیمال و این‌که چنین مجموعه‌ای در یک پیش-ساختار ارضا می‌شود. از این‌رو تمامیت منطق پیوسته نتیجه می‌شود. این نتیجه با تعریف درجات درستی و اثبات‌پذیری برای فرمول تقویت می‌شود.

فصل ۲

منطق گزاره‌ای پیوسته

۱.۲ منطق لوکاسویچ و منطق پیوسته

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم $\mathcal{S}_\circ = \{P_i : i \in I\}$ یک مجموعه از نمادهای مجزا باشد و $\mathcal{S}$ به‌طور آزاد از $\mathcal{S}_\circ$ با عملگر دوتایی $\dot{-}$ و عملگر یگانی $\neg$ تولید شود. $\mathcal{S}$ را یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ باشد.

۱. اگر $v_\circ : \mathcal{S}_\circ \to [\circ, \text{۱}]$ یک نگاشت باشد، می‌توانیم $v_\circ$ را به نگاشت یکتای $v : \mathcal{S} \to [\circ, \text{۱}]$ گسترش دهیم به‌طوری‌که

$$v(\varphi \dot{-} \psi) := v(\varphi) \dot{-} v(\psi) := \max(v(\varphi) - v(\psi), \circ).$$
$$v(\neg\varphi) := \text{۱} - v(\varphi).$$

v را نسبت‌دهی درستی تعریف شده بنابر $v_\circ$ می‌نامیم.

۲. برای $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$، می‌نویسیم $v \models \Sigma$ و v را یک مدل از Σ می‌نامیم، اگر $v(\varphi) = \circ$ برای هر $\varphi \in \Sigma$ و همچنین می‌نویسیم $v \models \varphi$ اگر $v \models \{\varphi\}$.

۳. $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ را قابل‌ارضا می‌نامیم، اگر یک مدل داشته باشد.

۴. می‌نویسیم $\Sigma \models \varphi$، اگر هر مدل از Σ همچنین یک مدل از φ باشد.

می‌توانیم بنویسیم $\Sigma \models^L \varphi$ برای نشان دادن این‌که با یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ سرکار داریم.

تبصره ۳.۱.۲ ملاحظه می‌کنیم که ۰ معادل درستی است و هر $r \in (0,1]$ معادل یک درجه از درستی یا غلطی است، که ۱ به‌عنوان غلطی مطلق تعبیر می‌شود. همچنین مشاهده می‌کنیم که در منطق کلاسیک $\dot{-}$ نقشی مشابه نقش $\rightarrow$ را بازی می‌کند. می‌توانیم $\varphi \dot{-} \psi$ را به‌صورت زیر تعبیر کنیم
ψ از φ نتیجه می‌شود و φ حداقل به‌اندازه‌ی ψ غلط است و φ حداکثر به اندازه‌ی ψ درست است یا به‌طور ساده ψ کمتر یا مساوی φ است. تعبیر آخر را ترجیح می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنیم $S_0 = \{p_i : i \in I\}$ یک مجموعه از نمادهای مجزا باشد و S به‌طور آزاد از S_0 با عملگر دوتایی $\dot{-}$ و عملگر یگانی $\neg$ و $\frac{1}{2}$ تولید شود. S را منطق گزاره‌ای پیوسته می‌نامیم.

یک نسبت‌دهی درستی v در تعریف (۱) ۲.۱.۲ با شرط اضافی $v(\frac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{2}v(\varphi)$ تعریف‌پذیر است. مدل‌ها و ارضاشدنی و استنتاج منطقی همانند تعریف ۲.۱.۲ تعریف می‌شوند.
می‌توانیم بنویسیم $\Sigma \models^{CL} \varphi$ برای نشان دادن این‌که با یک منطق گزاره‌ای پیوسته سرکار داریم.

۲.۲ اصل‌ها: گروه ۱

اکنون شش مورد از چهارده قالب اصل را بیان می‌کنیم. ابتدا چهار اصل از منطق گزاره‌ای لوکاسویچ را بیان می‌کنیم.

(A۱) $(\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \varphi.$
(A۲) $((\chi \dot{-} \varphi) \dot{-} (\chi \dot{-} \psi)) \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi).$
(A۳) $(\varphi \dot{-} (\varphi \dot{-} \psi)) \dot{-} (\psi \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi)).$
(A۴) $(\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} (\neg\psi \dot{-} \neg\varphi).$

وقتی دو قالب اصل بعدی را به چهار اصل ابتدایی (در زبان مناسب) اضافه کنیم، یک اصل‌بندی برای منطق گزاره‌ای پیوسته بدست می‌آوریم.

