بسم الله الرحمن الرحیم

۱۲۵۶۴۲_۲۰۰۵۱۰۲

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایهٔ دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

مؤلفه های زنجیری سایه زدنی C^1 ـ پایدار

توسط:

طاهره خانی مقدم

استاد راهنما:

دکتر عباس فخاری

استاد مشاور:

دکتر نرگس تولایی

شهریور ۱۳۸۸

به نام خدا

مؤلفه های زنجیری سایه زدنی C^1 ـ پایدار

به وسیله‌ی:

طاهره خانی مقدم

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض (گرایش هندسه)

از دانشگاه علوم پایه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:...............

دکتر عباس فخاری، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد راهنما)

دکتر نرگس تولایی، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد مشاور)

دکتر میثم نصیری، استادیار مرکز تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان (استاد داور)

دکتر محمد ابری، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد داور)

دکتر ناصر هاشمی، استادیار دانشکده زمین (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریورماه ۱۳۸۸

که ای خدای مهربان

من بسوی تو پناه می آورم از آنکه در سایه بی نیازی تو تهی دست باشم.

و تورا فریادرس می طلبم و تنها به تو امیدوارم، تو را به دعا می خوانم

و به جود و کرم حضرتت اعتماد من است.

تقدیم به

پدر و مادرم

کــه همــه لحظــات ســالهای زنــدگیم را مرهــون زحمــات بــی دریغشــان هستم.

تقدیر و تشکر

اکنون که به لطف پروردگار دوره کارشناسی ارشد خود را به پایان می برم مراتب تقدیر و تشکر قلبی خود را از استاد راهنمای بزرگوارم **جناب آقای دکتر فخاری** دارم که زیباترین کلام ریاضیات را به من آموخت. و بی شک بدون کمک ها و راهنمایی های ارزنده ایشان انجام این کار برایم مقدورنبود.

همچنین از **جناب آقاي دکتر نصیري و دکتر ابری** که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و از **خواهر خوبم** که همواره در تمام دوران تحصیل مشوق و پشتیبانم بوده است تشکر می کنم.

و از دوست مهربان و صبورم **خانم کلاگر** که در تمام مدت این دو سال در کنارم بودند بی نهایت سپاسگذارم. و در پایان قدردادن زحمات بهترین یار و رفیق زندگیم **خانم نصیرزاده** هستم که وجودش در همه سالهايي که از خانواده دور بوده ام به یقین هدیه اي ازجانب خداوند است.

چکیده

مؤلفه های زنجیری سایه زدنی C^1 – پایدار

به وسیله ی

طاهره خانی مقدم

واژه های کلیدی: سایه زدنی C^1 – پایدار، مؤلفه های زنجیری، کلاس های هموکلینیک، تجزیه تسلطی، هذلولوی

فرض کنید p یک نقطه متناوب هذلولوی برای C^1 – دیفیومورفیسم f روی منیفلد فشرده M بوده، و $C_f(p)$ مؤلفه زنجیری f شامل p باشد. ما در این پایان نامه نشان می دهیم که اگر $C_f(p)$ سایه زدنی C^1 – پایدار باشد، در این صورت یک کلاس هموکلینیک وابسته به p می باشد، همچنین $C_f(p)$ دارای یک تجزیه تسلطی $E \oplus F$ خواهد بود که $\dim E = \mathrm{index}(p)$. و در پایان ثابت می کنیم هرگاه $C_f(p)$ انبساطی پایه ای نیز باشد، آن گاه هذلولوی است.

فهرست مطالب

پیشگفتار ح

۱ پیش نیازها ۱

۱.۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۲.۱ برخی از مفاهیم و قضایای توپولوژیکی ۳