(A۵) $\frac{1}{2}\varphi \dot{-} (\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi).$
(A۶) $(\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi) \dot{-} \frac{1}{2}\varphi.$

توجه کنید که (A۵) و (A۶) بیان می‌کنند که $\frac{1}{2}$ آن‌چنان که باید رفتار می‌کند. مخصوصاً تحت تعبیر داده شده، (A۵) و (A۶) هر دو به این‌که $\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\varphi$ اشاره می‌کنند. $\psi + \varphi$ به‌صورت $\psi + \varphi := \neg(\neg\varphi \dot{-} \psi)$ تعریف می‌شود، بنابراین مطابق تعبیر داده شده از $\dot{-}$ تعبیری برای $+$ بنابر $x + y = \min(x + y, 1)$ داده می‌شود. بنابراین

$$v(\varphi \dot{+} \psi) = v(\neg(\neg\varphi \dot{-} \psi)) = 1 - v(\neg\varphi \dot{-} \psi) = 1 - \max(v(\neg\varphi) - v(\psi), 0)$$
$$= 1 - (v(\neg\varphi) - v(\psi)) = 1 - (1 - v(\varphi) - v(\psi)) = 1 - 1 + v(\varphi) + v(\psi) = v(\varphi) + v(\psi).$$

تعریف می‌کنیم $\varphi \wedge \psi = \varphi \dot{-} (\varphi \dot{-} \psi)$ و $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ و مشاهده می‌کنیم که $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$ و $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$.

استنتاج صوری و رابطه $\vdash$ برای هر دو منطق در روش طبیعی تعریف می‌شوند که در آن تنها قاعده استنتاج وضع مقدم MP است

$$\frac{\varphi, \quad \psi \dot{-} \varphi}{\psi}$$

یک استنباط صوری از Σ، یک دنباله متناهی از فرمول‌های $(\varphi_i \in \Sigma)$ است به‌طوری‌که برای هر $i < n$ (i) φ_i یک مثال از قالب اصل است، (ii) $\varphi_i \in \Sigma$ و یا (iii) $j, k < i$ وجود دارند که $\varphi_k = \varphi_i - \varphi_j$ از این‌رو می‌گوییم که φ از فرضیات Σ قابل‌اثبات است (نتیجه می‌شود و یا قابل استنتاج است.) و می‌نویسیم $\Sigma \vdash \varphi$ اگر یک استنتاج صوری از Σ وجود داشته باشد که به φ ختم شود. ملاحظه می‌کنیم که فرمول φ از Σ فقط در حالتی قابل‌اثبات است که توسط یک زیرمجموعه‌ی متناهی از Σ اثبات‌پذیر باشد. برای اجتناب از مشکل می‌توانیم بنویسیم $\Sigma \vdash^L \varphi$ برای نشان دادن این‌که در منطق گزاره‌ای لوکاسویچ φ از Σ قابل‌اثبات است و می‌نویسیم $\Sigma \vdash^{CL} \varphi$ برای نشان دادن این‌که φ از Σ در منطق گزاره‌ای پیوسته قابل‌اثبات است. واضح است که چگونه سیستم‌های اثبات از منطق گزاره‌ای پیوسته و منطق گزاره‌ای لوکاسویچ وابسته هستند. هر دو سیستم درستند، بدین معنی که اگر $\Sigma \vdash^L \varphi$ (متناظراً $\Sigma \vdash^{CL} \varphi$) پس $\Sigma \models^L \varphi$ (متناظراً $\Sigma \models^{CL} \varphi$).

این قسمت را با یک تعریف و اندکی نشانه‌گذاری قراردادی و یک تبصره تمام می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲ یک مجموعه از فرمول‌های Σ ناسازگار است اگر برای هر فرمول φ داشته باشیم $\Sigma \vdash \varphi$ و در غیراین‌صورت سازگار است.

توجه ۲.۲.۲ $\psi \dot{-} n\varphi$ را با استفاده از بازگشت روی $n < \omega$ تعریف می‌کنیم

۱. $\psi \dot{-} 0\varphi := \psi.$

۲. $\psi \dot{-} (n+1)\varphi := (\psi \dot{-} n\varphi) \dot{-} \varphi.$

توجه ۳.۲.۲ برای هر فرمول φ، ۱ را مختصرنویسی برای $\neg(\varphi \dot{-} \varphi)$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم 2^{-n} مختصرنویسی برای $1\underbrace{\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n\text{بار}}$ باشد و ۰ مختصرنویسی برای ۱$\neg$ باشد.

تبصره ۴.۲.۲ ملاحظه می‌کنیم که برای هر نسبت‌دهی درستی v و مجموعه‌ی $\mathcal{D}$ تولید شده از ۱ با به‌کارگیری عملگرهای $\neg$ و $\dot{-}$ و $\frac{1}{2}$ داریم $\mathbb{D} = \{v(d) : d \in \mathcal{D}\}$ مجموعه‌ی اعدادی به فرم $\frac{k}{2^n}$ که $k, n < \omega$ و $k \leq 2^n$ است. برای سادگی در نمادگذاری نباید تمایزی بین مجموعه‌ی نحوی $\mathcal{D}$ که این‌گونه تولید شده و $\mathbb{D}$ قائل شویم.

۳.۲ قضایای مورد نیاز

لم ۱.۳.۲ اگر $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ باشد و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ و برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ و $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m) \in \Sigma^m$، تعریف کنیم $\psi_{n,\bar{\varphi}} = 1 \dot{-} n\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_m$، داریم

۱. اگر $v(\varphi \dot{-} \psi) > 0$، آن‌گاه $v(\varphi) > 0$.

۲. اگر $v(\varphi \dot{-} (n+1)\psi) > 0$، آن‌گاه $v(\varphi \dot{-} n\psi) > 0$.

۳. اگر $v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+1)\varphi_m) > 0$، آن‌گاه $v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) > 0$.

۴. اگر $v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) > 0$، آن‌گاه
$v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) = 1 - \sum_{i=1}^{m} n_i v(\varphi_i)$.

۵. اگر $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > 0$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{m} v(\varphi_i) < \frac{1}{n}$.

۶. اگر $v(\psi_{2n,\bar{\varphi}}) > 0$، آن‌گاه $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > \frac{1}{2}$.

۷. برای هر $n \leq n'$ و $\bar{\varphi} \subseteq \bar{\varphi}'$:

(i) اگر $v(\psi_{n',\bar{\varphi}'}) > 0$، آن‌گاه $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > 0$.

(ii) اگر $v(\psi_{2n',\bar{\varphi}'}) > 0$، آن‌گاه $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > \frac{1}{2}$.

اثبات. ۱. از تعریف ۲.۱.۲ داریم $v(\varphi \dot{-} \psi) = \max(v(\varphi) - v(\psi), 0)$، بنابراین اگر $v(\varphi \dot{-} \psi) > 0$ باشد داریم، $v(\varphi \dot{-} \psi) = v(\varphi) - v(\psi) > 0$، پس $v(\varphi) > v(\psi)$، درنتیجه $v(\varphi) > 0$.

۲. از ۲.۲.۲ داریم $v(\varphi \dot{-} (n+1)\psi) = v((\varphi \dot{-} n\psi) \dot{-} \psi) > 0$ و حال از قسمت (۱) نتیجه می‌گیریم $v(\varphi \dot{-} n\psi) > 0$.

۳. اگر $v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+1)\varphi_m) > 0$، بنابر ۲.۲.۲ داریم
$v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m\varphi_m) \dot{-} \varphi_m) = v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+1)\varphi_m) > 0$
و از قسمت (۱)، $v(1 \dot{-} n_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) > 0$.

۴. اثبات را با استقراء روی طول فرمول انجام می‌دهیم
پایه استقراء: برای $m = 0$ داریم $v(1) > 0$ و $v(1) = 1$.
فرض استقراء: اگر $v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) > 0$، آنگاه

$$v(1 \dot{-} n_1\varphi_1 \dot{-} n_2\varphi_2 \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) = 1 - n_1 v(\varphi_1) - n_2 v(\varphi_2) - \cdots - n_m v(\varphi_m),$$

حکم استقراء: اگر $v(۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱ \dot{-} n_۲\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+۱)\varphi_m) > ۰$، نشان می‌دهیم

$$v(۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱ \dot{-} n_۲\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+۱)\varphi_m) = ۱-n_۱v(\varphi_۱)-n_۲v(\varphi_۲)-\cdots-(n_m+۱)v(\varphi_m),$$

$$\begin{aligned} v(۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱ \dot{-} n_۲\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} (n_m+۱)\varphi_m) &= v((۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱ \dot{-} n_۲\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) \dot{-} \varphi_m) \\ &= \max(v(۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱ \dot{-} n_۲\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m)) - v(\varphi_m), ۰) \\ &\overset{(*)}{=} v(۱ \dot{-} n_۱\varphi_۱) \dot{-} \cdots \dot{-} n_m\varphi_m) - v(\varphi_m) \\ &\overset{(**)}{=} ۱ - n_۱v(\varphi_۱) - n_۲v(\varphi_۲) - \cdots - n_mv(\varphi_m) - v(\varphi_m) \\ &= ۱ - n_۱v(\varphi_۱) - n_۲v(\varphi_۲) - \cdots - (n_m+۱)v(\varphi_m). \end{aligned}$$

توضیح(*): بنابر فرض در حکم استقراء برقرار است.

توضیح(**): بنابر فرض استقراء و قسمت (۳) لم برقرار است.