۳.۱ مجموعه های هذلولوی ۵

۱.۳.۱ مثال هایی از یک مجموعه هذلولوی ۵

۲.۳.۱ برخی از خواص یک مجموعه هذلولوی ۷

۳.۳.۱ نتایجی از یک مجموعه هذلولوی ۱۱

۴.۱ خاصیت سایه زنی ۱۷

۵.۱ تجزیه تسلطی ۲۶

۱.۵.۱ برخی از خواص یک تجزیه تسلطی ۲۶

۶.۱ کلاس های هموکلینیک ۳۲

۱.۶.۱ برخی از خواص C^1 ـ ژنریک یک کلاس هموکلینیک ۳۴

۷.۱ دیفیومورفیسم های رام و سرکش ۳۷

۲ سایه زدنی C^1 ـ پایدار ۳۹

۱.۲ مؤلفه های زنجیری ۳۹

۲.۲ مماس هموکلینیک ۴۰

۳.۲ دور با بعد متفاوت ۴۳

۳ وجود یک تجزیه تسلطی برای مؤلفه های زنجیری ۵۱

۱.۳ چند گزاره ۵۱

۲.۳ اثبات قضیه اساسی ۵۶

۴ **هذلولوی بودن غیر یکنواخت روی مدارهای متناوب** **۵۸**

۱.۴ نقطه مرزی غیر ss ۵۸

۲.۴ اثبات قضیه اساسی ۶۲

۵ **هذلولوی بودن مؤلفه های زنجیری** **۶۷**

۱.۵ ساختار ضرب موضعی ۶۷

۲.۵ اثبات قضیه اساسی ۷۲

کتاب نامه **۷۸**

واژه نامه فارسی به انگلیسی **۸۱**

لیست تصاویر

۱.۱ نعل اسب ۶
۲.۱ λـلم ۱۳

۱.۲ مؤلفه همبندی x ۴۱
۲.۲ حالت دو بعدی ۴۲
۳.۲ رفتار مدار سایه زنی ۴۷
۴.۲ یک شبه مدار از g ۴۸

۱.۴ نقطه مرزی غیر ss ۵۹
۲.۴ دینامیک های g_1 در همسایگی q ۶۱

پیشگفتار

در مورد سیستم های دینامیکی که در شرط A صدق می کنند، مجموعه های پایه هذلولوی از جمله زیر سیستم های اساسی هستند که دارای بسیاری از خواص دینامیکی مهم نیز می باشند و به صورت وسیع در نظریه ارگودیک و نظریه پایایی مورد بررسی قرار گرفته اند.

در نظریه سایه زنی برای سیستم های دینامیکی، مؤلفه های زنجیری در زمره موضوعات اصلی تحقیق و جایگزینی خوب برای مجموعه های پایه هذلولوی هستند. علاوه براین در مبحث C^1 ـ ژنریک، همانطور که در [۳] ثابت شده است، هر مؤلفه زنجیری وابسته به یک نقطه متناوب، یک کلاس هموکلینیک است.

باون و آناسوف در [۱۹] و [۲۱] نشان دادند که اگر f در شرط A و شرط تقاطع قوی صدق کند، آن گاه دارای خاصیت سایه زنی است. و از آن جا که چنین سیستم هایی دارای ساختاری پایدار هستند، بنابراین یک C^1 ـ همسایگی $\mathcal{U}$ از f وجود دارد، به طوری که هر $g \in \mathcal{U}$ نیز دارای خاصیت سایه زنی می باشد، زیرا g و f مزدوج هستند. بعدها عکس این مطلب توسط ساکایی [1] مطرح شد، در واقع او در [۲۳] نشان داد که اگر یک C^1 ـ همسایگی $\mathcal{U}$ از f موجود باشد، به طوری که هر $g \in \mathcal{U}$ دارای خاصیت سایه زنی باشد، در این صورت f در شرط A و شرط تقاطع قوی صدق می کند.

همچنین در [۲۰] و [۲۴] اثبات شده است که f در شرط C^0 ـ تقاطع صدق می کند اگر و تنها اگر دارای خاصیت سایه زنی باشد.

اما یکی از مسائل مهم دیگری که در [۱۶] نشان داده می شود اینست که، هر عنصر در C^1 ـ درون مجموعه دیفیومورفیسم های f که $f|_{\Omega(f)}$ دارای خاصیت سایه زنی است، در شرط A و شرط بدون دور صدق می کنند. از طرفی می دانیم که اگر f دارای شرط A و بدون دور باشد بنابراین $\Omega(f) = CR(f)$، و در نتیجه $f|_{CR(f)}$ دارای خاصیت سایه زنی است. لذا C^1 ـ درون مجموعه دیفیومورفیسم های f که $f|_{CR(f)}$ دارای خاصیت سایه زنی می باشند، سیستم هایی را که دارای شرط A و بدون دور هستند، مشخص خواهند کرد.

آنچه در این پایان نامه به آن پرداخته خواهد شد، توسط سامبارینو [2] و ویتز [3] در مقاله [۲۶] برای یک کلاس هموکلینیک که C^1 ـ پایدار انبساطی می باشد، اثبات شده است.

این پایان نامه شامل پنج فصل می باشد، که عمده مطالب آن بر اساس مراجع [۲۷] و [۲۶] گردآوری شده است. در هر یک از فصل های این پایان نامه مطالب زیر مورد بررسی قرار می گیرند.

- در فصل اول، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم.

- در فصل دوم، ابتدا به معرفی مفهوم سایه زدنی C^1 ـ پایدار پرداخته، سپس نشان می دهیم که اگر یک مؤلفه

---

[1] Sakai
[2] Sambarino
[3] Vieitez

زنجیری سایه زدنی C^1 ـ پایدار باشد، در این صورت یک کلاس هموکلینیک است. و در پایان عدم وجود مماس های هموکلینیک و دورهای با بعد متفاوت را برای چنین سیستم هایی ثابت خواهیم کرد.

- در فصل سوم به اثبات وجود یک تجزیه تسلطی روی یک مؤلفه زنجیری می پردازیم که سایه زدنی C^1 ـ پایدار است. و برای این منظور ابتدا گزاره های راجع به این مطلب را بیان می کنیم.

- بیشتر مطالب فصل چهارم برگرفته از مقاله [۱۵] می باشد. در این فصل با استفاده از یک گزاره مهم و قضیه انشعاب هاپف هذلولوی بودن غیر یکنواخت را در طول مدارهای متناوب ثابت خواهیم کرد .

- در فصل پنجم نشان می دهیم که اگر یک مؤلفه زنجیری انبساطی پایه ای نیز باشد، در این صورت تجزیه تسلطی که در فصل سوم به آن اشاره کردیم، یک تجزیه هذلولوی است.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده همراه با متر d و 2^X متشکل از تمام زیر مجموعه های بسته X باشد. متر **هاسدورف** d_H روی 2^X به صورت زیر تعریف می شود

$$d_H(Y,Z) = \inf\{\epsilon > 0 \ : \ Y \subseteq N_\epsilon(Z) \ , \ Z \subseteq N_\epsilon(Y)\}$$

که $N_\epsilon(A) = \{x \in X \ : \ d(x,A) < \epsilon\}$ هرگاه $A \subseteq X$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد فشرده و $C^r(M,\mathbb{R}^s)$، $(r \geq 0)$ فضای تمام نگاشت های C^r از M به $\mathbb{R}^s$ باشد. دراین صورت می توان یک پوشش متناهی از همسایگی های باز $V_1, \ldots, V_n$ برای M چنان یافت که هر V_i در دامنه یک همسایگی مختصاتی (U_i, ϕ_i) قرار داشته باشد، به طوری که

$$\phi_i(U_i) = B_2(0) \quad , \quad \phi_i(V_i) = B_1(0)$$

$B_\epsilon(x)$ یک گوی به شعاع ϵ و مرکز x است. برای هر $f \in C^r(M,\mathbb{R}^s)$ قرار می دهیم

$$f_i = f \circ \phi_i^{-1} : B_2(0) \to \mathbb{R}^s$$

و

$$\|f\|_r = \max_{i=1,\ldots,k} \sup\{\|f_i(u)\|, \|Df_i(u)\|, \ldots, \|D^r f_i(u)\| \ : \ u \in B_1(0)\}$$

توپولوژی تعریف شده توسط این نرم را C^r ـ **توپولوژی** می نامیم.

توجه شود این متریک به انتخاب V_i ها وابسته نیست (مرجع [۱۷] را ببینید).

تعریف ۳.۱.۱. یک **متر ریمانی** روی منیفلد M نگاشت ضرب داخلی

$$<\, , \,>_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \qquad p \in M$$

است، به طوری که برای هر $u_p, v_p, w_p \in T_pM$ خواص زیر برقرارند

۱. $\circ \leq <v_p, v_p>_p$ ، در حالت خاص $v_p = \circ$ اگر و تنها اگر $<v_p, v_p>_p = \circ$

۲. $<v_p, u_p>_p = <u_p, v_p>_p$

۳. $<\alpha u_p + \beta v_p, w_p>_p = \alpha <u_p, w_p>_p + \beta <v_p, w_p>_p$.