۵. اگر $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > ۰$ بنابر قسمت (۴) داریم

$$v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) = ۱ - n(v(\varphi_۱) + \cdots + v(\varphi_m)) > ۰,$$

درنتیجه

$$v(\varphi_۱) + \cdots + v(\varphi_m) < \frac{۱}{n}.$$

۶. بنابر قسمت (۴) و (۵) داریم

$$v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) = ۱ - n(v(\varphi_۱) + \cdots + v(\varphi_m)) > ۱ - n(\tfrac{۱}{۲n}) = \tfrac{۱}{۲}.$$

۷.

$$\begin{aligned} v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) &= v(۱ \dot{-} n\varphi_۱ \dot{-} n\varphi_۲ \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_m) \\ &= ۱ - n(v(\varphi_۱) + \cdots + v(\varphi_m)) \\ &\geq ۱ - n'(v(\varphi_۱) + \cdots + v(\varphi_m) + \cdots + v(\varphi_{m'})) \\ &= v(\psi_{n',\bar{\varphi}'}) > ۰ \end{aligned}$$

۸. بنابر قسمت‌های (۶) و ((i)۷).

لم ۲.۳.۲ فرض کنیم S یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ باشد و $\Sigma \subseteq S$ مدلی نداشته باشد، بنابراین برای

$n,m \in \mathbb{N}$ و هر $i \leq m$ فرمول $\varphi_i \in \Sigma$ هست به‌طوری‌که

$$\models 1 \dot{-} n\varphi_1 \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_m.$$

اثبات. فرض کنیم برای هر $n, \bar{\varphi}$ تابع v وجود دارد که $v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) > 0$. قرار می‌دهیم

$$A_{n,\bar{\varphi}} = \{v \in [0,1]^{\mathcal{S}} |\ v(\psi_{n,\bar{\varphi}}) \geq \frac{1}{2}\} \subseteq [0,1]^{\mathcal{S}},$$

از آن‌جا که $[0,1]^I$ فشرده است طبق قضیه‌ی کانتور ثابت می‌کنیم $\cap A_{n,\bar{\varphi}} \neq \emptyset$.
برای این منظور برای $A_{n_1,\bar{\varphi}_1}, \cdots, A_{n_k,\bar{\varphi}_k}$ دلخواه ثابت می‌کنیم

$$A_{n_1,\bar{\varphi}_1} \cap \cdots \cap A_{n_k,\bar{\varphi}_k} \neq \emptyset,$$

قرار می‌دهیم $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 \cup \cdots \cup \bar{\varphi}_k$ و $n = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$.
برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم $\bar{\varphi}_i \subseteq \bar{\varphi}$ و $n_i \leq n$. بنابر فرض خلف v وجود دارد که $v(\psi_{2n,\bar{\varphi}}) > 0$ پس از (۷) ۱.۳.۲ داریم $v(\psi_{n_i,\bar{\varphi}}) \geq \frac{1}{2}$.
بنابراین برای هر $1 \leq i \leq k$ ، خواهیم داشت $v \in A_{n_i,\bar{\varphi}_i}$.
برای فرمول φ و برای n دلخواه و $\psi_{n,\varphi} \equiv 1 \dot{-} n\varphi$ داریم $v(\psi_{n,\varphi}) \geq \frac{1}{2} > 0$ درنتیجه $v(\psi_{n,\varphi}) = 1 - nv(\varphi) \geq \frac{1}{2}$ پس

$$nv(\varphi) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \ \ 0 \leq v(\varphi) \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow v(\varphi) = 0,$$

پس $v \models \Sigma$، که متناقض با این است که Σ مدل ندارد.

حقیقت ۳.۳.۲ (تمامیت ضعیف برای منطق لوکاسویچ) فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای لوکاسویچ باشد و $\varphi \in \mathcal{S}$. دراین‌صورت $\models \varphi$ اگر و تنها اگر $\vdash \varphi$.

قضیه ۴.۳.۲ فرض کنیم $\mathcal{S}$ منطق گزاره ای لوکاسویچ باشد و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$، بنابراین Σ سازگار است اگر و تنها اگر یک مدل داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم Σ یک مدل مانند v داشته باشد ولی ناسازگار باشد، بنابراین $\Sigma \vdash 1$ و از قضیه درستی داریم $\Sigma \models 1$.
چون v مدل Σ است، مدل ۱ نیز است یعنی $v(1) = 0$ که تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.
برای طرف دیگر فرض کنیم Σ سازگار باشد ولی مدلی نداشته باشد، بنابر لم ۲.۳.۲، n و m و $\varphi_i \in \Sigma$ برای