حال یک نرم ریمانی به صورت زیر تعریف می شود

$$\|v_p\|_p = \sqrt{<v_p, v_p>_p}$$

در این متن برای $r \geq \circ$ منظور از M همواره یک C^r ـ منیفلد ریمانی، فشرده با بعد متناهی و $Diff^r(M)$ فضای تمام C^r ـ دیفیومورفیسم های روی M همراه با C^r ـ توپولوژی می باشند.

تعریف ۴.۱.۱. *یک* ***سیستم دینامیکی*** *روی M یک نگاشت پیوسته $\phi : M \times G \to M$ است، به طوری که*

۱. $G = \mathbb{R}$ یا $G = \mathbb{Z}$

۲. $\phi(x, \circ) = x$

۳. برای $x \in M$ و $s, t \in G$ $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t)$

اگر $G = \mathbb{Z}$ آن گاه ϕ یک سیستم دینامیکی ***گسسته*** *و اگر $G = \mathbb{R}$ آن گاه ϕ یک سیستم دینامیکی* ***پیوسته*** *روی M نامیده می شود.*

تبصره ۵.۱.۱. *در سراسر این متن به استثای مواردی که ذکر می کنیم $f \in Diff^r(M)$ ، $(r \geq ۱)$ فرض شده است، اگر چه برخی از تعاریف برای یک نگاشت پیوسته نیز درست است.*

تعریف ۶.۱.۱. ***مدارهای مثبت*** *و* ***منفی*** *x از M به ترتیب عبارتند از*

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) \ : \ n \geq \circ\} \quad , \quad \mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) \ ; \ n \geq \circ\}$$

همچنین $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ را ***مدار*** *x می نامیم.*

تعریف ۷.۱.۱. *برای هر همیومورفیسم f و $x \in M$ گوییم*

۱. x *یک* ***نقطه ثابت*** *برای f است، هرگاه $f(x) = x$ و یا به عبارتی $\mathcal{O}_f(x) = \{x\}$.*

۲. x *یک* ***نقطه متناوب*** *برای f است، هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد، به طوری که $f^n(x) = x$ و یا به عبارتی*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^۲(x), \ldots, f^{n-۱}(x)\}$$

به کوچکترین عددی که در رابطه فوق صدق کند، دوره تناوب x می گوییم و مجموعه این نقاط را با $Per(f)$ نمایش می دهیم.

۳. x یک **نقطه ناسرگردان** برای f است، هرگاه برای هر همسایگی U از x یک $n > 0$ موجود باشد، به طوری که

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

مجموعه این نقاط را با $\Omega(f)$ نمایش می دهیم.

۴. x یک **نقطه زنجیر بازگشتی** برای f است، هرگاه برای هر $\delta > 0$ یک δ ـ شبه مدار $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ برای f از x به خودش موجود باشد، یعنی

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

همچنین $x_0 = x_n = x$. مجموعه این نقاط را با $CR(f)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۸. برای هر همیومورفیسم f و $x \in M$

۱. مجموعه های ω ـ **حدی** و α ـ **حدی** x را به ترتیب با $\omega_f(x)$ و $\alpha_f(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &= \{y \in M \ : \ \exists\{n_k\} \ ; \ \lim_{n_k \to \infty} f^{n_k}(x) = y\} \\ \alpha_f(x) &= \{y \in M \ : \ \exists\{-n_k\} \ ; \ \lim_{n_k \to \infty} f^{n_k}(x) = y\} \end{aligned}$$

۲. قرار می دهیم $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$ وقتی

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega_f(x)} \quad , \quad L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha_f(x)}$$

که $L(f)$ را **مجموعه حدی** f می نامیم.

بوضوح $L(f)$، $\Omega(f)$ و $CR(f)$ مجموعه هایی بسته و fـ پایا می باشند، اما $Per(f)$ در حالت کلی در M بسته نیست. همچنین داریم

$$\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f).$$

(مرجع [۲۲] را ببینید). توجه کنید $A \subset M$ یک مجموعه fـ پایاست، هرگاه $f(A) = A$.