هر $i < m$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $\psi = ۱ \dot{-} n\varphi_۰ \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_{m-۱}$ داریم $\models \psi$. از حقیقت قبلی داریم $\vdash \psi$ و با استفاده از MP نتیجه می‌گیریم $\Sigma \vdash ۱$.
از طرف دیگر

$$v(\varphi \dot{-} ۱) = \max(v(\varphi) - v(۱), ۰),$$

چون $v(\varphi) \leq ۱$ عبارت بالا صفر می‌شود پس $\models \varphi \dot{-} ۱$ و بنابر قضیه‌ی تمامیت داریم $\vdash \varphi \dot{-} ۱$ چون $\Sigma \vdash ۱$ از MP، $\Sigma \vdash \varphi$ که متناقض با سازگار بودن φ است. ■

لم ۵.۳.۲ برای هر منطق گزاره‌ای لوکاسویچ $\mathcal{S}$ (نه لزوماً آزاد) و $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{S}$ و $n, m, k < \omega$ و جایگشت σ روی k داریم

۱. $\vdash^L \varphi \dot{-} \varphi.$

۲. $\vdash^L \varphi \dot{-} ۱$

۳. $\vdash^L (\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} (۱ \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi)).$

۴. $\vdash^L ((\psi \dot{-} (n+m)\varphi) \dot{-} ((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi)) \dot{-} (\chi \dot{-} m\varphi).$

۵. $\vdash^L (\neg\varphi \dot{-} \neg\psi) \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi).$

۶. $\vdash^L ((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi) \dot{-} ((\varphi \dot{-} \chi) \dot{-} \psi).$

۷. $\vdash^L (\cdots((\psi \dot{-} \varphi_{\sigma(۰)}) \dot{-} \varphi_{\sigma(۱)}) \dot{-} \cdots \dot{-} \varphi_{\sigma(k-۱)}) \dot{-} (\cdots(((\psi \dot{-} \varphi_۰) \dot{-} \varphi_۱) \dot{-} \cdots \dot{-} \varphi_{k-۱}).$

۸. $\vdash^L (((\psi' \dot{-} \varphi') \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi)) \dot{-} (\psi' \dot{-} \psi)) \dot{-} (\varphi \dot{-} \varphi').$

اثبات. ۱. بنابر تعریف داریم

$$v(\varphi \dot{-} \varphi) = \max(v(\varphi) - v(\varphi), ۰) = ۰,$$

بنابراین $\models \varphi \dot{-} \varphi$ و از قضیه‌ی تمامیت داریم $\vdash \varphi \dot{-} \varphi$.

۲. برای هر فرمول φ داریم $v(\varphi) \leq v(۱)$، بنابراین $v(\varphi \dot{-} ۱) = ۰$.

۳. اگر $v(\psi) \leq v(\varphi)$ آن‌گاه $v(\psi \dot{-} \varphi) = \max\{v(\psi) - v(\varphi), ۰\} = ۰$ و با استقراء روی n نشان می‌دهیم که $v(۱ \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi)) = ۱$.
$v(۱ \dot{-} ۰(\psi \dot{-} \varphi)) = v(۱) = ۱$ و فرض استقراء را $v(۱ \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi)) = ۱$ قرار می‌دهیم حال

ثابت می‌کنیم

$$v(1 \dot{-} (n+1)(\psi \dot{-} \varphi)) = 1,$$

$$\begin{aligned} v(1 \dot{-} (n+1)(\psi \dot{-} \varphi)) &= v((1 \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi)) \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi)) \\ &= \max(v(1 \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi)) - v(\psi \dot{-} \varphi), 0) \\ &= \max(1, 0) = 1, \end{aligned}$$

بنابراین

$$v((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} (1 \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi))) = \max(v(\varphi \dot{-} \psi) - v(1 \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi), 0) = 0.$$

اگر $v(\varphi) \leq v(\psi)$ آن‌گاه $v(\varphi \dot{-} \psi) = 0$ و $v((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} (1 \dot{-} n(\psi \dot{-} \varphi))) = 0$.

۴. اثبات را بنابر برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنیم

$$v(((\psi \dot{-} (n+m)\varphi) \dot{-} ((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi)) \dot{-} (\chi \dot{-} m\varphi)) > 0,$$

بنابراین

$$v((\psi \dot{-} (n+m)\varphi) \dot{-} ((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi)) > v(\chi \dot{-} m\varphi) \geq 0,$$

و

$$v((\psi \dot{-} (n+m)\varphi) \dot{-} ((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi)) = v(\psi \dot{-} (n+m)\varphi) - v((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi) > 0,$$

پس

$$v(\psi \dot{-} (n+m)\varphi) > v((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi) \geq 0,$$

و بنابر لم ۱.۳.۲،

$$v(\psi \dot{-} (n+m)\varphi) = v(\psi) - (n+m)v(\varphi),$$

به‌علاوه

$$v((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi) \geq v(\psi) \dot{-} v(\chi) - nv(\varphi),$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v(\chi \dot{-} m\varphi) &< v(\psi \dot{-} (n+m)\varphi) - v((\psi \dot{-} \chi) \dot{-} n\varphi) \\ &\leq v(\psi) \dot{-} (n+m)v(\varphi) - (v(\psi) - v(\chi) - nv(\varphi)) \\ &= v(\chi) - mv(\varphi) \end{aligned}$$

پس

$$v(\chi \dot{-} m\varphi) < v(\chi) - mv(\varphi).$$

که تناقض است و حکم ثابت می‌شود.

۵.

$$\begin{aligned} v((\neg\varphi \dot{-} \neg\psi) \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi)) &= \max(v(\neg\varphi \dot{-} \neg\psi) - v(\psi \dot{-} \varphi), ۰) \\ &= \max(\max(v(\neg\varphi) - v(\neg\psi), ۰) - \max(v(\psi) - v(\varphi), ۰), ۰) \\ &= \max(\max(۱ - v(\varphi) - ۱ + v(\psi), ۰) - \max(v(\psi) - v(\varphi), ۰), ۰) \\ &= \max(\max(v(\psi) - v(\varphi), ۰) - \max(v(\psi) - v(\varphi), ۰), ۰) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

پس

$$\vdash^L (\neg\varphi \dot{-} \neg\psi) \dot{-} (\psi \dot{-} \varphi).$$

۶.

$$\begin{aligned} v((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi) &= \max(v(\varphi \dot{-} \psi) - v(\chi), ۰) \\ &= \max(\max(v(\varphi) - v(\psi), ۰) - v(\chi), ۰) \\ &= \max(v(\varphi) - v(\psi) - v(\chi), ۰), \end{aligned}$$

و

$$v((\varphi \dot{-} \chi) \dot{-} \psi) = \max(v(\varphi \dot{-} \chi) - v(\psi), \circ)$$
$$= \max(v(\varphi) - v(\chi) - v(\psi), \circ),$$

پس $v((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi) = v((\varphi \dot{-} \chi) \dot{-} \psi)$ و بنابراین $v((\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi) \dot{-} (\varphi \dot{-} \chi) \dot{-} \psi)) = \circ$.

۷. تعمیمی از (۶) است و مشابه آن اثبات می‌شود. ■

لم ۶.۳.۲ برای هر منطق گزاره‌ای لوکاسویچ $\mathcal{S}$ (نه لزوماً آزاد) و $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ اگر Σ و $\varphi \dot{-} \psi$ ناسازگار باشد، داریم $\Sigma \vdash \psi \dot{-} \varphi$.

اثبات. فرض کنیم Σ و $\varphi \dot{-} \psi$ ناسازگار باشد پس مدل ندارد. بنابر لم ۲.۳.۲، $\bar{\varphi} \in \Sigma$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\models ۱ \dot{-} n(\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} n\varphi_۱ \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_m,$$

و بنابر قضیه‌ی تمامیت $\vdash ۱ \dot{-} n(\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} n\varphi_۱ \dot{-} \cdots \dot{-} n\varphi_m$ و چون $\varphi_۱, \varphi_۲, \cdots, \varphi_m \in \Sigma$، بنابر$MP$ داریم $\Sigma \vdash ۱ \dot{-} n(\varphi \dot{-} \psi)$ و بنابر ۵.۳.۲(۳) داریم $\Sigma \vdash \psi \dot{-} \varphi$. ■

قضیه ۷.۳.۲ فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای پیوسته باشد و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$. دراین‌صورت Σ سازگار است اگر و تنها اگر قابل‌ارضا باشد.

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{S}^f$ منطق گزاره‌ای لوکاسویچ باشد که به‌طور آزاد از $\{P_\varphi : \varphi \in \mathcal{S}\}$ تولید شده و فرض کنیم

$$\Sigma_\circ^f = \{P_{\neg\varphi} \dot{-} \neg P_\varphi, \neg P_\varphi \dot{-} P_{\neg\varphi} : \varphi \in \mathcal{S}\}$$
$$\cup \{P_{\varphi \dot{-} \psi} \dot{-} (P_\varphi \dot{-} P_\psi), (P_\varphi \dot{-} P_\psi) \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \psi} : \varphi, \psi \in \mathcal{S}\}$$
$$\cup \{P_{\frac{۱}{۲}\varphi} \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi}, P_{\varphi \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi} \dot{-} P_{\frac{۱}{۲}\varphi} : \varphi \in \mathcal{S}\}$$
$$\Sigma^f = \{P_\varphi : \varphi \in \Sigma\} \cup \Sigma_\circ^f.$$