۲.۱ برخی از مفاهیم و قضایای توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱. *همیومورفیسم f را **ترایا توپولوژیک** نامند، هرگاه برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V در M عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد، به طوری که*

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

*همچنین f را **آمیخته توپولوژیک** نامند، هرگاه برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V در M عدد صحیح مثبت n_0 وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $n \geq n_0$*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای متریک باشد. گوییم $\mathcal{R} \subset X$ یک **مجموعه مانده ای** در X است، هرگاه شامل اشتراک شمارایی از زیرمجموعه های باز و چگال در X باشد.*

بوضوح اشتراک شمارایی از مجموعه های مانده ای، مانده ای است. زیرا اگر فرض می کنیم $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ دو مجموعه مانده ای در X باشد، در این صورت مجموعه های باز و چگال G_n و H_m در X وجود دارند، به طوری که

$$\mathcal{R}_1 \supset \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n \quad , \quad \mathcal{R}_2 \supset \cap_{m\in\mathbb{N}} H_m$$

لذا $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \supset \cap_{n,m\in\mathbb{N}}(G_n \cap H_m)$ که در آن $G_n \cap H_m$ یک مجموعه باز در X بوده، همچنین

$$\overline{G_n \cap H_m} = \overline{G_n \cap \overline{H_m}} = X$$

در نتیجه $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ یک مجموعه مانده ای در X است. به همین ترتیب اشتراک شمارای مجموعه های مانده ای، مانده ای است.

قضیه ۳.۲.۱. *f ترایا توپولوژیک است، اگر وتنها اگر یک زیر مجموعه مانده ای مانند $\mathcal{R}$ در M موجود باشد، به قسمی که برای هر $x \in \mathcal{R}$، $\overline{O_f(x)} = M$.*

برهان. به [۲۲] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۴.۲.۱. *مجموعه ترایای $\Lambda \subset M$ را **ترایای بیشین** گوییم، هرگاه شامل هر مجموعه ترایای T باشد که در رابطه $T \cap \Lambda \neq \emptyset$ صدق می کند.*

تعریف ۵.۲.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه از M باشد، گوییم Λ یک مجموعه **پایای بیشین** برای f در S است، هرگاه داشته باشیم $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(S)$.*

تعریف ۶.۲.۱. *مجموعه فشرده و f ـ پایای Λ **منفرد (یا موضعی بیشین)** نامیده می‌شود، هرگاه Λ در یک همسایگی U از Λ پایای بیشین باشد. در این حالت U را یک همسایگی منفرد از Λ گویند.*

در برخی از قضایای این متن همسایگی U در تعریف ۶.۲.۱ یک همسایگی فشرده فرض شده است.

تعریف ۷.۲.۱. *مجموعه فشرده و f ـ پایای Λ را Ω **ـ منفرد** نامند، هرگاه $\Omega(f) \setminus \Lambda$ یک مجموعه بسته باشد.*

تعریف ۸.۲.۱. *به مجموعه فشرده و f ـ پایای Λ **اشباع شده** گوییم، هرگاه*

$$W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) = \Lambda$$

۳.۱ مجموعه های هذلولوی

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید $\Lambda \subset M$ یک مجموعه بسته و fـ پایا باشد. Λ را یک مجموعه **هذلولوی** برای f گوییم، هرگاه ثابت های $C > 0$، $\lambda \in (0, 1)$ و زیر فضاهای $E^s(x)$ و $E^u(x)$ از T_xM، برای هر $x \in \Lambda$ وجود داشته باشند، به طوری که*

۱. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$

۲. $E^s(x)$ و $E^u(x)$ تحت Df_x پایا باشند، به عبارتی

$$Df_xE^s(x) = E^s(f(x)) \quad , \quad Df_xE^u(x) = E^u(f(x))$$

۳. برای هر $v^s \in E^s(x)$ و $n \geq 0$، $\|Df_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$

برای هر $v^u \in E^u(p)$ و $n \geq 0$، $\|Df_p^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$

در واقع از شرط (۳) داریم E^s و E^u به ترتیب به طور یکنواخت انقباضی و انبساطی هستند.