فرض کنیم Σ^f یک مدل v^f داشته باشد. $v : \mathcal{S} \to [0,1]$ را بنابر $v(\varphi) = v^f(P_\varphi)$ تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم v مدل Σ است، ابتدا نشان می‌دهیم v یک تابع نسبت‌دهی است. یعنی

۱. $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

۲. $v(\varphi \dot{-} \psi) = \max(v(\varphi) - v(\psi), 0)$

۳. $v(\frac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$

برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم

۱. $v^f(P_{\neg\varphi}) = v^f(\neg P_\varphi)$

۲. $v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi}) = v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi)$

۳. $v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi}) = v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi})$

و برای اثبات این احکام چون v^f یک مدل Σ است داریم

$$v^f(P_{\neg\varphi} \dot{-} \neg P_\varphi) = 0 \Rightarrow v^f(P_{\neg\varphi}) \leq v^f(\neg P_\varphi),$$
$$v^f(\neg P_\varphi \dot{-} P_{\neg\varphi}) = 0 \Rightarrow v^f(\neg P_\varphi) \leq v^f(P_{\neg\varphi}),$$

پس $v^f(P_{\neg\varphi}) = v^f(\neg P_\varphi)$.

$$v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi} \dot{-} P_\varphi \dot{-} P_\psi) = 0 \Rightarrow v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi}) \leq v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi),$$
$$v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \psi}) = 0 \Rightarrow v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi) \leq v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi}),$$

پس $v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi}) = v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi)$.

$$v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi} \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi}) = 0 \Rightarrow v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi}) \leq v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi}),$$
$$v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi} \dot{-} P_{\frac{1}{2}\varphi}) = 0 \Rightarrow v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi}) \leq v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi}),$$

پس $v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi}) = v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi})$.
حال برای اثبات تابع نسبت‌دهی بودن v داریم

$$v(\neg\varphi) = v^f(P_{\neg\varphi}) = v^f(\neg P_\varphi) = 1 - v^f(P_\varphi) = 1 - v(\varphi).$$

$v(\varphi \dot{-} \psi) = v^f(P_{\varphi \dot{-} \psi}) = v^f(P_\varphi \dot{-} P_\psi) = \max(v^f(P_\varphi) - v^f(P_\psi), \circ) =$
$\max(v(\varphi) - v(\psi), \circ).$
$v^f(\frac{1}{2}\varphi) = v^f(P_{\frac{1}{2}\varphi}) = v^f(P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi}) = v(\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi) = \max(v(\varphi) \dot{-} \frac{1}{2}v(\varphi), \circ) = \frac{1}{2}v(\varphi).$

پس v یک نگاشت نسبت‌دهی است.
فرض کنیم $\varphi \in \Sigma$ پس $P_\varphi \in \Sigma^f$ درنتیجه $v(\varphi) = v^f(P_\varphi) = \circ$ پس $v \models \Sigma$، بنابراین v مدل Σ است.
حال فرض کنیم Σ مدلی نداشته باشد (قابل‌ارضا نباشد)، پس Σ^f مدل ندارد، درنتیجه Σ^f ناسازگار است بنابراین برای هر ψ داریم $\Sigma^f \vdash P_\psi$، از این‌رو $\Sigma \vdash \psi$ (بنابراین Σ ناسازگار است) زیرا اگر $B_1, \cdots, B_n$ استنتاجی برای P_ψ از Σ^f باشد آن‌گاه $B'_1, \cdots, B'_n$ استنتاجی برای ψ از Σ است که هر B'_i از B_i با تبدیل اتم‌های P_φ به φ حاصل می‌شود.
به‌طور بازگشتی داریم

$$P'_\varphi = \varphi$$
$$(\neg\varphi)' = \neg\varphi'$$
$$(\varphi \dot{-} \psi)' = \varphi' \dot{-} \psi'$$

به وضوح اگر B_i یک نمونه از اصول $A_1 - A_4$ باشد پس B'_i نیز یک نمونه از همان اصل می‌باشد اگر $B_i \in \Sigma^f$ آن‌گاه چند حالت زیر را داریم

۱. اگر برای $\varphi \in \Sigma$ داشته باشیم $B_i = P_\varphi$، آن‌گاه $B'_i = \varphi \in \Sigma$.

۲. اگر $B_i = P_{\neg\varphi} \dot{-} \neg P_\varphi$، آن‌گاه $B'_i = \neg\varphi \dot{-} \neg\varphi$ که قضیه است.

۳. اگر $B_i = \neg P_\varphi \dot{-} P_{\neg\varphi}$، آن‌گاه $B'_i = \neg\varphi \dot{-} \neg\varphi$ که قضیه است.

۴. اگر B_i برابر با $P_{\varphi \dot{-} \psi} \dot{-} (P_\varphi \dot{-} P_\psi)$ یا $(P_\varphi \dot{-} P_\psi) \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \psi}$ باشد، آن‌گاه $B'_i = (\varphi \dot{-} \psi) - (\varphi \dot{-} \psi)$ که قضیه است.

۵. اگر $B_i = P_{\frac{1}{2}\varphi} \dot{-} P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi}$، آن‌گاه $B'_i = \frac{1}{2}\varphi \dot{-} (\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi)$ که اصل (A_5) است.

۶. اگر $B'_i = P_{\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi} \dot{-} P_{\frac{1}{2}\varphi}$، آن‌گاه $B'_i = (\varphi \dot{-} \frac{1}{2}\varphi) \dot{-} \frac{1}{2}\varphi$ که اصل (A_6) است.

۷. اگر B_i از B_j و B_k طبق MP حاصل شده باشد، آن‌گاه B'_i نیز از B'_j و B'_k حاصل می‌شود.

همچنین برای آخرین فرمول استنتاج خواهیم داشت $B'_n = P'_\psi = \psi$.
برای طرف دیگر فرض کنید Σ ناسازگار است پس $\Sigma \vdash 1$ و بنابر قضیه درستی $\Sigma \models 1$، اگر Σ دارای مدل v باشد پس $v(1) = \circ$ که متناقض با $v(1) = 1$ است. ■

تقریب زیرین از تمامیت قوی بلافاصله از نتیجه قبلی بدست می‌آید.

نتیجه ۸.۳.۲ (تمامیت قوی تقریب شده برای منطق پیوسته) فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای پیوسته باشد و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ و $\varphi \in \mathcal{S}$. بنابراین $\Sigma \models \varphi$ اگر و تنها اگر $\Sigma \vdash \varphi \dot{-} ۲^{-n}$ برای هر $n < \omega$.

اثبات. فرض کنیم $\Sigma \models \varphi$ پس $\Sigma \cup \{۲^{-n} \dot{-} \varphi\}$ قابل‌ارضا نیست، زیرا اگر $v(\Sigma) = ۰$ چون $\Sigma \models \varphi$ پس $v(\varphi) = ۰$ بنابراین $v(۲^{-n} \dot{-} \varphi) = ۲^{-n} \neq ۰$ پس $\Sigma \cup \{۲^{-n} \dot{-} \varphi\}$ ناسازگار است و بنابر لم ۶.۳.۲ داریم $\Sigma \vdash \varphi \dot{-} ۲^{-n}$. برعکس اگر برای هر n، $\Sigma \vdash \varphi \dot{-} ۲^{-n}$ بنابر قضیه‌ی تمامیت $\Sigma \models \varphi \dot{-} ۲^{-n}$ فرض کنیم $v \models \Sigma$ پس $v \models \varphi \dot{-} ۲^{-n}$ یعنی $v(\varphi \dot{-} ۲^{-n}) = ۰$ بنابراین $v(\varphi) \leq \varphi(۲^{-n})$ پس $۰ \leq v(\varphi) \leq ۲^{-n}$ برای هر n بنابراین $v(\varphi) = ۰$ درنتیجه $\Sigma \models \varphi$. ■

حقیقت ۹.۳.۲ (تمامیت قوی متناهی برای منطق پیوسته) فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک منطق گزاره‌ای پیوسته باشد و $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ متناهی و $\varphi \in \mathcal{S}$. دراین‌صورت $\Sigma \models \varphi$ اگر و تنها اگر $\Sigma \vdash \varphi$.

لم ۱۰.۳.۲ برای هر منطق گزاره‌ای پیوسته‌ی $\mathcal{S}$ و $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ داریم

۱. $\vdash^{CL} \frac{۱}{۲}\varphi \dot{-} \varphi$.

۲. $\frac{۱}{۲}\varphi \vdash^{CL} \varphi$

۳. $\vdash^{CL} (\frac{۱}{۲}\psi \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi) \dot{-} \frac{۱}{۲}(\psi \dot{-} \varphi)$.

اثبات. ۱. طبق تعریف داریم

$$v(\tfrac{۱}{۲}\varphi \dot{-} \varphi) = \max(v(\tfrac{۱}{۲}\varphi) - v(\varphi), ۰) = \max(\tfrac{۱}{۲}v(\varphi) - v(\varphi), ۰) = ۰$$

پس

$$\models \tfrac{۱}{۲}\varphi \dot{-} \varphi.$$

۲.

۱. $\frac{۱}{۲}\varphi$ (فرض)

۲. $(\varphi \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi) \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi$ $(A۶)$

۳. $\varphi \dot{-} \frac{۱}{۲}\varphi$ $(۱, ۲, MP)$

۴. φ $(۱, ۳, MP)$