در تعریف فوق $E^s(x)$ را فضای پایدار x و $E^u(x)$ را فضای ناپایدار x می نامیم. علاوه براین با توجه به تعریف قرار می دهیم

$$\begin{aligned} E^s(x) &= \{v \in T_xM \ : \ \|Df_x^n(v)\| \to 0 (n \to \infty)\} \\ E^u(x) &= \{v \in T_xM \ : \ \|Df_x^{-n}(v)\| \to 0 (n \to \infty)\}. \end{aligned}$$

از این پس در سراسر این بخش فرض می کنیم Λ یک مجموعه هذلولوی برای f با ثابت های $C > 0$ و $\lambda \in (0, 1)$ باشد.

۱.۳.۱ مثال هایی از یک مجموعه هذلولوی

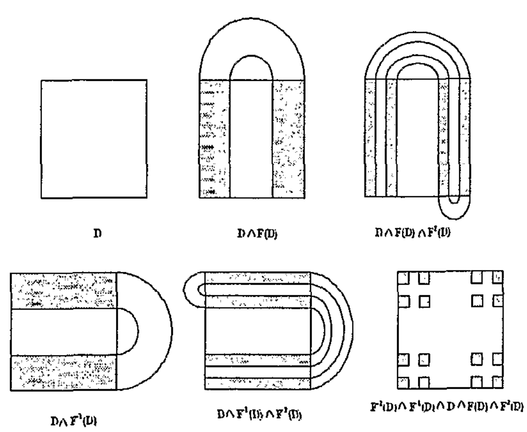
۱. هرگاه کل M برای f هذلولوی باشد، آن گاه f را **آناسوف** می نامیم.

۲. نقطه ثابت $p \in M$ یک نقطه **ثابت هذلولوی** برای f است، هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p مخالف یک باشد.

۳. نقطه متناوب $p \in M$ با دوره تناوب k یک نقطه **متناوب هذلولوی** برای f است، هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p^k مخالف یک باشد.

در حالت خاص هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p^k کوچکتر از یک باشد p **جاذب** ، بزرگتر از یک باشد p **دافع** و اگر قدرمطلق برخی از مقادیر ویژه Df_p^k کوچکتر از یک و برخی بزرگتر از یک باشد، آن گاه p **زینی** نامیده می شود.

۴. فرض کنید $D = [0, 1] \times [0, 1]$ یک مربع واحد در $\mathbb{R}^2$ باشد. با توجه به شکل زیر



شکل ۱.۱: نعل اسب

دیفیومورفیسم $F : D \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت **نعل اسب اسمیل** نامیده می شود. فرض می کنیم

$$F(D) \cap D = V_1 \cup V_2$$

با ادامه این روند قرار می دهیم

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(D)$$

در این صورت Λ یک مجموعه هذلولوی است، زیرا به طور افقی انقباضی و به طور عمودی انبساطی می باشد.

در مرجع [۲۲] آمده است، نگاشت F روی Λ با نگاشت انتقال $\sigma(x_n) = x_{n+1}$ روی فضای نمادین $\Sigma(2)$ مزدوج می باشد که

$$\Sigma(2) = \{x \; : \; x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), \; x_i \in \{1, 2\}\}$$

همچنین نگاشت مزدوج نگاشتی پیوسته و دارای معکوس پیوسته است.

۵. فرض کنید A یک ماتریس از $GL_n(\mathbb{Z})$ و نگاشت $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک خود ریختی القایی باشد. در این صورت داریم $L_A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. حال یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{R}^n$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$$

بنابراین فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}^n / \sim$ یک چنبره n ـ بعدی مانند

$$T^n \cong S^1 \times \ldots \times S^1$$

می باشد. فرض می کنیم نگاشت تصویر $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ به گونه ای باشد که

$$x \mapsto [x] = \{y \in \mathbb{R}^n \; : \; x \sim y\}$$

لذا نگاشت القا شده $f_A : T^n \to T^n$ توسط L_A یک دیفیومورفیسم است و

$$f_A([x]) = f_A \circ \pi(x) = \pi \circ L_A(x) = [Ax]$$

اکنون با فرض اینکه قدر مطلق مقادیر ویژه A مخالف یک باشد، T^n برای f_A هذلولوی است. به عبارتی f_A یک دیفیومورفیسم آناسوف روی T^n است که یک **خود ریختی هذلولوی چنبره** نامیده می شود.

۲.۳.۱ برخی از خواص یک مجموعه هذلولوی

پیوستگی

گزاره ۲.۳.۱. *زیر فضاهای E^s و E^u روی Λ به طور پیوسته تغییر می کنند.*

برهان. فرض کنید $x_n \in \Lambda$ دنباله ای همگرا به x_0 باشد. می توان فرض کرد بعد $E^s(x_n)$ ثابت است، لذا دارای یک پایه متعامد یکه مانند $w_{1,n}, \ldots, w_{k,n}$ می باشد. چون $T_{x_n}M$ فضایی فشرده است، برای $j = 1, \ldots, k$، $w_{j,n} \to w_{j,0}$. از طرفی با توجه به پیوستگی تابع $x \to T_xM$ و همگرایی x_n به x_0 داریم

$$T_{x_n}M \longrightarrow T_{x_0}M$$

پس $w_{j,\circ} \in T_{x_\circ}M$، وقتی k ,$j = 1, \ldots$.

شرط (۳) در تعریف ۱.۳.۱ یک شرط بسته می باشد، لذا هر بردار متعامد یکه $w_{1,\circ}, \ldots, w_{k,\circ}$ نیز در این شرط صدق می کند. اکنون با استفاده از این مطلب و شرط پایایی در تعریف یک مجموعه هذلولوی، هر یک از این بردارها در $E^s(x_\circ)$ قرار می گیرند. بنابراین

$$\dim E^s(x_\circ) \geq k = \dim E^s(x_n)$$

با بحثی مشابه می توان نشان داد

$$\dim E^u(x_\circ) \geq \dim E^u(x_n)$$

پس بنابر آنچه در بالا گفتیم و شرط (۱) در تعریف ۱.۳.۱ داریم

$$\dim E^s(x_\circ) = \dim E^s(x_n) \ , \ \dim E^u(x_\circ) = \dim E^u(x_n) \qquad (۱.۱)$$

از طرف دیگر

$$< w_{1,n}, \ldots, w_{k,n} > \longrightarrow < w_{1,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

بنابراین

$$E^s(x_n) \longrightarrow < w_{1,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

که $< w_{1,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$ زیر فضایی از $E^s(x_\circ)$ می باشد. لذا با توجه به رابطه (۱.۱) نتیجه می گیریم

$$E^s(x_\circ) = < w_{1,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

بنابراین زیر فضای E^s روی Λ پیوسته است. به طور مشابه پیوستگی E^u نیز اثبات می شود. □

اصطلاح **نرم سازگار** روی همسایگی یک مجموعه هذلولوی به کار برده می شود، که نسبت به این نرم شرط (۳) تعریف ۱.۳.۱ به ازای $C = 1$ و $\lambda' \in (\lambda, 1)$ برقرار است. وجود این نرم را در لم زیر بیان می کنیم.

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید $\epsilon > \circ$ و $\lambda' \in (\lambda, 1)$ داده شده باشند، در این صورت یک همسایگی $U = U(\epsilon, \lambda')$ از Λ، ثابت $\delta > \circ$، یک C^∞ نرم سازگار $\|.\|$ در U و زیرفضاهای پیوسته $\tilde{E}^s$ و $\tilde{E}^u$ (که لزوماً Df ـ پایا نیستند) روی U وجود دارند، به طوری که*

۱. *برای هر $x \in U$، $T_xM = \tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x)$*

۲. *به ازای $x, y \in U$ با $|y - f(x)| < \delta$ و نگاشت های Π^s_y و Π^u_y نامساوی های زیر برقرارند*

$$\|\Pi^s_y Df(x) v^s\| \leq \lambda' \|v^s\| \ , \ \|\Pi^u_y Df(x) v^s\| \leq \epsilon \|v^s\| \quad v^s \in \tilde{E}^s(x) \qquad (۲.۱)$$

$$\|\Pi^u_y Df(x) v^u\| \geq \frac{1}{\lambda'} \|v^u\| \ , \ \|\Pi^s_y Df(x) v^u\| \leq \epsilon \|v^u\| \quad v^u \in \tilde{E}^u(x) \qquad (۳.۱)$$